МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ – СТРУВЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

ON SOLVABILITY OF THE INITIAL PROBLEM FOR BESSEL – STRUVE EQUATION WITH BOUNDED OPERATOR

А.В. Глушак
A.V. Glushak

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@.bsu.edu.ru

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрена задача Коши для уравнения Бесселя-Струве с ограниченным оператором. Указан явный вид разрешающего оператора, который записывается с помощью операторных функций Бесселя и Струве. Установлен ряд свойств полученных решений.

Resume. In a Banach space was considered the Cauchy problem for the Bessel-Struve equation with bounded operator. An explicit form of the solution operator, which is recorded using the operator functions of Bessel and Struve, was indicated. A number of solution's properties was considered.

Ключевые слова: уравнение Бесселя-Струве, абстрактная задача Коши, операторные функции Бесселя и Струве.

Keywords: Bessel-Struve equation, abstract Cauchy problem, the operator of Bessel and Struve functions.

Введение

Пусть A – замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k>0$ рассмотрим абстрактное уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \qquad t>0. \tag{1}$$

Как следует из результатов работ [1, 2, 3], корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (1) состоит в задании в точке $t=0$ начальных условий

$$u(0)=u_0, \qquad u'(0)=0, \tag{2}$$

при этом, если $k\geq 1$, то начальное условие $u'(0)=0$ снимается, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t=0$.

В работах [1, 2] приводятся также и условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1) , (2). В [2] они сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda, A)$ оператора A и ее весовых производных, а в [1] – в терминах дробной степени резольвенты и ее обычных производных.

Множество операторов A, с которыми задача (1) , (2) равномерно корректна, обозначим через G_k , а разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Y_k(t)$ и назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ).

Если $0<k<1$, то корректна более общая постановка начальных условий. Рассмотрим начальные условия вида

$$u(0)=u_0, \qquad \lim_{t\to 0} t^k u'(t)=u_1. \tag{3}$$

ОФБ $Y_k(t)$ может быть использована и при решении весовой задачи Коши (1) , (3) для уравнения ЭПД. При $u_0, u_1 \in D(A)$ и $A\in G_k \subset G_{2-k}$ единственное решение задачи Коши (1), (3) имеет вид (см. [3])

$$u(t)=Y_k(t)u_0+\frac{1}{1-k}t^{1-k}Y_{2-k}(t)u_1.$$

Заметим (см. [3]), что если $A\in G_k$ и $k\ge 1$, то задача (1), (3) корректной не является.

В настоящей работе мы рассмотрим уравнение

$$u''(t)+\frac{k}{t}\bigl(u'(t)-u'(0)\bigr)=Au(t), \qquad t>0, \tag{4}$$

которое, в отличие от уравнения (1), содержит значение производной неизвестной функции в точке $t=0$. Скалярное уравнение вида (4) называется уравнением Бесселя-Струве и встречалось ранее в работах [4, 5]. Уравнение (4), следуя [6, 7, 8], можно также назвать слабо нагруженным уравнением ЭПД. Растущий интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется расширяющимся объемом их приложений и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс функционально-дифференциальных уравнений со своими специфическими задачами. Обзор публикаций по нагруженным дифференциальным уравнениям можно найти в монографиях [6, 7, 8].

Важно отметить, что наличие в уравнении (4) заданной при $t=0$ нагрузки меняет постановку начальной задачи. В отличие от весовой задачи (1), (3) при $k>0$ мы установим корректность задачи Коши

$$u(0)=u_0, \qquad u'(0)=u_1 \tag{5}$$

для уравнения Бесселя-Струве (4) и, предполагая ограниченность оператора A, укажем явный вид разрешающего оператора этой задачи, а также формулы связи разрешающего оператора с C_0-полугруппами.

Основные результаты

Для ограниченного оператора A определены операторная функция

$$Y_k(t)\equiv Y_k(t;A)=\Gamma(k/2+1/2)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(t^2A/4\right)^j}{j!\,\Gamma(j+k/2+1/2)}=\Gamma(k/2+1/2)\left(t\sqrt{A}/2\right)^{1/2-k/2}I_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{A}\right),$$

где $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя, и операторная функция

$$L_k(t)\equiv L_k(t;A)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(k/2+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t\left(t^2A/4\right)^j}{\Gamma(j+3/2)\,\Gamma(j+k/2+1)}=\frac{2^{k/2-1/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}{A^{k/4+1/4}t^{k/2-1/2}}\mathbf{L}_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{A}\right),$$

где $\mathbf{L}_\nu(z)$ – модифицированная функция Струве (см. [9], с. 655). Операторная функция $Y_k(t)$ была названа ОФБ, а операторную функцию $L_k(t)$ мы будем называть операторной функцией Струве (ОФС).

Отметим непосредственно проверяемые формулы связи между ОФБ и ОФС

$$L_k(t)=\int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}Y_k(\xi)\,d\xi,$$

$$L_k(t)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)}\int_0^t {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2};1;1-\frac{t^2}{\xi^2}\right)Y_k(\xi)\,d\xi,$$

где ${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, а также при $k=2\alpha>2$, вытекающее из теоремы 17 [10] обратное соответствие

$$Y_k(t)=\frac{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}\,t^\alpha}\left(C_\alpha(t)-\int_0^1 \frac{dP_{\alpha-1}(\xi)}{d\xi}C_\alpha(t\xi)\,d\xi\right),$$

где $P_\alpha(t)$ – сферическая функция Лежандра (см. [11], с. 205),

$$C_\alpha(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left(L_{2\alpha-2}(t)-\int_t^\infty \frac{dP_{\alpha-2}(s)}{ds}s^{-\alpha}L_{2\alpha-2}(t/s)\,ds\right).$$

В частности, справедливы равенства

$$L_0(t)=tY_2(t),\qquad L_2(t)=\frac{2t}{3}Y_4(t)+\frac{2}{3t}\int_0^t sY_4(s)\,ds,\qquad Y_4(t)=\frac{3}{2t}L_2(t)-\frac{3}{2t^3}\int_0^t sL_2(s)\,ds,$$

$$L_4(t)=\frac{8t}{15}Y_6(t)+\frac{8}{5t}\int_0^t sY_6(s)\,ds-\frac{4}{5t^3}\int_0^t s\left(t^2-s^2\right)Y_6(s)\,ds.$$

Для построенных ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$ справедливы формулы сдвига по параметру. Если $A\in G_k$ и $Y_k(t)$ – ОФБ задачи (1), (2), то в [1, 2] доказано, что в этом случае также $A\in G_m$ и для $m>k\ge 0$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид

$$Y_m(t)=\frac{2}{B(k/2+1/2,m/2-k/2)}\int_0^1 s^k\left(1-s^2\right)^{(m-k)/2-1}Y_k(ts)\,ds,$$

где $B(a,b)$ – бета-функция Эйлера.

Аналогично устанавливается и формула сдвига по параметру для ОФС $L_k(t)$. При $m>k\ge 0$ имеет место равенство

$$L_m(t)=\frac{2}{B(k/2+1,m/2-k/2)}\int_0^1 s^k\left(1-s^2\right)^{(m-k)/2-1}L_k(ts)\,ds.$$

ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$ позволяют записать явный вид разрешающего оператора задачи (4), (5).

Теорема 1. Пусть $k>0$, $u_0,u_1\in E$ и оператор A является ограниченным. Тогда функция $u(t)=Y_k(t)u_0+L_k(t)u_1$ является единственным решением задачи Коши (4), (5).

Доказательство. Тот факт, что функция $u(t)=Y_k(t)u_0+L_k(t)u_1$ является решением задачи (4), (5) проверяется непосредственно, а единственность решения этой задачи фактически установлена в [1, 2].

Приведем далее еще легко проверяемые свойства ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$. Для $u_0, u_1 \in E$ справедливы соотношения

$$\frac{dY_k(t)u_0}{dt} = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t) A u_0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{d^2 Y_k(t) u_0}{dt^2} = \frac{1}{k+1} A u_0,$$

$$\frac{dL_k(t)u_1}{dt} = \frac{t}{k+2} L_{k+2}(t) A u_1 + u_1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{d^2 L_k(t) u_1}{dt^2} = 0.$$

Укажем далее формулы, позволяющие выразить полугруппу $T(t) = e^{tA}$, порожденную ограниченным оператором A через операторные функции Бесселя и Струве. При этом мы будем использовать следующие обозначения: $\Psi(a,b;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми (см. [9], с. 365, [11], с. 309) и $D^{\beta}_{0+}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}} d\tau$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\beta \in (0,1)$.

Теорема 2. Пусть $k > 0$ и оператор A ограничен. Тогда справедливы представления

$$T(t) = \frac{1}{2^k \Gamma(k/2+1/2)\, t^{k/2+1/2}} \int_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k(s)\, ds, \tag{6}$$

$$T(t) = \frac{1}{2^k \sqrt{\pi}\, \Gamma(k/2+1)} D^{1/2}_{0+} \left(t^{-k/2-1/2} \int_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) L_k(s)\, ds \right), \tag{7}$$

$$T(t) = \frac{1}{2^k \sqrt{\pi}\, \Gamma(k/2+1)\, t^{k/2+1}} \int_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \Psi\left(-\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right) L_k(s)\, ds. \tag{8}$$

Доказательство. Представление (6) установлено в [1, 2]. Покажем, что для этой полугруппы справедливы также и представления (7), (8).

Отметим вначале, что $D^{1/2}_{0+} t^{-1/2} = 0$ и найдем следующую дробную производную

$$D^{1/2}_{0+}\left(t^{-k/2-1/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\right) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{-k/2-1/2} (t-\tau) \exp\left(-\frac{s^2}{4\tau}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_{1/t}^\infty \xi^{k/2-1} \left(\xi - \frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{s^2 \xi}{4}\right) d\xi = \frac{d}{dt}\left(t^{-k/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \Psi\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right)\right) =$$

$$= t^{-k/2-1} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \Psi\left(-\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right), \tag{9}$$

при этом мы использовали интеграл 2.3.6.6 [12] и формулу 7.2.2.41 [9] для дифференцирования вырожденной гипергеометрической функции Трикоми.

Асимптотика вырожденной гипергеометрической функции Трикоми (см. [11], § 9.12) и равенство (9) позволяют внести производную $D^{1/2}_{0+}$ под знак интеграла в равенстве (7), поэтому представление (8) является непосредственным следствием равенства (7), к доказательству которого мы и переходим.

Используя тот факт, что при $x \in E$ функция $L_k(t)x$ удовлетворяет задаче (4), (5), убедимся, что правая часть равенства (7) является решением задачи Коши

$$v'(t) = Av(t), \qquad v(0) = x. \tag{10}$$

Действительно, после элементарных преобразований получим

$$AT(t)x=\frac{1}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}D_{0+}^{1/2}\left(t^{-k/2-1/2}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)AL_k(s)x\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}D_{0+}^{1/2}\left(t^{-k/2-1/2}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(\frac{d^2L_k(s)x}{ds^2}+\frac{k}{s}\frac{dL_k(s)x}{ds}-\frac{k}{s}x\right)ds\right)=$$

$$=\frac{1}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}D_{0+}^{1/2}\left(t^{-k/2-1/2}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(\frac{d^2L_k(s)x}{ds^2}+\frac{k}{s}\frac{dL_k(s)x}{ds}\right)ds-2\Gamma(k/2+1)t^{-1/2}\right)=$$

$$=\frac{t^{-k/2-1}}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)\left(\frac{d^2L_k(s)x}{ds^2}+\frac{k}{s}\frac{dL_k(s)x}{ds}\right)ds=$$

$$=\frac{t^{-k/2-2}}{2^{k+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\int_0^\infty s^{k+1}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)-\Psi'\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)\right)\frac{dL_k(s)x}{ds}ds=$$

$$=\frac{t^{-k/2-2}}{2^{k+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\int_0^\infty\left(s^k\left(\frac{s^2}{2t}-k-1\right)\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)-s^k\left(\frac{s^2}{2t}-k-1\right)\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\Psi'\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{s^{k+2}}{2t}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\Psi''\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)L_k(s)x\,ds\right), \tag{11}$$

$$T'(t)x=\frac{t^{-k/2-1}}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(s^k\left(\frac{s^2}{4t}-\frac{k+2}{2t}\right)\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)-\frac{s^{k+2}}{4t^2}\Psi'\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)\right)L_k(s)x\,ds. \tag{12}$$

Вычитая (11) из (12), будем иметь

$$AT(t)x-T'(t)x=\frac{t^{-k/2-2}}{2^{k+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(-\frac{s^2}{2t}\Psi''\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{s^2}{2t}-\frac{k+1}{t}\right)\Psi'\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)-\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)\right)L_k(s)x\,ds. \tag{13}$$

Вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми $\Psi(a,b;z)$ является решением дифференциального уравнения ([11], с. 312) $zw''(t)+(b-z)w'zt)-aw(z)=0$, следовательно, функция $\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)$ удовлетворяет равенству

$$-\frac{s^2}{2t}\Psi''\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)+\left(\frac{s^2}{2t}-\frac{k+1}{t}\right)\Psi'\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)-\Psi\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)\Bigg)=0. \tag{14}$$

Из соотношений (13), (14) вытекает справедливость равенства $T'(t)x=AT(t)x.$

Проверим теперь, что $T(t)x$ удовлетворяет условию $T(0)x=x.$ Для этого вычислим предел

$$\lim_{t\to0}T(t)x=\lim_{t\to0}\frac{1}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}D_{0+}^{1/2}\left(t^{-k/2-1/2}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)L_k(s)\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\lim_{t\to0}D_{0+}^{1/2}\left(\int_0^\infty\tau^{(k-1)/2}e^{-\tau}\left(2\sqrt{t\tau}+O\left((t\tau)^{3/2}\right)\right)x\,d\tau\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)}\lim_{t\to0}D_{0+}^{1/2}\left(t^{1/2}\int_0^\infty\tau^{k/2}e^{-\tau}x\,d\tau\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to0}D_{0+}^{1/2}\,t^{1/2}x=x.$$

Отсюда, в силу теоремы единственности для решения задачи (10), и следует представление (7). Теорема доказана.

В заключение приведем еще одну формулу, связывающую полугруппу e^{tA_0} ограниченного оператора A_0 и операторные функции $Y_k(t;A_0^2)$ и $L_k(t;A_0^2)$.

Теорема 3. Пусть $k>0$ и оператор A_0 ограничен. Тогда справедливо представление

$$\int_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} e^{tsA_0}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)}{2\Gamma(k/2+1/2)} Y_k(t;A_0^2) + \frac{1}{k} A_0 L_k(t;A_0^2).$$

Доказательство. Учитывая частные значения гипергеометрической функции (см. формулы 7.13.1.1, 7.14.1.11 в [7]) и определение функций $Y_k(t;\lambda^2)$, $L_k(t;\lambda^2)$, требуемое представление вытекает из равенства (см. формулу 2.3.7.1 [9]). Действительно,

$$\int_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} e^{ts\lambda}\, ds = \frac{1}{2} B\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right) {}_1F_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{t^2\lambda^2}{4}\right) + \frac{t\lambda}{2} B\left(\frac{k}{2},1\right) {}_1F_2\left(1;\frac{3}{2},\frac{k}{2}+1;\frac{t^2\lambda^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)}{2\Gamma(k/2+1/2)} Y_k(t;\lambda^2) + \frac{\lambda}{k} L_k(t;\lambda^2), \qquad (15)$$

откуда, в силу соответствия между аналитическими функциями из равенства (15) и операторными функциями e^{tA_0}, $Y_k(t;A_0^2)$, $L_k(t;A_0^2)$, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $k>0$, $p\geq 0$, $w_0\in E$ и оператор A_0 ограничен. Тогда функция

$$w(t) = \frac{2\Gamma(k/2+p+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+p)} t^p \int_0^1 (1-s^2)^{k/2+p-1} e^{tsA_0} w_0\, ds$$

является решением задачи

$$w''(t) + \frac{k}{t} w'(t) - (k+2p) t^{p-1} \lim_{t\to 0}\left(\frac{w(t)}{t^p}\right)' = A_0^2 w(t), \qquad t>0, \qquad (16)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t^p} = w_0, \qquad \lim_{t\to 0}\left(\frac{w(t)}{t^p}\right)' = \frac{\Gamma(k/2+p+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+p+1)} A_0 w_0. \qquad (17)$$

В частности, при $p=0$ задача (16), (17) превращается в задачу (4), (5) для уравнения Бесселя-Струве при $A=A_0^2$ и $u_0=w_0$, $u_1=\dfrac{\Gamma(k/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+1)} A_0 w_0$.

Настоящая публикация примыкает и продолжает исследования, начатые в [13] для нагруженных сингулярных уравнений дробного порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197 А-2016.

Список литературы
References

1. Глушак А.В. 2015. Начальная задача для нагруженного сингулярного уравнения дробного порядка. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, № 11(208). Вып. 39.: 13 – 22.
Glushak A.V. 2015. The initial value problem for loaded singular equations of fractional order. Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics. Physics., № 11(208). V. 39: 13 – 22. (in Russian)
2. Глушак А.В., Покручин О.А. 2016. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Дифференц. уравнения, 52 : 41–59.
Glushak A.V., Pokruchin O.A. 2016. Criterion for the solvability of the Cauchy problem for an abstract Euler-Poisson-Darboux Equation. Differential equations, 52 : 39–57. (in Russian)

3. Глушак А.В. 1997. Операторная функция Бесселя. ДАН, 352(5) : С. 587 – 589.

Glushak A.V. 1997. The Bessel operator function. Dokl. Ross. Akad. Nauk, 352 (5) : 587 – 589. (in Russian)

4. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. 1986. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши. Известия ВУЗов. Матем, 6 : 55 – 56.

Glushak A.V., Kononenko V.I., Shmulevich S.D. 1986. On a singular abstract Cauchy problem. Transition News VUZ. Mat, 6: 55 – 56. (in Russian)

5. Дженалиев М.Т. 1995. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теор. и прикл. матем.

Dzhenaliev M.T. 1995. On the theory of linear boundary value problems for the loaded differential equations. Almaty: Institute of theor. J. Mat. (in Russian)

6. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. 2010. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы, FЫЛЫМ.

Dzhenaliev M.T, Ramazanov M.I. 2010. To the loading of the equation as a perturbation of differential equations. Almaty, FYLYM. (in Russian)

7. Лебедев Н.Н. 1963. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз.

Lebedev N.N. 1963. Special functions and their applications. M ., Fizmatgiz. (in Russian)

8. Нахушев А.М. 2012. Нагруженные уравнения и их применение. М.,Наука.

Nahushev A.M. 2012. Loaded equations and their applications. M ., Nauka. (in Russian)

9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. 1986. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., Наука.

Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., and Marichev O.I. 1986. Integrals and series. Supplementary chapters. Moscow, Nauka. (in Russian)

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. 1981. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука.

Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., and Marichev O.I. 1981. Integrals and series. Elementary functions. Moscow, Nauka. (in Russian)

11. Kamoun L., Sifi M. 2005. Bessel-Struve Intertwining operator and generalized Taylor series on the real line, Integral transforms and special functions, 16: 39 – 55.

12. Kamoun L., Negzaoui S. Sonine transform associated to Bessel-Struve operator, arXiv:1011.5394v1.

13. Sitnik S.M. 2010-2012. Transmutations and Applications: a survey. arXiv:1012.3741 : 141.