УДК 514.01

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. ЧЕТЫРЕ НОВЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

THE PYTHAGOREAN THEOREM. FOUR NEW EVIDENCE

В.М. Московкин
V.M. Moskovkin

*Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85*

*Belgorod National Research University,
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia*

E-mail: moskovkin@bsu.edu.ru

Аннотация. Проделаны четыре новых доказательства теоремы Пифагора, первые два из которых получены из подобия треугольников, а последнее два – из подобия треугольников и подсчета площадей треугольников. В отличие от известных доказательств теоремы Пифагора два последних доказательства свелись к случаю, когда произведение двух алгебраических членов равнялось нулю. Приравнивание к нулю первого члена сводилось к доказательству общего случая теоремы Пифагора, а второго – к частному случаю, который легко доказывается. Теорема Пифагора хороший пример для математического образования школьников и студентов, так как количество доказательств здесь не органично. Доказательства этой теоремы различными способами являются очень хорошими алгебро-геометрическими упражнениями. В школах и университетах могут объявляться конкурсы на наибольшее количество доказательств теоремы Пифагора. В этих конкурсах, возможно, будут найдены новые доказательства этой теоремы. Все это может вылиться в некое движение под названием «Пифагореана», что будет очень полезным в деле повышения престижа математического образования среди молодежи.

Resume. The article presents four new proof of Pythagoras' theorem, the first two of which are derived from the similarity of triangles, and the last two from the similarity of triangles and calculation of the area of triangles. In contrast to the known proof of Pythagoras' theorem, two recent proofs were reduced to the case when the product of two algebraic numbers is equal to zero. Equating to zero the first member reduced to the proof of the General case of Pythagoras' theorem, and the second to the particular case which can easily be proved. Pythagoras' theorem is a good example for the mathematics education of pupils and students as well as the number of proofs are not naturally. The proofs of this theorem by various methods are very good algebraic-geometric exercises. In schools and universities these theorems may be advertised competitions for the highest number proofs of Pythagoras' theorem. In these competitions, possibly, new proof of this theorem can be found. All this can result in a movement called "Pythagorean" that will be very useful in increasing the prestige of mathematics education among young people.

Ключевые слова: Теорема Пифагора, новые доказательства теоремы Пифагора, подобие треугольников.
Key words: Pythagoras' theorem, new proofs of Pythagoras' theorem, similarity of triangles.

Одним из самых выдающихся достижений античной математики является теорема Пифагора. Она лежит в основе большей части евклидовой геометрии и всей тригонометрии [1,2], ньютоновой физики и релятивистской динамики [3,4]. Например, работе [3] доказано, что теорема Пифагора лежит в основе трех законов Ньютона, универсальной гравитационной силы, закона Кулона и формул релятивисткой динамики. Уже несколько тысячелетий к этой теореме приковано пристальное внимание профессионалов и любителей.

Наш поиск различных названий теоремы Пифагора с помощью поисковой машины Google Scholar (расширенный поиск с точной фразой) привел к следующим результатам (табл. 1).

Таблица 1

Table 1

Встречаемость различных названий теоремы Пифагора. Google Scholar. 22.01.2016 г.

The incidence of different names of the Pythagorean theorem. Google Scholar. 22.01.2016 Mr.

Название	Встречаемость названий в тексте научной публикации	Встречаемость названий в заголовке научной публикации
Pythagorean Theorem	24800	353
Pythagoras Theorem	11200	110
Theorem of Pythagoras	2730	
Теорема Пифагора	1480	41
Пифагорова теорема	11	15
		0
Всего	40221	519

Из таблицы 1 видим, что наблюдается около 40 тысяч научных публикаций (в основном научные статьи) в которых встречается термин "Теорема Пифагора" на русском и английском языке.

Часто Теорема Пифагора используется в обучающих целях, например, в работе [5] для этих целей рассмотрено пять традиционных доказательств теоремы Пифагора.

Новые и старые доказательства теоремы Пифагора можно увидеть в работах конца 19 – начала 20 века [6,7]. Шесть новых доказательств этой теоремы предложено в работе [8]. Три новых доказательства теоремы Пифагора были сделаны в рамках студенческого проекта в университете Северной Флориды [9].

В связи с постоянным увеличением числа доказательств теоремы Пифагора в работе [10] был поставлен вопрос о неограниченном числе доказательств этой теоремы.

Наиболее полная подборка доказательств теоремы Пифагора собрана в книге [1], изданной Национальным советом учителей математики (США). В ней отмечается, что на уровень первого издания этой книги было собрано 230 различных доказательств теоремы Пифагора (1927 г.), а на уровень второго издания – 370 (1940 г.). В последнем случае из 370 доказательств выделено 109 алгебраических и 225 геометрических. С 6 мая 1997 г. по настоящее время на сайте Cut the Knot. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (www.cut-cut-the-knot.org/pythagoras/index-html) ведется сбор всех, имеющихся доказательств теоремы Пифагора. На конец декабря 2015 г. на нем было собрано 114 доказательств этой теоремы.

В этой связи, очевидно, что все доказательства теоремы Пифагора, которые претендуют на новизну, должны быть протестированы на вышеуказанном сайте, а также по книге [1].

Из всех имеющихся доказательств теоремы Пифагора наибольший интерес представляют те, которые требуют минимум геометрических построений и алгебраических выкладок. Таким требованиям, в первую очередь, удовлетворяет доказательство А.М. Лежандра, полученное в 1858 г. [1,2]. Приведем это изящное доказательство в обозначениях работы [2], за исключением обозначения длины высоты (h).

Если в прямоугольном треугольнике провести на гипотенузу высоту, которая разделит ее на отрезки x и y, тогда из подобия двух новых образовавшихся прямоугольных треугольников получим соотношения (рис. 1)

$$\frac{x}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow x=\frac{a^2}{c};$$

$$\frac{y}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow y=\frac{b^2}{c}$$

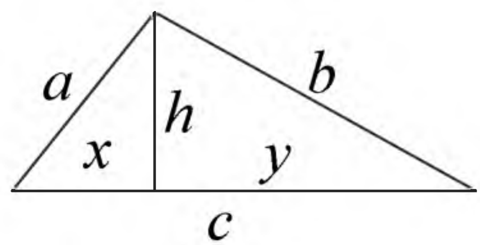

Рис. 1. Рисунок к доказательству Лежандра и к первому новому доказательству теоремы Пифагора

Учитывая, что $x+y=c$, получим $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}=c\Rightarrow a^2+b^2=c^2$. Что и требовалось доказать.

Другое оригинальное доказательство теоремы Пифагора, но несколько более сложное получил в 1876 г. 20-ый президент США Д.А. Гарфильд [1,2].

Достраивая два равновеликих прямоугольных треугольника до трапеции, как показано на рисунке 2, и вычисляя площадь трапеции двумя способами получим:

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2\Rightarrow(a+b)(a+b)=2ab+c^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2.$$

Что и требовалось доказать.

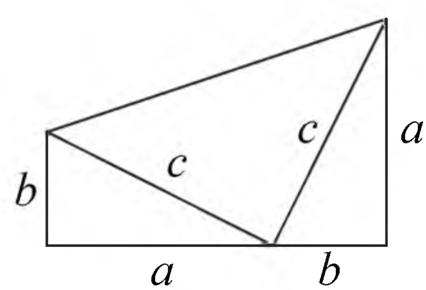

Рис. 2. Рисунок к доказательству Гарфильда

В этом доказательстве, в отличие от доказательства Лежандра, в котором требуется знание теоремы о подобии треугольников, используются только формулы для расчета площадей треугольника и трапеции.

Интерес к теореме Пифагора ничуть не уменьшился и в наше время. Из самых последних публикаций отметим работы [11-13], причем в последней работе, опубликованной в American Mathematical Monthly в мае 2015 г. было предложено очередное новое доказательство теоремы Пифагора.

Ниже мы опишем четыре новых доказательства теоремы Пифагора.

Четыре новых доказательства теоремы Пифагора

Доказательство 1. Рассматривая два подобных треугольника на рисунке 1, можно проделать следующие выкладки:

$$\frac{h}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow a=\frac{hc}{b};\ \frac{x}{a}=\frac{h}{b}\Rightarrow x=\frac{ah}{b};\ \frac{x}{h}=\frac{h}{c-x}=\frac{h}{c-\frac{ah}{b}}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{h}=\frac{hb}{cb-ah}\Rightarrow x(cb-ah)=bh^2\Rightarrow\frac{ah}{b}(cb-ah)=bh^2\Rightarrow$$

$$ahc-\frac{a^2h^2}{b}=bh^2\Rightarrow\left(\frac{hc}{b}\right)hc-\frac{a^2h^2}{b}=bh^2\Rightarrow\frac{h^2c^2}{b}-\frac{a^2h^2}{b}=bh^2\Rightarrow$$

$h^2(c^2-a^2-b^2)=0\Rightarrow c^2=a^2+b^2$. Теорема Пифагора доказана.

Доказательство 2. Располагая симметрично катета с длиной a исходный прямоугольный треугольник и проводя высоту на гипотенузу симметричного треугольника, запишем базовые балансовые соотношения (рис.3)

$$h_1+h_2=h, \tag{1}$$

$$x+y=c. \tag{2}$$

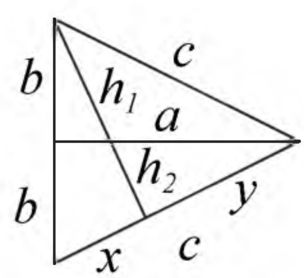

Рис. 3. Рисунок к второму новому доказательству теоремы Пифагора

Из подобия треугольников следуют следующие соотношения

$$\frac{h}{2b}=\frac{a}{c}\Rightarrow h=\frac{2ab}{c}, \tag{3}$$

$$\frac{h}{x}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{hb}{a}. \tag{4}$$

Поставляя (4) в формулу (3), получим

$$x=\frac{2b^2}{c}. \tag{5}$$

Снова используя свойство подобия треугольников, получим

$$\frac{b}{a}=\frac{h_2}{y}=\frac{h_2}{c-x}. \tag{6}$$

Поставляя (6) в формулу (5), получим

$$\frac{b}{a}=\frac{h_2}{y}=\frac{h_2}{c-\frac{2b^2}{c}}=\frac{h_2c}{c^2-2b^2}\Rightarrow h_2=\frac{(c^2-2b^2)b}{ac}. \quad (7)$$

Используя в последний раз свойство подобия треугольников, получим

$$\frac{h_1}{b}=\frac{c}{a}\Rightarrow h_1=\frac{cb}{a}. \quad (8)$$

Поставляя (7,8) в (1), с учетом (3), получим

$$\frac{cb}{a}+\frac{(c^2-2b^2)b}{ac}=\frac{2ab}{c}. \quad (9)$$

Преобразуем равенство (9)

$$c^2b+(c^2-2b^2)b=2a^2b\Rightarrow 2c^2b-2b^3-2a^2b=0\Rightarrow 2b(c^2-a^2-b^2)=0\Rightarrow$$

$c^2=a^2+b^2$. Теорема Пифагора доказана.

В терминологии работы [1] оба доказательства носят алгебраический характер.

Доказательство 3. Построим на гипотенузе длиной c квадрат, направленный в сторону треугольника, тогда квадрат, построенный на катете длиной a, разобьётся на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3 и S_4 (рис. 4):

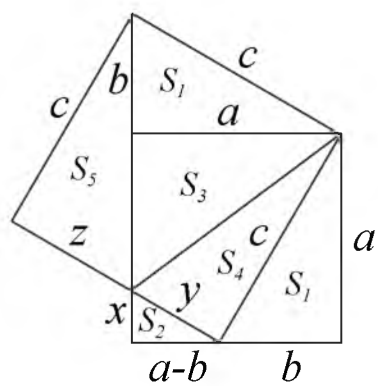

Рис. 4. Рисунок к третьему и четвёртому новым доказательствам теоремы Пифагора

Среди этих треугольников мы видим прямоугольный треугольник с площадью S_1 конгруентный к исходному с длинами сторон a, b и c (доказательство очевидное). Длины катета и гипотенузы прямоугольного треугольника с площадью S_2 и длиной катета разной $a-b$ обозначим, соответственно, x и y. Тогда остальные два прямоугольных треугольника с площадью S_3 и S_4, слагающих квадрат со стороной a, будут иметь длины катетов, соответственно, a и $a-x$; c и y.

Из подобия прямоугольных треугольников следуют соотношения:

$$\frac{x}{a-b}=\frac{b}{a}\Rightarrow x=\frac{(a-b)b}{a}, \quad (10)$$

$$\frac{a-b}{y}=\frac{a}{c}\Rightarrow y=\frac{(a-b)c}{a}. \quad (11)$$

Просуммируем площади всех четырех выше описанных прямоугольных треугольников, слагающих квадрат со стороной a. Тогда получим:

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}(a-b)x+\frac{1}{2}a(a-x)+\frac{1}{2}cy=a^2. \quad (12)$$

Поставляя в выражение (12) формулы (10, 11), получим

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}(a-b)\frac{(a-b)b}{a}+\frac{1}{2}(a^2-ab+b^2)+\frac{1}{2}\frac{(a-b)c^2}{a}=a^2. \quad (13)$$

Алгебраические выкладки с выражением (13) имеют вид

$$a^2b+(a-b)^2b+(a^2-ab+b^2)a+(a-b)c^2=2a^3 \Rightarrow$$

$$a^2b+a^2b-2ab^2+b^3+a^3-a^2b+ab^2+ac^2-bc^2=2a^3 \Rightarrow$$

$$a^2b-ab^2+b^3+a^3+ac^2-bc^2=2a^3 \Rightarrow$$

$$b(a^2+b^2-c^2)+a(c^2-a^2-b^2)=0 \Rightarrow (c^2-a^2-b^2)(a-b)=0. \quad (14)$$

Из тождества (14) следует, что либо $a=b$, либо $c^2=a^2+b^2$, то есть для общего случая, когда $a \neq b$ теорема Пифагора доказана.

Для частного случая она доказывается следующим образом. Построим на сторонах треугольника с равными катетами квадраты, как показано на рисунке 5.

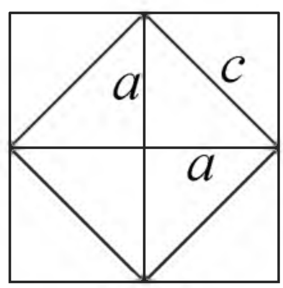

Рис. 5. Рисунок к третьему новому доказательству теоремы Пифагора для частного случая, когда $a=b$

Обозначим площадь исходного прямоугольника с равными катетами через S, тогда $c^2=4S$, $2a^2=4S$, то есть теорема Пифагора для частного случая $a^2+a^2=c^2$ доказана.

Доказательство 4. Рассмотрим теперь квадрат, построенный на гипотенузе длиной c (рис.4). Из подобия треугольников с площадями S_1 и S_5 определим длину катета z: $z=\dfrac{bc}{a}$. Представим площадь квадрата, построенного на гипотенузе длиной c, в виде

$$c^2=S_5+S_1+a^2-S_1-S_2=a^2+S_5-S_2. \quad (15)$$

Поставляя в выражение (15) значения площадей S_1 и S_5 соответствующих прямоугольных треугольников, вычисленные через половинные произведения их катетов, придем к следующим алгебраическим выкладкам

$$c^2=a^2+\frac{bc^2}{2a}-\frac{(a-b)^2b}{2a} \Rightarrow 2c^2a-c^2b=2a^3-a^2b+2ab^2-b^3 \Rightarrow c^2(2a-b)=$$

$$=a^2(2a-b)+b^2(2a-b)\Rightarrow(c^2-a^2-b^2)(2a-b)=0\,. \qquad (16)$$

Из тожества (16) следует, что либо $2a=b$, либо $c^2=a^2+b^2$, то есть для общего случая, когда $2a\neq b$, теорема Пифагора доказана.

Для доказательства частного случая построим рисунок 6.

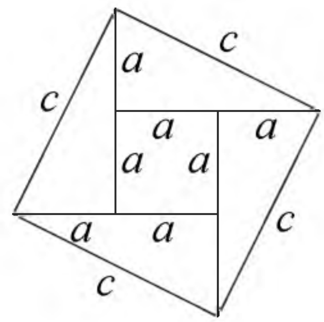

Рис. 6. Рисунок к четвертому новому доказательству теоремы Пифагора для частного случая, когда $2a=b$

Теорема Пифагора для рассматриваемого случая сводится к равенству $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+4a^2=5a^2=c^2$. Из рисунка 6 видим, что квадрат, построенный на гипотенузе с длиной c, слагается из одного квадрата с площадью a^2 и четырех равновеликих прямоугольных треугольников, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{2}a\cdot 2a=a^2$. Следовательно, равенство $5a^2=c^2$ соблюдается. Кстати, рисунок 6 очень хорошо известен из литературы, посвященной теореме Пифагора [1,2]. При стремлении b к a внутренний квадрат на рисунке 6 стягивается к точке и этот рисунок вырождается в рисунок 5. Оба последних доказательства теоремы Пифагора носят алгебраический характер.

Как видим все четыре доказательства, как и большинство других доказательств теоремы Пифагора используют теорему о подобии треугольников. В отличие от известных доказательств наши новые доказательства теоремы Пифагора в двух последних случаях сводятся к случаю, когда произведение двух алгебраических членов равняется нулю. Приравнивание к нулю первого члена сводится к доказательству общего случая теоремы Пифагора, а второго – к частому случаю, который легко доказывается.

Заключение

Рассматривая различные доказательства теоремы Пифагора можно сделать вывод, что основная идея многих доказательств состоит в том, чтобы построить геометрическую фигуру на базе исходного прямоугольного треугольника и посчитать ее площадь двумя различными способами, а потом прийти к тождеству $c^2=a^2+b^2$. Не достающие длины отрезков на этой фигуре обычно определяются из подобия треугольников.

Теорема Пифагора хороший пример для математического образования школьников и студентов, так как количество доказательств здесь не органично. Доказательства этой теоремы различными способами являются очень хорошими алгебро-геометрическими упражнениями. В школах и университетах могут объявляться конкурсы на наибольшее количество доказательств теоремы Пифагора. В этих конкурсах, возможно, будут найдены новые доказательства этой теоремы. Все это может вылиться в некое движение под названием «Пифагореана», что будет очень полезным в деле повышения престижа математического образования среди молодежи.

Список литературы

1. Loomis E.S. 1986. The Pythagorean proposition. Washington: The Nacional Council of Teachers of Mathematics : 310.
2. Sparks J.C. 2008. The Pythagorean Theorem. Crown Jewel of Mathematics. Bloomington: Author House: 186.
3. Cui H.Y. To String together Six Theorems of Physics by Pythagoras Theorem // arXiv: physics / 0205021/V1/ [physics.gen –ph]
4. Orun L.B. The Theory of Relativity and the Pythagorean Theorem // arXiv: 0809.2379 V1 [physics.class – ph]
5. Chambers P. 1999. Teaching Pythagoras Theorem. Mathematics in School, № 4 (28): 22-24.
6. Yanney B.F., Calderhead J.A. 1896. New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. The American Mathematical Monthey, № 4 (3): 110-113
7. Macfarlane A. 1911. The Pythagorean Theorem. Science. New Series, № 887(34): 181-182.
8. Kenney J.M. 1941. New Proofs of the Theorem of Pythagoras. School Science and Mathematics. № 3 (41): 249-254.
9. Spradlin M., Watkins M. 1998. Three New Proofs of the Pythagorean Theorem. Applied Probability Trust: 53-54.
10. Hoehn L. 1997. The Pythagorean Theorem: An Infinite Number of Proofs? The Mathematical Teacher, № 6 (90): 438-441.
11. Swaminathan S. 2014. The Pythagorean Theorem. Biodiversity. Bioprospecting and Development, № 3 (1): 4 .
12. Caglayan G. 2015. Pythagorean Theorem with Hippocrates' Lunes. Spreadsheets in Education, № 2 (8) (article 5): p.
13. Heo N. G. 2015. A New Proof of the Pythagorean Theorem. The American Mathematical Monthly, № 5 (122): 451.