УДК 517.952

О РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

ON THE SOLUTIONS OF MULTI-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION OF SECOND ORDER WITH POWER-LAW NON-LINEARITIES

И.В. Рахмелевич
I.V. Rakhmelevich

Нижегородский национальный исследовательский университет,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Nizhny Novgorod National Research University,
23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Исследовано многомерное параболическое уравнение второго порядка со степенными нелинейностями по первым производным и нелинейностью произвольного вида по искомой функции. С помощью метода функционального разделения переменных найден ряд точных решений этого уравнения. Отдельно исследованы решения уравнения со степенной и экспоненциальной нелинейностями по неизвестной функции, а также решения, существующие при некоторых условиях на параметры уравнения.

Resume. There is investigated multi-dimensional parabolic equation of second order with power-law non-linearities on the first derivatives and with arbitrary type non-linearity on unknown function. The series of exact solutions of this equation have been founded with the help of method of functional separation of variables. There are separately investigated the solutions of equation with power-law and exponential non-linearities on unknown function, and also the solutions which exist under some conditions on the parameters of the equation.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, разделение переменных, степенная нелинейность.
Key words: partial differential equation, separation of variables, power-law non-linearity.

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных со степенными нелинейностями составляют важный класс уравнений, исследуемых в современной математической физике. Исследованию таких уравнений посвящено большое число работ [1-6] ввиду их важности как с точки зрения теории, так и практических приложений. Кроме того, уравнения с однородными и мультиоднородными функциями от производных для определенных классов решений [7-9] также сводятся к уравнениям со степенными нелинейностями. Данная работа посвящена исследованию решений многомерного параболического уравнения со степенными нелинейностями по первым производным и нелинейностью произвольного вида от искомой функции. Отдельно рассматриваются случаи, когда уравнение содержит нелинейности степенного и экспоненциального типов по искомой функции.

Постановка задачи. Решения, зависящие от линейной комбинации пространственных переменных

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(X,T)$:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(u) \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial u}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} \tag{1.1}$$

где $g(u)$ – некоторая заданная функция, $X = \{x_1, \ldots, x_N\}, T = \{t_1, \ldots, t_M\}$.

Данный параграф посвящен нахождению решений уравнения (1.1), зависящих от линейной комбинации пространственных переменных $x_1, \ldots, x_N$. Эти решения определяются следующими ниже теоремами 1.1, 1.2.

Теорема 1.1

Решения уравнения (1.1) в неявной форме, аддитивно зависящие от линейной комбинации $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n$, *имеют вид:*

$$z - z_0 = A \int R(U)\, dU, \tag{1.2}$$

$$R(U) = \begin{cases} (G(U) + B)^{\frac{1}{\beta_\Sigma - 2}} & \beta_\Sigma \neq 2 \\ \exp\{-\Phi_0 G(U)\} & \beta_\Sigma = 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

где z_0, A, B, Φ_0 *– произвольные постоянные;* z *определяется выражением:*

$$z = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n + V(T) \tag{1.4}$$

причем $V(T)$ *– любое решение уравнения*

$$\prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} = \mu, \tag{1.5}$$

где

$$\mu = C\Phi_0, \; C = \sum_{n=1}^{N} a_n c_n^2. \tag{1.5a}$$

Доказательство.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$u = U(z), \tag{1.6}$$

где z определяется выражением (1.4). Подставляя решение (1.6) в уравнение (1.1) с учетом (1.4), после элементарных преобразований находим:

$$C\Phi(z) = \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} \tag{1.7}$$

где C выражается с помощью (1.5a);

$$\Phi(z) = \frac{U''(z)}{g\,(U(z))\,[U'(z)]^{\beta_\Sigma}} \tag{1.8}$$

Продифференцируем соотношение (1.7) по x_i при произвольно выбранном i, тогда с учетом (1.4) получаем $\Phi'(z)=0$, т.е. $\Phi(z)=\Phi_0=\mathrm{const}$. Отсюда, с учетом (1.8) следует, что функция $U(z)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ):

$$U''(z)=\Phi_0 g\,(U(z))\left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma} \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) можно переписать в виде:

$$\left[U'(z)\right]^{1-\beta_\Sigma}U''(z)=\Phi_0\frac{dG(U(z))}{dz}\quad , \tag{1.10}$$

где $G(U)=\int g(U)\,dU$. Рассмотрим уравнение (1.10) для двух возможных случаев.

1) $\beta_\Sigma\neq 2$. Тогда, в результате интегрирования (1.10) сводится к уравнению первого порядка:

$$\frac{\left[U'(z)\right]^{2-\beta_\Sigma}}{2-\beta_\Sigma}-\Phi_0\,G(U(z))=B_0 \tag{1.11}$$

где B_0 – произвольная постоянная. Нетрудно получить решение уравнения (1.11) в неявном виде:

$$z-z_0=A\int\left(G(U)+B\right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma-2}}dU \tag{1.12}$$

где $A=\left[(2-\beta_\Sigma)\Phi_0\right]^{\frac{1}{\beta_\Sigma-2}}$, $B=B_0/\Phi_0$ – новые произвольные постоянные.

2) $\beta_\Sigma=2$. Тогда уравнение (1.10) сводится к следующему:

$$\ln\,U'(z)-\Phi_0\,G(U(z))=B_0 \tag{1.13}$$

Решение уравнения (1.13) в неявном виде запишется так:

$$z-z_0=A\int\exp\left\{-\Phi_0\,G(U)\right\}dU \tag{1.14}$$

где $A=\exp\left(-B_0\right)$ – новая произвольная постоянная.

Далее, в силу рассуждений, приведенных после уравнения (1.8), обе части уравнения (1.7) должны быть равны постоянной, поэтому функция $V(T)$ должна удовлетворять уравнению (1.5). Теорема доказана.

Уравнения вида (1.5), содержащие произведение степеней первых производных, рассматривались в [6]. Приведем решения этого уравнения, которые могут быть получены методом разделения переменных в предположении $\beta_\Sigma\neq 0$:

1) Аддитивное разделение переменных: $V(T)=\sum_{j=1}^{M}V_j\,(t_j)$.

Тогда решением уравнения (1.3) является линейная функция:

$$V(T)=\sum_{j=1}^{M}d_j\,t_j \tag{1.15}$$

где коэффициенты d_j должны удовлетворять условию:

$$\prod_{j=1}^{M} d_j^{\beta_j} = \mu \tag{1.15a}$$

Из (1.4) и (1.15) следует, что в данном случае имеет место решение типа бегущей волны.

2) Мультипликативное разделение переменных: $V(T)=\prod_{j=1}^{M} V_j(t_j)$.

Тогда решение уравнения (1.5) имеет вид:

$$V(T)=\begin{cases} \mu^{1/\beta_\Sigma}\prod_{j=1}^{M}\left[\dfrac{\beta_\Sigma}{\beta_j}(t_j-t_{j0})\right]^{\beta_j/\beta_\Sigma} & \beta_\Sigma\neq 0 \\ V_0\exp\left(\sum_{j=1}^{M} d_j t_j\right) & \beta_\Sigma = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

3) Комбинированное разделение переменных:

$$V(T)=\sum_{k=1}^{K}\prod_{m\in J_k} V_m(t_m) \tag{1.17}$$

При записи выражения (1.17) предполагается, что множество $J=\{1,\ldots,M\}$ значений индекса, нумерующего переменные $t_1,\ldots,t_M$, представлено в виде объединения K непересекающихся подмножеств J_k $(k=1,\ldots,K)$. Подставляя (1.17) в уравнение (1.3), приводим это уравнение к виду:

$$\prod_{k=1}^{K}\prod_{j\in J_k}\left[V_j'(t_j)\right]^{\beta_j}\left[V_j(t_j)\right]^{\beta_{\Sigma k}-\beta_j} = \mu \tag{1.18}$$

где

$$\beta_{\Sigma k} = \sum_{j\in J_k}\beta_j \,. \tag{1.18a}$$

Разделяя переменные в уравнении (1.18), находим:

$$V_j(t_j)=\begin{cases} \left[d_j\dfrac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_j}(t_j-t_{j0})\right]^{\beta_j/\beta_{\Sigma k}}, & \beta_{\Sigma k}\neq 0 \\ V_{j0}\exp(d_j t_j), & \beta_{\Sigma k}=0 \end{cases} \tag{1.19}$$

где постоянные d_j должны удовлетворять условию (1.15a). Подставляя (1.19) в (1.17), получаем:

$$V(T)=\sum_{k\in\Xi_+} V_{k0}\prod_{j\in J_k}\left[\frac{\beta_{\Sigma k}}{\beta_j}(t_j-t_{j0})\right]^{\beta_j/\beta_{\Sigma k}} + \sum_{k\in\Xi_0} V_{k0}\exp\left(\sum_{j\in J_k} d_j t_j\right), \tag{1.20}$$

где Ξ_+, Ξ_0 – множества значений *k*, для которых $\beta_{\Sigma k}\neq 0$, $\beta_{\Sigma k}=0$ соответственно; V_{k0} – новые произвольные постоянные.

Приведенные выше выражения (1.15), (1.16), (1.20) определяют конкретный вид левой части формулы (1.2) для разных семейств решений уравнения (1.1), описываемых теоремой 1.1.

Теорема 1.2.

Уравнение (1.1) имеет решение $u = U(z)$, *мультипликативно зависящее от линейной комбинации* $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n$, *причем* z *определяется выражением:*

$$z = V(T)\sum_{n=1}^{N} c_n x_n \tag{1.21}$$

а функции $U(z)$, $V(T)$ *являются решениями следующих уравнений:*

$$U''(z) = \Psi_0 g\,(U(z))\left[zU'(z)\right]^{\beta_\Sigma} \tag{1.22}$$

$$\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} = \mu V^{\beta_\Sigma+2} \tag{1.23}$$

где

$$\mu = C\Psi_0 . \tag{1.24}$$

Доказательство.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.4), где z определяется выражением (1.21). Подставляя решение (1.4) в уравнение (1.1) с учетом (1.21), после элементарных преобразований находим:

$$C\Phi(z) = \left[V(T)\right]^{-2}\left(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right)^{\beta_\Sigma}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j}, \tag{1.25}$$

где $C, \Phi(z)$, как и выше, определяются выражениями (1.5а), (1.8) соответственно. Поскольку из (1.21) следует, что

$$\left[V(T)\right]^{-2}\left(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right)^{\beta_\Sigma} = \left[V(T)\right]^{-(\beta_\Sigma+2)} z^{\beta_\Sigma},$$

поэтому уравнение (1.25) может быть переписано в виде:

$$C\Psi(z) = \left[V(T)\right]^{-(\beta_\Sigma+2)}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \tag{1.26}$$

где

$$\Psi(z) = \frac{U''(z)}{g\,(U(z))\left[zU'(z)\right]^{\beta_\Sigma}} \tag{1.26a}$$

Аналогично доказательству теоремы 1.1, продифференцируем соотношение (1.26) по x_i при произвольно выбранном i, тогда с учетом (1.21) получаем $\Psi'(z) = 0$, т.е. $\Psi(z) = \Psi_0 = \mathrm{const}$. Отсюда, с учетом (1.26а) следует, что функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению (1.22). Далее, поскольку обе части уравнения (1.26) равны постоянной $C\Psi_0$, то функция $V(T)$ должна удовлетворять уравнению (1.23), где μ определяется выражением (1.24). Теорема доказана.

Для простейшего случая $g(u) = g_0 = \mathrm{const}$, когда уравнение (1.1) явно не содержит искомую функцию, решение уравнения (1.22) можно записать в виде:

$$U(z)=\begin{cases}\int\left(A_0z^{1+\beta_\Sigma}+B_0\right)^{1/(1-\beta_\Sigma)}dz & \beta_\Sigma\neq 1\\ B_0\int\exp\left(\dfrac{g_0\Psi_0z^2}{2}\right)dz & \beta_\Sigma=1\end{cases}.$$

Решения, зависящие от квадратичных и экспоненциальных функций пространственных переменных

В данном параграфе рассматриваются решения уравнения (1.1), зависящие от квадратичных и экспоненциальных функций переменных $x_1,\dots,x_N$.

Теорема 2.1.

Уравнение (1.1) имеет решение $u=U(z)$, *зависящее от квадратичной функции переменных* $x_1,\dots,x_N$, *причем* z *определяется выражением:*

$$z=V(T)\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^2}{a_n} \tag{2.1}$$

а функции $U(z)$, $V(T)$ *являются решениями следующих уравнений:*

$$2zU''(z)+NU'(z)-\frac{\mu}{2}g\,(U(z))\left[zU'(z)\right]^{\beta_\Sigma}=0\,, \tag{2.2}$$

$$\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j}=\mu V^{\beta_\Sigma+1} \tag{2.3}$$

Доказательство.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.6), где z определяется выражением:

$$z=V(T)\sum_{n=1}^{N}c_nx_n^2 \tag{2.4}$$

где c_n – некоторые пока неизвестные коэффициенты.

Подставив (2.4) в уравнение (1.1), получаем:

$$2V(T)\left\{U'(z)\sum_{i=1}^{N}a_ic_i+2U''(z)V(T)\sum_{i=1}^{N}a_ic_i^2x_i^2\right\}=g\big(U(z)\big)\big[U'(z)\big]^{\beta_\Sigma}\left(\sum_{i=1}^{N}c_ix_i^2\right)^{\beta_\Sigma}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, что из уравнения (2.5) могут быть получены ОДУ относительно функций $U(z),V(T)$, если положить $c_i=1/a_i$ для всех $i=1,\dots,N$. Тогда это уравнение приводится к виду:

$$NU'(z)+2zU''(z)=\frac{g\big(U(z)\big)}{2}\big[U'(z)\big]^{\beta_\Sigma}\left(\sum_{i=1}^{N}c_ix_i^2\right)^{\beta_\Sigma}\frac{1}{V(T)}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \tag{2.6}$$

Из (2.4) следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^{N}c_ix_i^2\right)^{\beta_\Sigma}\frac{1}{V(T)}=\big[V(T)\big]^{-(\beta_\Sigma+1)}z^{\beta_\Sigma} \tag{2.7}$$

Используя (2.7), уравнение (2.6) приводим к виду:

$$\frac{2}{g(U(z))}\left[zU'(z)\right]^{-\beta_\Sigma}\left\{NU'(z)+2zU''(z)\right\}=\left[V(T)\right]^{-(\beta_\Sigma+1)}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \quad (2.8)$$

Продифференцировав (2.8) по произвольно выбранному x_i, используя (2.4), и проводя рассуждения, аналогичные выполненным при анализе уравнений (1.7) и (1.26), получаем, что функции $U(z)$, $V(T)$ должны удовлетворять уравнениям (2.2), (2.3). Теорема доказана.

Замечание. С помощью метода разделения переменных нетрудно найти частные решения уравнения (2.3): $V(T)=\left(\sum_{m=1}^{M}d_m t_m\right)^{-\beta_\Sigma}$, $V(T)=\frac{1}{\mu}\prod_{m=1}^{M}\left\{-\frac{1}{\beta_m}(t_m-t_{m0})\right\}^{-\beta_m}$,

откуда находим соответствующие частные решения уравнения (1.1):

$$u=U\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}d_m t_m\right)^{-\beta_\Sigma}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^2}{a_n}\right)\right\},\quad u=U\left\{\frac{1}{\mu}\prod_{m=1}^{M}\left[-\frac{1}{\beta_m}(t_m-t_{m0})\right]^{-\beta_m}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^2}{a_n}\right)\right\},$$

где функция $U(z)$ должна удовлетворять уравнению (2.2).

Теорема 2.2.

Уравнение (1.1) имеет решение $u=U(z)$, зависящее от экспоненциальной функции переменных $x_1,\dots,x_N$, причем z определяется выражением:

$$z=V(T)\exp\left(\sum_{i=1}^{N}c_i x_i\right) \quad (2.9)$$

а функции $U(z)$, $V(T)$ являются решениями следующих уравнений:

$$C\left(zU''(z)+U'(z)\right)-\mu g\,(U(z))z^{\beta_\Sigma-1}\left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma}=0\,, \quad (2.10)$$

$$\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j}=\mu V^{\beta_\Sigma}\,, \quad (2.11)$$

причем C определяется выражением (1.5а).

Доказательство.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.6), где z определяется выражением

$$z=W(X)V(T)\,, \quad (2.12)$$

Подставив (2.12) в уравнение (1.1), преобразуем его к виду:

$$\Phi_1(z)\sum_{i=1}^{N}a_i\left(\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2+\Phi_2(z)\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{W}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2}=\left[V(T)\right]^{-\beta_\Sigma}\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \quad (2.13)$$

где

$$\Phi_1(z)=\frac{z^2\,U''(z)}{g(U(z))\left[z\,U'(z)\right]^{\beta_\Sigma}},\quad \Phi_2(z)=\frac{\left[z\,U'(z)\right]^{1-\beta_\Sigma}}{g(U(z))}\,. \quad (2.13а)$$

В соответствии с условием теоремы положим $W(X)=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}c_i x_i\right)$, тогда:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = C \tag{2.14}$$

С учетом (2.14) уравнение (2.13) приводится к виду:

$$C(\Phi_1(z) + \Phi_2(z)) = [V(T)]^{-\beta_\Sigma} \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} \tag{2.15}$$

Продифференцировав (2.15) по произвольно выбранному x_i, используя (2.9) и (2.13а), и проводя рассуждения, аналогичные выполненным при анализе уравнений (1.7) и (1.26), получаем, что функции $U(z)$, $V(T)$ должны удовлетворять уравнениям (2.10), (2.11). Теорема доказана.

Анализ специальных случаев

Данный параграф посвящен анализу решений уравнения (1.1) для случаев степенной и экспоненциальной нелинейностей по неизвестной функции, а также случая, когда уравнение явно не содержит неизвестную функцию.

Теорема 3.1.

Пусть в уравнении (1.1) имеет место степенная зависимость от искомой функции, т.е. $g(u) = g_0 u^{\gamma}$. *Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:*

$$u(X,T) = W(X)V(T), \tag{3.1}$$

причем функции $W(X), V(T)$ *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = A_0 W^{\beta_\Sigma + \gamma}, \qquad \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} = \mu V^{1-\gamma}, \tag{3.2}$$

где μ *– некоторая постоянная,* $A_0 = \mu g_0$.

Доказательство.

Подставляя решение, определяемое выражением (3.1), в уравнение (1.1), приводим это уравнение к виду:

$$V(T) \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = g_0 [W(X)V(T)]^{\gamma} [W(X)]^{\beta_\Sigma} \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t_j} \right)^{\beta_j}$$

или

$$\frac{1}{g_0} [W(X)]^{-(\beta_\Sigma + \gamma)} \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = [V(T)]^{\gamma - 1} \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} \tag{3.3}$$

Левая часть уравнения (3.3) зависит только от множества переменных X, а правая часть – только от множества переменных T. Поэтому обе части этого уравнения должны быть равны некоторой постоянной μ, откуда следуют уравнения (3.2). Теорема доказана.

Теорема 3.2.

Пусть в уравнении (1.1) имеет место экспоненциальная зависимость от искомой функции, т.е. $g(u) = g_0 \exp(\gamma u)$. *Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:*

$$u(X,T)=W(X)+V(T), \tag{3.4}$$

причем функции $W(X), V(T)$ *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = A_0 \exp(\gamma W), \quad \prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial V}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} = \mu \exp(-\gamma V), \tag{3.5}$$

где μ *– некоторая постоянная,* $A_0 = \mu g_0$.

Доказательство.

Подставляя решение, определяемое выражением (3.4), в уравнение (1.1) и проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3.1, приходим к уравнениям (3.5). Теорема доказана.

Теорема 3.3.

Пусть уравнение (1.1) явно не содержит неизвестную функцию, т.е. $g(u) = g_0$. *Пусть также множества* $I = \{1,\dots,N\}$, $J = \{1,\dots,M\}$ *значений индексов* i, j, *нумерующих независимые переменные* x_i, t_j *представлены в виде объединения непересекающихся подмножеств* $I = \bigcup_{k=0}^{K} I_k$, $J = \bigcup_{k=0}^{K} J_k$, *причем при всех* $k \geq 1$, $k \neq k_1$ *выполнены дополнительные условия* $\beta_{\Sigma k} = 0$. *Тогда уравнение (1.1) имеет следующее семейство решений:*

$$u(X,T) = W_0(X_0) + V_0(T_0) + \sum_{k=1}^{K} W_k(X_k) V_k(T_k), \tag{3.6}$$

где функции $W_k(X_k), V_k(T_k)$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\sum_{i \in I_{k1}} a_i \frac{\partial^2 W_{k1}}{\partial x_i^2} = \tilde{g}_0 \left[W_{k_1}(X_{k_1})\right]^{\beta_{\Sigma k1}}, \quad \prod_{j \in J_{k1}} \left(\frac{\partial V_{k_1}}{\partial t_{j_1}}\right)^{\beta_j} = \mu_{k_1} V_{k_1}(T_{k_1}) \tag{3.7}$$

$$\sum_{i \in I_k} a_i \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i^2} = 0, \quad \prod_{j \in J_k} \left(\frac{\partial V_k}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} = \mu_k \quad (k \neq k_1) \tag{3.8}$$

Здесь $k_1 \geq 1$ *– некоторое произвольно выбранное значение* k; μ_k *-некоторые произвольные постоянные;* $\tilde{g}_0 = g_0 \prod_{k=0}^{K} \mu_k$; $X_k = \{x_i\}_{i \in I_k}$, $T_k = \{t_j\}_{j \in J_k}$ *- подмножества независимых переменных.*

Доказательство.

Подставим функцию (3.6) в уравнение (1.1) , которое в этом случае принимает вид:

$$\sum_{i \in I_0} a_i \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_i^2} + \sum_{k=1}^{K} V_k(T_k) \sum_{i \in I_k} a_i \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i^2} = g_0 \prod_{j \in J_0} \left(\frac{\partial V_0}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \cdot \prod_{k=1}^{K} \left\{ [W_k(X_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{j \in J_k} \left(\frac{\partial V_k}{\partial t_j}\right)^{\beta_j} \right\} \tag{3.9}$$

Так как правая часть (3.9) не зависит от переменных X_0, а левая часть не зависит от переменных T_0, то функции $W_0(X_0), V_0(T_0)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\sum_{i\in I_0} a_i \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_i^2} = \nu_0 , \quad \prod_{j\in J_0} \left(\frac{\partial V_0}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} = \mu_0 , \tag{3.10}$$

где ν_0, μ_0 – некоторые постоянные.

Учитывая (3.10), уравнение (3.9) перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^{K} V_k(T_k) \sum_{i\in I_k} a_i \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i^2} + \nu_0 = g_0\mu_0 \prod_{k=1}^{K} \left\{ [W_k(X_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{j\in J_k} \left(\frac{\partial V_k}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} \right\} \tag{3.11}$$

Пусть выбраны некоторые значения j_1, k_1 индексов j, k, причем $j_1 \in J_{k_1}$. Продифференцируем уравнение (3.11) по t_{j_1}, тогда получим следующее:

$$\frac{\partial V_{k_1}}{\partial t_{j_1}} \sum_{i\in I_{k_1}} a_i \frac{\partial^2 W_{k_1}}{\partial x_i^2} = g_0\mu_0 \prod_{k=1, k\neq k_1}^{K} \left\{ [W_k(X_k)]^{\beta_{\Sigma k}} \prod_{j\in J_k} \left(\frac{\partial V_k}{\partial t_j} \right)^{\beta_j} \right\} [W_{k_1}(X_{k_1})]^{\beta_{\Sigma k1}} \frac{\partial}{\partial t_{j_1}} \left\{ \prod_{j\in J_{k_1}} \left(\frac{\partial V_{k_1}}{\partial t_{j_1}} \right)^{\beta_j} \right\} \tag{3.12}$$

Левая часть уравнения (3.12) не зависит от переменных X_k $(k \neq k_1)$, поэтому правая часть также не должна зависеть от этих переменных. Это возможно только в том случае, если при всех $k \neq k_1$ выполняется хотя бы одно из условий $W_k(X_k) = \text{const}$ либо $\beta_{\Sigma k} = 0$. Предполагаем, что ищутся решения, существенно зависящие от всех переменных, т.е. для всех k $W_k(X_k) \neq \text{const}$, поэтому для того чтобы удовлетворить уравнение (3.12), должно выполняться условие $\beta_{\Sigma k} = 0$. Также левая часть (3.12) не зависит от переменных T_k $(k \neq k_1)$, поэтому функции $V_k(T_k)$ должны удовлетворять уравнению (3.8). Из приведенных рассуждений следует, что уравнение (3.11) запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{K} V_k(T_k) \sum_{i\in I_k} a_i \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_i^2} + \nu_0 = g_0 \prod_{k=0, k\neq k_1}^{K} \mu_k \cdot [W_{k_1}(X_{k_1})]^{\beta_{\Sigma k1}} \prod_{j\in J_{k1}} \left(\frac{\partial V_{k_1}}{\partial t_{j_1}} \right)^{\beta_j} . \tag{3.13}$$

Так как правая часть (3.13) не зависит от переменных X_k, T_k $(k \neq k_1)$, то при всех $k \neq k_1$ функции $W_k(X_k)$ должны удовлетворять уравнению (3.8). Поэтому дальнейшее упрощение уравнения (3.13) дает:

$$V_{k_1}(T_{k_1}) \sum_{i\in I_{k_1}} a_i \frac{\partial^2 W_{k_1}}{\partial x_i^2} + \nu_0 = g_0 \prod_{k=0, k\neq k_1}^{K} \mu_k \cdot [W_{k_1}(X_{k_1})]^{\beta_{\Sigma k1}} \prod_{j\in J_{k1}} \left(\frac{\partial V_{k_1}}{\partial t_{j_1}} \right)^{\beta_j} \tag{3.14}$$

Уравнение (3.14) допускает разделение переменных только при выполнении условия $\nu_0 = 0$, тогда из этого уравнения находим, что функции $W_{k_1}(X_{k_1}), V_{k_1}(T_{k_1})$ должны удовлетворять уравнениям (3.7). Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в данной работе получены частные решения многомерного параболического уравнения второго порядка, содержащего степенные нелинейности по первым производным и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции. С помощью метода разделения переменных найдены решения, зависящие от линейной, квадратичной и экспоненциальной функции пространственных переменных. Отдельно рассмотрены решения, существующие для конкретных типов нелинейности по искомой функции, в том числе для степенной и экспоненциальной нелинейностей. Также найдены решения, существующие при выполнении некоторых дополнительных условий для параметров уравнения. Результаты, полученные в работе, могут быть обобщены для уравнений с более сложными нелинейными операторами.

Список литературы

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М., Физматлит: 432 .

Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. 2012. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.

2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит: 256.

Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Zhurov A. I. 2005. Metody resheniya nelineynyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mehaniki. M., Fizmatlit (In Russian).

3. Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. 1995. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Дифференциальные уравнения, № 2 (31): 253-261.

Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshevskiy S.R. 1995. Obobshennoe razdelenie peremennyh dlya differentsialnyh uravneniy s polinomialnymi pravymi chastyami. Differentsialnye uravneniya, No 2 (31): 253-261. (In Russian).

4. Matsuno Y. 1987. Exact solutions for the non-linear Klein – Gordon and Liouville equations in four dimensional Euclidean space. Journal of Mathematical Physics, No 10 (28): 2317-2322.

5. Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 1(33): 12-19.

Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernyh hyperbolicheskih uravneniyah so stepennoy nelineynostiu po proizvodnym. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, No 1(33): 12-19. (In Russian).

6. Рахмелевич И.В. 2015. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 3. С. 18-25.

Rakhmelevich I.V. 2015. O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost'yami. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, No 3(35): 18-25 (in Russian).

7. Рахмелевич И.В. 2013. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 3: 37-44.

Rakhmelevich I.V. 2013. O primenenii metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, soderzhashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh . Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, № 3(23): 37-44 (in Russian).

8. Рахмелевич И.В. 2014. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 1: 42-50.

Rakhmelevich I.V. 2014. Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, soderzhashchikh mul'tiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. No 1(27): 42-50 (in Russian).

9. Рахмелевич И.В. 2016. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных. Известия вузов. Математика, № 4: 57-67.

Rakhmelevich I.V. 2016. Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. Russian Mathematics, № 4(60) : 47-55.