УДК 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРИЭТНИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

MODELING OF INTRAETHNIC EVOLUTIONARY PROCESSES

Р.О. Кенетова
R.O. Kenetova

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 а
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 a, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: raisa.kenetova@mail.ru

Аннотация. В работе впервые с помощью логистических моделей с учетом предыстории описываются внутриэтнические эволюционные процессы на стадии подъема. Чтобы учесть адекватно предысторию или стохастический характер внутриэтнической эволюции приводится математическая модель, основанная на дифференциальном уравнении дробного порядка.

Resume. For the first time using logistic models based on prehistory intraevolutionary processes are described at the stage of recovery. To take into account adequately the background or the stochastic nature in ethnic evolution is a mathematical model based on differential equations of fractional order.

Ключевые слова: синергетика, пассионарность, субпассионарность, внутриэтническая эволюция, теория популяции, логистический закон, закон Мальтуса.
Key words: synergetics, passionarity, subpassionarity, intraethnic evolution, the theory of population, logistics law, Malthusian Law.

Введение

Математическое моделирование на современном этапе представляет собой самостоятельное направление в науке, играет синтезирующую роль, объединяя разные методы и подходы математики, физики, биологии, социологии и вступает в новый этап своего развития, обращаясь к изучению общественных процессов. Изучение развития общества началось с моделирования биосферных процессов Земли. Биосфера получила статус научного предмета благодаря целостному, комплексному подходу к ней, разработанному в трудах В.И. Вернадского [1]. Согласно его теории живое вещество планеты связано с косным веществом посредством биохимической энергии, которую он также называл биогенной миграцией атомов. Эта энергия обеспечивает существование всех живых организмов, запасы которой пополняются за счет солнечной энергии. Модели биосферы строились на основе описания процесса «перетекания» биохимической энергии из одной системы в другую. Жизнь людей также обеспечивается наличием этой энергии. Избыток этой энергии нарушает равновесие в природе, поскольку высвобождение избытка энергии приводит к совершению работы. Вспышки биохимической энергии среди людей называют пассионарными импульсами, т.е. поведенческие импульсы, направленные против инстинкта самосохранения [2].

По соотношению импульсов пассионарности и инстинкта самосохранения все особи разделяют на три типа: 1) пассионарии – особи, пассионарный импульс поведения которых превышает величину импульса инстинкта самосохранения; 2) субпассионарии – особи, пассионарный импульс которых меньше импульса инстинкта самосохранения; 3) гармоничные люди – особи, пассионарный импульс которых равен по величине импульсу инстинкта самосохранения. Количество пассионариев и субпассионариев всегда не превышает нескольких процентов от общего числа членов этноса. Основное большинство людей составляют гармоничные особи. Но именно соотношение пассионариев и субпассионариев определяет состояние этноса. Общее состояние этноса определяется средней характеристикой – пассионарным напряжением, равным отношению количества имеющейся в этносе пассионарий к количеству особей, составляющих этот этнос. В процессе внутриэтнической эволюции на стадии подъема необходимым условием стабилизации межэтнических отношений является гармония межпассионарных отношений.

Реализуемые модели этнических процессов можно получить, если исходить из математической теории борьбы за существование [3].

Этнические системы и процессы, как правило, являются синергетическими, поэтому и методы нового научного направления, названного Г. Хакеном [4] синергетикой, найдут применение при их моделировании.

Рассмотрим процесс внутриэтнической эволюции. Пусть в этносе из $N = N(t)$ человек, живущих в некоторой географической области с определенной системой связи, в момент времени t содержатся $U = U(t)$ пассионариев и $V = V(t)$ субпассионариев. Допустим, что фаза подъема внутриэтнической эволюции начинается в момент времени $t = 0$ и заканчивается при $t = t_m$. Очевидно, что области значения $R(N), R(U), R(V)$ функций N, U, V принадлежат множеству целых чисел. Поэтому, вместо разрывных целочисленных функций N, U, V введем непрерывно дифференцируемые функции $n = n(t), u = u(t), v = v(t),$ имеющие в каждый момент времени те же целые части, что и N, U, V соответственно, т.е. $[n(t)] = N(t), [u(t)] = U(t), [v(t)] = V(t)$ для всех $t \in [0, t_m]$. Будем предполагать, что

$$n(t) = u(t) + v(t), \qquad 0 \le t \le t_m. \tag{1}$$

В теории популяции, в том что числе человеческой, наиболее апробированным законом развития является логистический закон роста [5, с. 103]

$$n'(t) = \mu n(t) - \frac{\mu}{K} n^2(t), \tag{2}$$

где K – емкость среды обитания, μ – коэффициент автоприроста. Уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n(t)}\right) = \frac{\mu}{K} - \frac{\mu}{n(t)}. \tag{3}$$

Уравнение (3) является линейным относительно функции $1/n(t)$ и его единственное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$n(0) = n_0, \tag{4}$$

задается хорошо известной в биологии и медицине формулой

$$n(t) = \frac{n_0 K}{n_0 + (K - n_0)\exp(-\mu t)}. \tag{5}$$

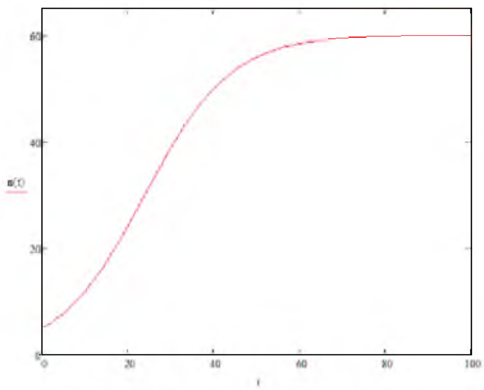

Рис. 1. График функции $n(t)$ при $K = 60, n_0 = 6, \mu = 2, t_m = 100$.
Fig. 1. The graph of the function $n(t)$ at $K = 60, n_0 = 6, \mu = 2, t_m = 100$.

График функции (5) (рис. 1) можно использовать в качестве приближения к реальному закону роста численности этноса на фазе подъема.

Синергетика пассионериев и субпассионариев носит характер сходный со взаимодействием «хищник-жертва». На фазе подъема в качестве жертвы выступают субпассинарии, а в роли хищника – пассионарии. В соответствии с этим уравнения движения могут записаны в виде

$$u'(t) = \mu_1 u - \gamma_1 uv, \qquad v'(t) = -\mu_2 v + \gamma_2 uv, \tag{6}$$

где $0 \le t \le t_m$, μ_1, μ_2 – неотрицательные параметры автоприроста пассионариев и субпассионариев, γ_1, γ_2 – коэффициенты их взаимодействия.

Из системы (6) следует, что если вектор $w = (u, v)$ – решение (6), то

$$\gamma_2[u'(t) - \mu_1 u(t)] = -\gamma_1[v'(t) - \mu_2 v(t)]. \tag{7}$$

Формулы (1) и (5) дают основания записать

$$v(t) = n(t) - u(t), \qquad v'(t) = n'(t) - u'(t). \tag{8}$$

Подставляя формулы (8) в соотношение (7) получим дифференциальное уравнение роста численности пассионариев

$$au'(t) - bu(t) = -\gamma_1[n(t) - \mu_2 n(t)], \tag{9}$$

$$a = \gamma_2 - \gamma_1, \qquad b = \mu_1\gamma_2 + \mu_2\gamma_1. \tag{10}$$

Если суммарная численность $n(t)$ пассионариев и субпассионариев меняется по закону Мальтуса [5, с. 103]

$$n(t) = n_0 \exp(\mu_2 t), \tag{11}$$

то из дифференциального уравнения (9) следует, что пассионарии на фазе подъема растут по экспоненциальному закону

$$u(t) = u(0)\exp\left(\frac{b}{a}t\right). \tag{12}$$

Здесь в формуле (12) естественно предположим, что $\gamma_2 > \gamma_1$, т.е. $a > 0$.

Когда численность этноса меняется по логистическому закону (5) динамику численности пассионариев в силу уравнения (9) определяется формулой

$$u(t) = u(0)\exp\left(\frac{b}{a}t\right) - \frac{\gamma_1}{a}\int_0^t [n'(\tau) - \mu_1 n(\tau)]\exp\left[-\frac{b}{a}(t-\tau)\right]d\tau. \quad (13)$$

Как видно из логистического закона роста (2)

$$\frac{d}{dt}\ln n(t) = \mu - \frac{\mu}{K}n(t),$$

поэтому формула (13) перепишется в виде

$$u(t) = u(0)\exp\left(\frac{b}{a}t\right) - \frac{\gamma_1}{a}\int_0^t n(\tau)[\mu - \mu_1 - \frac{\mu}{K}n(\tau)]\exp\left[-\frac{b}{a}(t-\tau)\right]d\tau. \quad (14)$$

Пусть $t_* \le t \le t^*$ промежуток времени, когда не происходит существенное изменение численности этноса и можно положить, что $n(t)$ совпадает с емкостью K среды обитания. Тогда из соотношения (14) имеем, что

$$u(t) = u(0)\exp\left(\frac{b}{a}t\right) + \frac{\gamma_1\mu_1 K}{a}\int_0^t \exp\left[-\frac{b}{a}(t-\tau)\right]d\tau. \quad (15)$$

Так как при $t_* \le t \le t^*$

$$\frac{1}{a}\int_0^t \exp\left[-\frac{b}{a}(t-\tau)\right]d\tau = \frac{1}{b}\left[\exp\left(-\frac{b}{a}t\right) - 1\right],$$

то из равенства (15) имеем

$$u(t) = u(0)\exp\left(\frac{b}{a}t\right) + \frac{\gamma_1\mu_1 K}{b}\left[\exp\left(-\frac{b}{a}t\right) - 1\right]. \quad (16)$$

Другими словами, при $n(t) = K,$ численность пассионариев меняется по закону (1), который близок к экспоненциальному.

Логистический закон (2) не учитывает адекватно предысторию или стохастический характер внутриэтнической эволюции. Чтобы учесть эти факторы можно воспользоваться вместо дифференциального уравнения (3) следующей математической моделью

$$D_{0t}^{\alpha}\left[\frac{1}{n(n)}\right] + \frac{\mu}{n(t)} = \delta t^{\beta}, \quad (17)$$

где $\alpha, \mu, \delta, \beta$ – постоянные параметры модели, которые характеризуют тот или иной этнос, причем $0 < \alpha < 1, \beta > -1;$ $D_{0t}^{\alpha}u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t u(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}dt$ – оператор дробного дифференцирования порядка α с началом в начальный момент времени $t = 0$ [5, с. 28], $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера.

Относительно функции $z(t) - 1/n(t)$ уравнение (17) является линейным дифференциальным уравнением дробного порядка α:

$$D_{0t}^{\alpha}z(\tau) + \mu z(t) = \delta t^{\beta}, \qquad 0 < t < t_m. \quad (18)$$

Решение уравнения дробного порядка (18), удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0} t^{1-\alpha}z(t) = 0$$

имеет вид [6, с. 92]

$$z(t) = \delta D_{0t}^{-\alpha}\tau^{\beta} - \mu\delta\Gamma(\alpha)D_{0t}^{-\alpha}\{E_{1/2}[-\mu(t-\tau)^{\alpha};\alpha]D_{0\tau}^{-\alpha}\eta^{\beta}\},$$

где $E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера [6, с. 117].

Заключение

В работе впервые с помощью логистических моделей с учетом предыстории описываются внутриэтнические эволюционные процессы на стадии подъема. Приведенные модели могут представлять несомненный интерес хотя бы для ориентировочной оценки численности этноса в периодах подъема.

Список литературы
References

1. Вернадский В.И. 1988. Философские мысли натуралиста. М., Наука.

Vernadsky V.I. 1988. Philosophskie mysli naturalista [Philosophical thoughts naturalist]. Moscow, Nauka.

2. Коробицын В.В. 2001. Моделирование этнических полей. Омск, Вестник Омского государственного университета.

Korobitsin V.V. 2001. Modelirovanie etnicheskikh poley [Modelling of ethnic fields]. Omsk. Bulletin of the Omsk State University.

3. Вольтерра В. 1976. Математическая теория борьбы за существование. М., Наука.

Matematicheskaya teoriya borby za sushestvovanie [The mathematical theory of the struggle for existence]. Moscow, Nauka.

4. Хакен Г. 1980. Синергетика. М., Мир.

Haken G. 1980. Sinergetika[Synergetics]. Moscow, Mir.

5. Нахушев А.М. 1995. Уравнения математической биологии. М., Высшая школа.

Nakhushev A.M. 1995. Uravneniya matematicheskoy biologii [The equations of mathematical biology]. Moscow, Graduate School.

6. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., ФИЗМАТЛИТ.

Nahushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [The fractional calculus and its application]. Moscow, FIZMATLIT.