УДК 517.53

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ КЛАССОВ $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$

ON ANALITICAL FUNCTIONS CLASSES $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$

И.В. Оганисян
I.V. Hovhannisyan

Национальный Политехнический Университет Армении, Армения 0082, Ереван, ул. Киликия 6, 4
National Polytechnic University of Armenia, 6, Kilikia 4 st., Yerevan, 0082, Armenia

E-mail: ishkhanh@gmail.com

Аннотация. Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана-Лиувилля, М.М. Джрбашян обобщил класс Р. Неванлинны $N_0 \equiv N$ мероморфных в единичном круге функций, определив классы N_α и произведения B_α, $-1<\alpha<+\infty$. В работе приведены две теоремы о граничных свойствах ограниченных аналитических функций специального вида из классов $N_\alpha \subset N_0$ при $-1<\alpha<0$ и одно интегральное представление для аналитических функций классов $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$.

Resume. Using the Reimann-Liouville integration-differentiation operator M. M. Djrbashyan generalized the class of R. Nevanlinna's meromorphic functions $N_0 \equiv N$ in the unit circle by including classes N_α and products B_α, $-1<\alpha<+\infty$. In this work we prove two theorems about boundary properties of bounded analytic functions of special type from classes $N_\alpha \subset N_0$, with $-1<\alpha<0$ and one integral representations for analytic functions in classes $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$.

Ключевые слова: оператор интегродифференцирования Римана-Лиувилля, произведение Джрбашяна, емкость множества, класс Р. Неванлинны, коэффициенты Тейлора, интегральное представление.

Keywords: Riemann-Liouville integration-differentiation operator, Djrbashyan product, set capacity, Nevanlinna class, Taylor coefficients, integral representation.

Введение

М.М. Джрбашяном ([1, глава IX]) введены в рассмотрение классы $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ определяется посредством α -характеристики

$$T_\alpha(r,F)=m_\alpha(r,F)+N_\alpha(r,F)$$

как множество таких мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\{T_\alpha(r,F)\}<+\infty .$$

При этом функции $m_\alpha(r,F)$, $N_\alpha(r,F)$ и $T_\alpha(r,F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r,F)$, $N(r,F)$ и $T(r,F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha=0$ так, что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha \subset N_0 = N,\ (-1<\alpha<0) .$$

Оператор интегродифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1<\alpha<+\infty$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ \ (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^0\left\{\varphi(r)\right\}=\varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\left\{\varphi(r)\right\}\ \ (-1<\alpha<0).$$

Множество аналитических функций класса N_α обозначаем через A_α. Для $f(z)\in A_\alpha$ функция $T_\alpha(r,f)$ определяется следующим образом:

$$T_\alpha(r,f)=\int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\max\left\{D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\};0\right\}.$$

Известно, что (см. [1, 2]) аналитическая функция класса N_α имеет вид

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\}, \tag{1}$$

где γ - произвольное вещественное число; λ - произвольное натуральное число; $k_\alpha=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$; $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi;\pi]$,

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},\ W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\overline{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1. \tag{2}$$

Классы $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ определяются как множество аналитических функций $f(z)$ из N_α, для которых в представлении (1) $\psi(\theta)$ - невозрастающая функция.

Как известно, класс $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$ является некоторым подмножеством ограниченных аналитических функций класса $N_\alpha\ (-1<\alpha<0)$, причем для тейлоровских коэффициентов имеет место следующая оценка [2].

$$\left|\hat f(n)\right|=O\left(n^\alpha\right),\ n\to\infty,\ f(z)\in A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right) \tag{3}$$

В работе [3] для этих функций получена следующая оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat f(n)\right|^2 n^{-\alpha}<+\infty,\ f(z)\in A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right). \tag{4}$$

С другой стороны, для любой функции $f(z)\in A_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ известна неулучшаемая оценка [2]

$$\left|\hat f(n)\right|\le\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ \ n\to\infty. \tag{5}$$

В дальнейшем, существенным образом будет использоваться следующее утверждение [4]:

Теорема А. Пусть $f(z)\in A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$, тогда для любого β из интервала $(\alpha,0)$ функция $f(z)-\chi$ принадлежит классу A_β для всех $\chi\left(|\chi|<1\right)$, кроме, быть может, некоторого множества E значений χ, $\gamma=1$ емкость которого равна нулю.

Вообще, для любой ограниченной аналитической в $|z|<1$ функции $f(z)$, не принимающей там значение a, справедливо неравенство [5]:

$$\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-a\right|\geq \exp\left\{-\frac{A}{1-r}\right\}, \tag{6}$$

где A - некоторая положительная константа.

С другой стороны, исходя из того, что класс ограниченных аналитических в $|z|<1$ функций является подмножеством класса Харди H^2, имеем, что для любой ограниченной аналитической функции справедливо неравенство

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)-f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d(\theta)=0,$$

где

$$f\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to 1-0} f\left(re^{i\theta}\right).$$

Используя оценку (3) в работе [6] доказано следующее утверждение.

Теорема В. Пусть $f(z)\in A_\alpha^*\left(-1<\alpha<-\frac{1}{2}\right)$, тогда

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)-f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta=o(1-r)^\beta,$$

где β любое число из интервала $(0;-2\alpha-1)$.

В этой работе, используя оценки тейлоровских коэффициентов, получены граничные свойства для функций класса $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$ а также интегральное представление для функций класса $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$.

Основные результаты

В следующем утверждении улучшается оценка теоремы В.

Теорема 1. Пусть функция

$$f(z)=\sum_{n=a}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$, тогда

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)-f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta=o(1-r)^\beta,$$

где β любое число из интервала $(0;-\alpha)$.

Доказательство. Имеем

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)-f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\left(1-r^n\right)^2=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2\left(1-r^n\right)^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|^2\left(1-r^n\right)^2.$$

Для оценки величины $I(r)$ возьмем $N=\left[\frac{1}{1-r}\right]$, $0<\beta<-\alpha<1$ и, используя очевидные неравенства,

$$1-r^n\leq n(1-r),\quad 1-r^n<1,$$

получим

$$I(r)\leq(1-r)^2\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 n^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|^2\leq(1-r)^2\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 n^\beta n^{2-\beta}+(1-r)^\beta\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|^2 n^\beta\leq$$

$$\leq(1-r)^\beta\left\{\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 n^\beta\left(\frac{n}{N}\right)^{2-\beta}+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|^2 n^\beta\right\}.$$

Используя (4), получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 n^{\beta}<\infty,\ \beta\in(0;-\alpha).$$

Для завершения доказательства остается показать, что при $r\to 1-0$ выражение в скобках можно сделать сколь угодно малым. На самом деле, для данного $\varepsilon>0$ можно выбрать $N=\left[\frac{1}{1-r}\right]$ таким, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|^2 n^{\beta}<\varepsilon.$$

Далее, вновь используя (4), получим

$$\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 n^{\beta}\left(\frac{n}{N}\right)^{2-\beta}=\frac{1}{N^{2-\beta}}\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 n^2=\frac{1}{N^{2-\beta}}\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 n^{-\alpha}n^{2+\alpha}\le$$
$$\le\frac{N^{2+\alpha}}{N^{2-\beta}}\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 n^{-\alpha}\le C\cdot N^{\alpha+\beta}.$$

По условию теоремы имеем $\alpha+\beta<0$. Значит N можно выбрать и так, чтобы выполнялось также следующее неравенство.

$$\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 n^{\beta}\left(\frac{n}{N}\right)^{2-\beta}<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема является усилением оценки (6) для специальных ограниченных, аналитических функций – из класса $A_{\alpha}^{*}\,(-1<\alpha<0)$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ - любая функция класса $A_{\alpha}^{*}\,(-1<\alpha<0)$, не принимающая в $|z|<1$ значение a. Тогда существует такая положительная константа A, что оценка

$$\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-a\right|\ge\exp\left\{-\frac{A}{(1-r)^{1+\beta}}\right\},\ \alpha<\beta\le 0$$

справедлива для всех таких a, кроме, быть может, некоторого множества E значений a, $\gamma=1$ емкость которого равна нулю.

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $A_{\alpha}^{*}\,(-1<\alpha<0)$ и не принимает значение a. Тогда, согласно теореме А, кроме, быть может, некоторого множества E значений a, $\gamma=1$ емкость которого равна нулю, функция $f(z)-a$ принадлежит классу A_{β} для любого β из интервала $(\alpha,0)$. Так как $f(z)\ne a$, то, используя соотношение α - равновесия для α - характеристической функции [1]:

$$T_{\alpha}(\rho;F)=T_{\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)+\frac{\log|C_{\lambda}|}{\Gamma(1+\alpha)}\ \ (0<\rho<1),$$

получим, что ограниченную β - характеристику имеет также и функция

$$\frac{1}{f(z)-a}.$$

Значит, она принадлежит классам A_{β} для любого β из интервала $(\alpha,0)$.

Применим для гармонической функции

$$\log\frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-a\right|}$$

обобщенную формулу Пуассона [1].

$$log\frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-a\right|}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}P_{\beta}\left(\varphi-\theta;\frac{r}{\rho}\right)\rho^{-\beta}D^{-\beta}log\frac{1}{\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)-a\right|}d\theta,$$

$$0 \le r < \rho < 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

где, имея в виду (2),

$$P_\beta\left(\varphi-\theta;\frac{r}{\rho}\right) = \operatorname{Re} S_\beta\left(e^{-i\theta}\frac{re^{i\varphi}}{\rho}\right) = \Gamma(1+\beta)\left\{\operatorname{Re}\frac{2\left(\rho e^{i\theta}\right)^{1+\beta}}{\left(\rho e^{i\theta}-re^{i\varphi}\right)^{1+\beta}}-1\right\},$$

получим

$$\log\frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-a\right|} \le \frac{\Gamma(1+\beta)}{2\pi}\left(\frac{2}{(\rho-r)^{1+\beta}}+1\right)\times\int_0^{2\pi}\rho^{-\beta}D_{(+)}^{-\beta}\log\frac{1}{\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)-a\right|}d\theta. \tag{7}$$

Учитывая, что функция $\frac{1}{f(z)-a}$ принадлежит классу A_β, $\beta\in(\alpha,0)$ и, следовательно, имеет ограниченную β - характеристику, получим

$$\sup_{0<\rho<1}\frac{\rho^{-\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_{(+)}^{-\beta}\log\frac{1}{\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)-a\right|}d\theta =$$

$$= \sup_{0<\rho<1} m_\beta\left(\rho;\frac{1}{f(z)-a}\right) \equiv \sup_{0<\rho<1} T_\beta\left(\rho;\frac{1}{f(z)-a}\right) < \infty.$$

Учитывая вышеуказанное, и переходя к пределу в неравенстве (7) при $\rho\to 1$, получим

$$\log\frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-a\right|} \le \frac{A}{(1-r)^{1+\beta}},$$

где A - некоторая положительная константа.
Теорема доказана.

Теорема 3. Если функция $f(z)$ принадлежит классу $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, то существует функция $\phi_\alpha(t)\in L_2$ такая, что имеет место следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\varphi_\alpha(t)\exp\left\{C\cdot S_\alpha\left(\bar{t}z\right)\right\}\frac{dt}{t},\quad |z|<1.$$

Доказательство. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n \in A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$.

Рассмотрим функцию

$$F_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{C}{2}S_\alpha(z)\right\} = \exp\left\{-\frac{C}{2}\Gamma(1+\alpha)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{C\,\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}\right\},$$

где $C > \frac{C_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Как известно [2], оценка (5) достигается для функции $F_\alpha(z)\in A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$. Следовательно,

$$F_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{C}{2}S_\alpha(z)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(\alpha)}z^n,$$

где

$$b_n^{(\alpha)} = \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\sqrt[\alpha+2]{C\,\Gamma(2+\alpha)n^{1+\alpha}}\,(1+o(1))\right\},\ n\to\infty.$$

Поэтому, из неравенства $C_\alpha < C\cdot\Gamma(1+\alpha)$, следует, что существует натуральное число N_α, такое, что при $n > N_\alpha$ имеет место неравенство

$$n|a_n| \le n \cdot \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1} \cdot \sqrt[\alpha+2]{C_\alpha (1+\alpha) n^{1+\alpha}}\,(1+o(1))\right\} <$$

$$< \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1} \cdot \sqrt[\alpha+2]{C \cdot \Gamma(2+\alpha) n^{1+\alpha}}\,(1+o(1))\right\} = b_n^{(\alpha)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\phi_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b_n^{(\alpha)}} z^n, |z| < 1,$$

которая принадлежит классу H^2, так как

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\phi_\alpha\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\alpha_n}{b_n^{(\alpha)}}\right|^2 < \infty.$$

Следовательно, по теореме Фихтенгольца, она представима интегралом Коши по своим угловым граничным значениям $\phi_\alpha\left(e^{i\theta}\right)$:

$$\phi_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi_\alpha\left(e^{i\theta}\right)}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta, \ |z| < 1.$$

То есть

$$\frac{a_n}{b_n^{(\alpha)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_\alpha\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta,$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_\alpha\left(e^{i\theta}\right) \left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\alpha)} \left(e^{-i\theta} z\right)^n\right\} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \phi_\alpha(t) \exp\left\{\frac{C}{2} S_\alpha(\bar{t} z)\right\} \frac{dt}{t}, \ |z| < 1.$$

Теорема доказана.

Отметим, что доказанное представление для значений параметра $\alpha \in (-1;0]$ получено С.С. Степаняном [7].

Список литературы
References

1. Джрбашян М.М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области М., Наука, 672.

Djrbashyan M. M. 1966. Integral transformations and representations of functions on the complex domain. M., Nauka, 672.

2. Джрбашян М.М., Захарян В.С. 1993. Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. -М.,Наука, 224.

Djrbashyan M.M., Zakaryan V.S. 1993. Classes and boundary properties of functions meromorphic in a circle. - M.: Nauka, 1993. P. 224.

3. Захарян В.С., Оганисян И.В. 2014. О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций. ДНАН РА, 114 (3) : 192-197.

Zakaryan V.S., Hovhannisyan I.V. 2014. On Taylor coefficients of a class of functions analytic in a circle. DNAN RA, 114 (3): 192-197.

4. Захарян В.С. 1969. О радиальном изменении и распределении значений одного класса аналитических и ограниченных в единичном круге функций. Изв. АН Арм ССР, Математика, N5: 305-318.

Zakaryan V.S. 1969. On radial variation and distribution of values of functions from a class analytic and bounded in unit circle. IAN Arm SSR, Matematika. No 5 : 305-318.

5. Оганисян И.В., Унанян А.Г. 2005. О свойствах аналитических в круге функций из обобщенных классов А. Островского. Математика в высшей школе, 1 (3) : 80-84.

Hovhannisyan I.V., Hunanyan A.G. 2005. On properties of analytic in circle functions from Ostrovsky's generalized classes. Mathematics in High School, 1 (3): 80-84.

6. Степанян С.С. 1984. Интегральные представления функций классов A_α и $H_p(\alpha)$. Кандидатская диссертация, Ереван, 71.

Stepanyan S.S. 1984. Integral representations of functions of classes A_α and $H_p(\alpha)$. PhD Thesis, Yerevan, 71.

7. Carleson L. 1950. On a class of meromorphic functions and its associeted exeptional sets. Thesis, University of Uppsala: 1950 : 78.