УДК 517.951

СПЕКТРАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

SPECTRAL CLASSIFICATION OF SOME SYSTEMS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Д.В. Корниенко
D.V. Kornienko

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», Россия, 399770, Елец, ул. Коммунаров, д. 28
Bunin Yelets State University, Kommunarov St., 28, Eletz, 399770, Russia

E-mail: dmkornienko@mail.ru

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов, порождаемых квазиэллиптическими системами первого и второго типа соответственно, изучены свойства спектра. В случае условий периодичности последовательность собственных вектор-функций квазиэллиптического дифференциального оператора первого типа образует ортонормированный базис; последовательность собственных вектор-функций квазиэллиптического дифференциального оператора второго типа либо не полна, либо образует базис Рисса, который заведомо не является ортонормированным базисом.

Resume. For closed differential operators generated by quasi-elliptic systems of the first and second type, respectively, studied the properties of the spectrum. In the case of the conditions of the periodicity of the sequence of the eigenvector-functions of quasi-elliptic differential operator of the first type forms an orthonormal basis; the sequence of the eigenvector-functions of quasi-elliptic differential operator of the second type are either not full, or forms the basis of Riesz, that is certainly not an orthonormal basis.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, базис, ортогональный базис, базис Рисса.

Key words: system of differential equations, boundary value problems, closed operators, spectrum, basis, orthogonal basis, a Riesz basis.

Введение

Работа посвящена спектральному анализу дифференциальных операторов, порождаемых граничной задачей для однотипных систем

$$D_t u^1 - B(D_x)u^2 = f^1, \quad D_t u^2 + B(D_x)u^1 = f^2 \tag{1}$$

$$-D_t u^1 + B(D_x)u^2 = f^1, \quad D_t u^2 + B(D_x)u^1 = f^2 \tag{2}$$

линейных дифференциальных уравнений в частных производных, рассматриваемых в ограниченной области конечномерного евклидова пространства $\Re^{1+m}_{t\,x} = \Re_t \times \Re^m_x$. Здесь

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t};\; B(D_x) = \sum_{|\alpha|\le r} b_\alpha D_x^\alpha;\; b_\alpha = b_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m};\; D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} .. D_{x_m}^{\alpha_m};\; D_{x_k}^{\alpha_k} = \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}};$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$; $\alpha_k = 0,1,2,\ldots$; $k = 1,2,\ldots m$; $m \in \mathrm{N}$, $B(D_x)$ – дифференциальная операция, вообще говоря, с комплексными коэффициентами. Простейшие примеры классических систем уравнений в частных производных, которые попадают в поле наших рассмотрений, дают, например, эллиптические системы при $m = 1$, $B(D_x) = D_x$.

Обобщенное решение

Исследование вопросов спектральной теории для рассматриваемых систем линейных уравнений ведется методами, которые принято называть «функциональными»[1]. Приведем общую схему применения методов, аналогичную использованной в [7] при выводе условий, определяющих правильный оператор. В соответствии с этим левая часть системы уравнений

$$L(D)u \equiv aD_t u + bBu = \lambda u + f\,,\ \ \lambda \in C\,, \tag{3}$$

с присоединенными к ней нелокальными граничными условиями [4] по t вида

$$\Gamma_t u \equiv \mu u(0,x) = u(\mathrm{T},x) = 0\,,\ \ \mu \in C\,,\ \ \mu \neq 0\,, \tag{4}$$

и граничными условиями по переменной x, формально записанных в виде

$$\Gamma_x u = 0\,, \tag{5}$$

рассматривается как линейный оператор, определенный первоначально на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (4), (5), а $2\times 2-$матрицы a, b определяются либо из системы (1), либо из системы (2); $D = D_t D_x$. Для этого оператора строится в соответствующем гильбертовом пространстве замыкание, обозначаемое через L. Специфические свойства (корректность, условия разрешимости, предоставления решений в виде рядов по собственным функциям и др.) исследуемой задачи описываются в терминах спектральных характеристик замкнутого дифференциального оператора L, соответствующего изучаемой задаче. Говоря о спектре (замкнутого) оператора, мы следуем терминологии, принятой в [2] и [6]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим соответственно через ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$.

Обозначим через $e_1 = (1,0)^T$, $e_1 = (0,1)^T$ ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}$–унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in C$; $k = 1,2$; со скалярным произведением $(u, \upsilon; \mathcal{U}) = u^1 \overline{\upsilon^1} + u^2 \overline{\upsilon^2}$. Пусть $t \in V_t \equiv [0,T]$, $0 < T < +\infty$; $x \in V_x$ – замкнутой ограниченной области евклидова пространства R^m; $V_{t,x} \equiv V_t \times V_x$; $H^2_{t,x} = L^2_2(V_{t,x})$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{t,x} \to C^2$ с нормой $\left|u; H^2_{t,x}\right|$, задаваемой формулой $\left|u; H^2_{t,x}\right|^2 = \int_{V_{t,x}} |u(\tau,\xi); U|^2 \, d\tau d\xi$. Пусть также $\mathbf{D}$ – линейное многообразие достаточно гладких вектор-функций $u \in H^2_{t,x}$, удовлетворяющих граничным условиям (4), (5).

Определение 1. Элемент $u \in H^2_{t,x}$ будем называть обобщенным решением задачи (3)–(5), если найдется такая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектор-функции $u_n \in \mathbf{D}$, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_n - u; H^2_{t,x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|L(D)u_n - \lambda u - f; H^2_{t,x}\right| = 0\,.$$

(6)

Определение 1 обобщенного решения задачи (3)–(5) порождает, как обычно, некоторый замкнутый оператор $L : H^2_{t,x} \to H^2_{t,x}$. Элемент $u \in H^2_{t,x}$ принадлежит области определения $\mathbf{D}$(L) оператора L и (в $H^2_{t.x}$) имеет место равенство $Lu = \lambda u + f$, если выполнены условия (6); его называют дифференциальным оператором, порожденным граничной задачей (3)–(5), подобно [4].

Пусть $H_x = L_2(V_x)$– гильбертово пространство комплекснозначных функций $u : V_x \to C$ с нормой $|u; H_x|$, задаваемой формулой $|u;H_x|^2 = \int_{V_x} |u(\xi)|^2 d\xi$; B – замыкание в H_x операции $B(D_x)$ на гладких функциях, удовлетворяющих условиям (5). В дальнейшем $B(D_x)$ функций $\varphi^s = \varphi^s(x)$, $B\varphi^s = B(s)\varphi^s$, образующей базис Рисса в H_x. Положим $B(S) \equiv \{B(s) : s \in S\}$.

Условие I. *Для оператора* $B : H_x \to H_x$ *точечный спектр* $P\sigma B = B(S)$.

Замкнутый оператор, обладающий отмеченными свойствами, принято называть *M– оператором* [2]. Приведем пример такого оператора. Положив

$$\Gamma_x u \equiv \mu_k D^{l_k}_{x_k} u\Big|_{x_k} - D^{l_k}_{x_k} u\Big|_{x_k = a_k} = 0\,;\ l_k = 0,1 \ldots, r_k - 1 \tag{7}$$

для операции $B(D_x)$ с постоянными коэффициентами, где $\mu_k \neq 0$ и r_k – порядок операции $B(D_x)$ по переменной x_k; $k = 1,2,\ldots,m$; получим M –оператор. Наметим схему подходов изучения спектра и свойств собственных вектор-функций оператора L. Обозначим символом $\mathbf{D}_t$ – линейное многообразие вектор-функций $u(t)$ из класса $C^1(0,T) \cap C(V_t)$, удовлетворяющих условиям (4). Пусть также $H^2_t = L^2_2(V_t)$ и $L_s : H^2_t \to H^2_t$ – замыкание операции $L_s(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathbf{D}_t$; его мы будем называть сужением оператора L [5] на H^2_t относительно φ_s. Удобно считать, что и в этом случае B является оператором; $B : H^2_t \to H^2_t$, $Bu = B(s)u$, то есть оператором умножения на константу $B(s)$. Отметим теперь важные для исследований свойства дифференциального оператора L :

1. Для конечных линейных комбинаций $u = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{s_k}(x) u_{s_k}(t) \in \mathbf{D}$ и $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{s_k}(x) f_{s_k}(t)$ имеем: $(Lu = \lambda u + f) \Leftrightarrow \forall k (k = 1,2,3,\ldots,n \Rightarrow L_{s_k} u_{s_k} = \lambda u_{s_k} + f_{s_k})$.

2. Если $u(t)$ – собственная вектор-функция, соответствующая собственному значению λ оператора L_s, то $\varphi^s(x)u(t)$ – собственная вектор-функция оператора L, соответствующая собственному значению λ.

Квазиэллиптические системы первого типа; спектральный анализ

Пусть дифференциальный оператор $L : H^2_{t,x} \to H^2_{t,x}$ порожден задачей (1), (4), (5) [6]. Далее, если $z \in C$, то по определению полагаем

$$-\pi < \arg z \leq \pi\,,\ \ln z = \ln|z| + i \arg z\,,\ \sqrt{z} = \sqrt{|z|}\exp\left(i\frac{\arg z}{2}\right).$$

Теорема 1. *Спектр* σL *оператора* L *состоит из замыкания* $\overline{P\sigma L}$ *на комплексной плоскости его точечного спектра* $P\sigma L$. *Множество* $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ *образует непрерывный спектр оператора* L. *Точечный спектр оператора* L *дается формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = \nu_k + i(-1)^m B(s), \tag{8}$$

где

$$\nu_k = \frac{\ln \mu}{T} + ik\frac{2\pi}{T};\ m = 1,2;\ k \in Z;\ s \in S.$$

Последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2; k \in Z; s \in S\} \tag{9}$$

собственных вектор-функции оператора L *образуют базис Рисса в пространстве* $H^2_{t,x}$.

Доказательство. Докажем вначале, что последовательность (9) является базисом в H. Для доказательства воспользуемся следующими леммами 1, 2.

Лемма 1. *Если для каждого* $s \in S$ *множество* $\{\upsilon_{k,s}(t) : k \in K_s\}$ *вектор-функции* $\upsilon_{k,s} : V_t \to C^2$ *полно в* H^2_t, *то множество* $\{\varphi^s(x)\upsilon_{k,s}(t) : s \in S; k \in K_s\}$ *полно в* $H^2_{t,x}$.

Доказательство леммы 1. Пусть f – произвольный элемент пространства $H^2_{t,x}$. Известно, что $H^2_{t,x} = H_x \otimes H^2_t$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор $\{\varphi^{s_m} : m = 1,2,..N\}$, что $C = \left| f - \sum_{m=1}^{N} \varphi^{s_m} f_{s_m}; H^2_{t,x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, где $f_{s_m} \in H^2_t$. Пусть $M = \max\limits_{1 \le m \le N} \left|\varphi^{s_m}; H_x\right|$. Множество $\{\upsilon_{k,s}(t) : k \in K_s\}$ полно в H^2_t. Подберем для каждого $ь = 1,2,\ldots,N$ линейную комбинацию $\sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}\upsilon_{k_n,s_m}$, $f_{k_n,s_m} \in C$, его элементов так, чтобы $C_m = \left| f_{s_m} - \sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}\upsilon_{k_n,s_m}; H^2_t \right| < \frac{\varepsilon}{2MN}$. Теперь, на основании свойств нормы и ранее полученных оценок, получаем неравенство

$$\left| a - \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}\varphi_{s_m}\upsilon_{k_n,s_m}; H^2_{t,x} \right| \le C + M\sum_{m=1}^{N} C_m < \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2MN}N = \varepsilon,$$

которое дает утверждаемую полноту. *Доказательство леммы 1 закончено.*

Лемма 2. Е*сли для каждого индекса* $s \in S$ *последовательность* $\{\upsilon_{k,s}(t) : k \in K_s\}$ *вектор-функций* $\upsilon_{k_s} : V_t \to C^2$ *образует базис в* H^2_t, *то базис в* $H^2_{t,x}$ *образует последовательность* $\{\varphi^s(x)\upsilon_{k,s}(t) : s \in S, k \in K_s\}$.

Доказательство леммы 2. Так как $H^2_{t,x} = H_t \otimes H^2_x$, то для любого элемента $f \in H$ справедливо в H представление $f = \sum_{s \in S}\varphi^s f_s$, в котором элементы $f_s \in H^2_t$ определены однозначно. Последовательность $\{\upsilon_{k,s} : k \in K_s\}$ является базисом в H^2_t; поэтому для каждого элемента $f_s \in H^2_t$ справедливо представление $f_s = \sum_{k \in K_s} f_{k,s}\upsilon_{k,s}$, где коэффициенты $f_{k,s} \in C$ также определены однозначно. В силу леммы 1 получаем единственное представление $f = \sum_{s \in S}\sum_{k \in K_s} f_{k,s}\varphi^s\upsilon_{k,s}$. Доказательство леммы 2 закончено.

Положим $e^k_m(t) = e^k(t)\left(e_1 + i(-1)^{m+1}e_2\right)/\sqrt{2}$ и рассмотрим последовательность

$$\{e^k_m(t) : m = 1,2; k \in Z\} \tag{10}$$

Из равенства $\left(e_m^k, e_{m'}^k; H_t^2\right) = \delta_{m'}^m \cdot \delta_{k'}^k$, где $\delta_{k'}^k$ - функция Кронекера, следует ортонормированность в H_t^2 последовательности (10). Предположим, что последовательность (10) не полна в H_t^2. Тогда существует вектор-функция $f_s \in H_t^2$, $f = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, $f \neq 0$ в H_t^2, ортогональная всем вектор-функциям (10). Так как $\{e^k(t) : k \in Z\}$- полная ортонормированная в H_t последовательность, то из равенства $\left(f, e_m^k; H_t^2\right) = \left(f^m, e^k; H_t\right)$, следует противоречие: $f = 0$ в H_t^2 и, следовательно, полнота в H_t^2 последовательности (10). Отсюда на основании леммы 1 последовательность (9) полна в $H_{t,x}^2$ [7]. Оператор $\mathrm{T} : H_t^2 \to H_t^2$ умножения на непрерывную функцию $\upsilon(t)$ является линейным ограниченным и ограниченно обратимым в H_t^2, то есть $0 \in \rho\mathrm{T}^{-1} \cap \rho\mathrm{T}$. Из равенства $u_{m,k}(t) = \mathrm{T}e_m^k(t)$ следует, что последовательность $\{u_{m,k}(t) : m = 1,2; k \in Z\}$ является базисом Рисса в H_t^2. Но тогда в силу леммы 2 последовательность (9) является базисом в $H_{t,x}^2$. Осталось доказать, что базис (9) является базисом Рисса в $H_{t,x}^2$. Пусть $f \in H_{t,x}^2$ и $f = \sum_s \sum_m \sum_k f_{m,k,s} u_{m,k,s}$. Достаточно доказать справедливость неравенства

$$C_1 \sum_s \sum_k \sum_m \left|f_{m,k,s}\right|^2 \leq \left|f; H_{t,x}^2\right|^2 \leq C_2 \sum_s \sum_k \sum_m \left|f_{m,k,s}\right|^2 \tag{11}$$

в котором константы $0 < C_1 \leq C_2 < +\infty$ не зависят от выбора функции $f \in H_{t,x}^2$.

Последовательность $\{\varphi^s : s \in S\}$ является базисом Рисса в H_x; поэтому существует такой ограниченный и ограниченно обратимый линейный оператор $\mathrm{A} : H_x \to H_x$, $\mathrm{A} \in L(H_x)$, что $\mathrm{A}^{-1}\varphi^s = e^s$, а последовательность $\{e^s : s \in S\}$ является ортонормированным базисом в H_x. Поэтому, в силу теоремы Фубини, для почти всех $t \in V_t$ имеем в H_x^2 равенство $\mathrm{A}^{-1} f(t,x) = \sum_s f_s(t) e^s(x)$. Следовательно, для почти всех $t \in V_t$

$$\left|\mathrm{A}^{-1} f; H_x^2\right|^2 = \sum_{m=1}^{2} \left|\sum_s f_s^m(t) e^s; H_x\right|^2 = \sum_{m=1}^{2} \sum_s \left|f_s^m(t)\right|^2 = \sum_s \left|f_s(t); \boldsymbol{u}\right|^2 .$$

Отсюда $\left|\mathrm{A}^{-1} f; H_x^2\right|^2 = \sum_s \left|f_s; H_t^2\right|^2$ и, следовательно,

$$\sum_s \left|f_s; H_t^2\right|^2 \leq \left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|^2 \cdot \left|f; H_{t,x}^2\right|^2 \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\left|f; H_x^2\right| \leq \|\mathrm{A}\|^2 \sum_{m=1}^{2} \left|\sum_s f_s^1(t) e^s; H_x\right|^2 = \|\mathrm{A}\|^2 \sum_{m=1}^{2} \sum_s \left|f_s^1(t)\right|^2 = \|\mathrm{A}\|^2 \sum_s \left|f_s(t); \boldsymbol{u}\right|^2 .$$

Отсюда

$$\left|f; H_{t,x}^2\right|^2 \leq \|\mathrm{A}\|^2 \sum_s \left|f_s; H_t^2\right|^2 \tag{13}$$

Объединяя неравенства (12) и (13), получаем

$$\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|^{-2} \sum_s \left|f_s; H_t^2\right|^2 \leq \left|f; H_{t,x}^2\right|^2 \leq \|\mathrm{A}\|^2 \sum_s \left|f_s; H_t^2\right|^2 \tag{14}$$

Аналогично

$$\left\|T^{-1}\right\|^{-2}\sum_m\sum_k\left|f_{m,k,s}\right|^2\le\left|f_s;H_t^2\right|^2\le\left\|T\right\|^2\sum_m\sum_k\left|f_{m,k,s}\right|^2 \tag{15}$$

Объединяя неравенства (14) и (15), получаем требуемое.

Пример 1. *Положив* $B(D_x)=D_x+1$, $\mu=1$, $T=2\pi$, $\mu_1=1$, $a_1=2\pi$ *получим спектр:*

$$\lambda_{m,k,s}=ik+i(-1)^m[is+1];\ m=1,2;\ k,s=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

периодической задачи для эллиптической системы первого тира. Точки спектра расположены на прямых, параллельных мнимой оси: $\sigma L=P\sigma L$. Собственные вектор-функции образуют ортонормированный базис в $H_{t,x}^2=L_2^2(V_{t,x})$, $V_{t,x}=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

Квазиэллиптические системы второго типа; спектральный анализ

Исследуем теперь дифференциальный оператор $L:H_{t,x}^2\to H_{t,x}^2$, порожденный задачей (2), (4), (5). Спектральные свойства задачи Дирихле для эллиптических систем второго типа изучались в [7]. Положим $N=\{(-1)^m\nu_k : m=1,2;k\in Z\}$, $\nu_k=\dfrac{\ln\mu}{T}+ik\dfrac{2\pi}{T}$.

Теорема 2. *Если множество* $N\cap P\sigma B\setminus\{0\}$ *не пусто и, следовательно,* $0\in P\sigma L$, *то последовательность собственных вектор-функций оператора* L *заведомо не полна в* $H_{t,x}^2$. *В противном случае, если множество* $N\cap P\sigma B\setminus\{0\}$ *пусто, то* L *является* M *- оператором в* $H_{t,x}^2$.

Доказательство. Легко убедиться, что собственному значению

$$\lambda_{m,k,s}=(-1)^m\begin{cases}\nu_k\sqrt{1+\left(\dfrac{B(s)}{\nu_k}\right)^2}, & \text{если } \nu_k\ne0,\\ B(s), & \text{если } \nu_k=0,\end{cases}\quad \nu_k=\frac{\ln z}{T}+ik\frac{2\pi}{T},$$

оператора L *принадлежит собственная вектор-функция.*

$$u_{m,k,s}(t,x)=u_{m,k,s}(t)\varphi^s(x) \tag{16}$$

здесь $m=1,2$; $k\in Z$; $s\in S$,

$$u_{m,k,s}(t)=C_{m,k,s}\left(\left(\lambda_{m,k,s}+(-1)^m\nu_k\right)\varphi_m^k(t)+B(s)\varphi_{3-m}^k(t)\right),\ \varphi_m^k(t)=\upsilon(t)e^k(t)e_m,$$

$$C_{m,k,s}^2=\frac{1}{\left(\lambda_{m,k,s}+(-1)^m\nu_k\right)^2+B^2(s)},\ \upsilon(t)=\exp\left(\frac{\ln z}{T}t\right),\ e^k(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\exp\left(ik\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Исследуем спектральные свойства собственных вектор-функций оператора L. Пусть множество $N\cap P\sigma B\setminus\{0\}$ не пусто, и пусть $B(s)=i(-1)^{(n+1)}\nu_k$ для некоторого $n=1,2$ и некоторого $k\in Z$. Тогда вектор-функция $h(t,x)\in H_{t,x}^2$,

$$h(t,x)=\left(\psi_1^k(t)+i(-1)^n\psi_2^k(t)\right)\psi^s(x),\ \psi_m^k(t)=\overline{\upsilon^{-1}}(t)e^k(t)e_m,\ m=1,2,$$

ортогональна каждой вектор-функции (16). Отсюда, в силу критерия полноты, следует, что

$$\{u_{m,k,s}(t,x): m=1,2;k\in Z;s\in S\} \tag{17}$$

собственных вектор-функий оператора L заведомо не полна в $H_{t,x}^2$.

Пусть теперь множество $\mathrm{N}\bigcap P\sigma B\setminus\{0\}$ пусто. Обозначим через $S_1=\{s:\mathrm{N}\bigcap P\sigma B=0\}$, $S_1=\{s:\mathrm{N}\bigcap P\sigma B=\varnothing$ подмножества множества S. Докажем, что для каждого фиксированного значения индекса $s\in S$ последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t,x):m=1,2;k\in\mathrm{Z}\} \tag{18}$$

является базисом Рисса в H_t^2. Ясно, что $S_1\bigcup S_2=S$ и $S_1\bigcup S_2=\varnothing$. Поэтому достаточно рассмотреть два случая: $s\in S_1$ и $s\in S_2$. Нетрудно убедиться, что для каждого $s\in S_1$ последовательность (18) образует ортонормированный базис в H_t^2; доказательство аналогично доказательству свойств последовательности (10). Пусть теперь $s\in S_2$. Покажем вначале, что последовательность (18) полна в H_t^2. Рассуждаем от противного. Если вектор-функция $h\in H_t^2$, $h\neq 0$, ортогональна каждой вектор-функции (18), то для некоторого $k\in\mathrm{Z}$ определитель

$$\Delta_{k,s}=\begin{vmatrix}\lambda_{1,k,s} & B(s)\\ B(s) & \lambda_{2,k,s}+\nu_k\end{vmatrix}=0\,.$$

По предположению множество $\mathrm{N}\bigcap P\sigma B$ пусто. Поэтому $\Delta_{k,s}=-2\lambda_{1,k,s}(\lambda_{1,k,s}-\nu_k)\neq 0$ для всех $k\in\mathrm{Z}$. Получили противоречие. Покажем теперь, что последовательность (18) является базисом в H_t^2. Воспользуемся свойствами последовательности

$$\{\upsilon_{m,k,s}(t):m=1,2;k\in\mathrm{Z}\} \tag{19}$$

$$\upsilon_{m,k,s}(t)=\overline{C}_{m,k,s}\left(\left(\overline{\lambda}_{m,k,s}+(-1)^m\overline{\nu}_k\right)\psi_m^k(t)+\overline{B}(s)\psi_{3-m}^k(t)\right),$$

сопряженной (биортогональной) к последовательности (18). Заметим, что последовательности $\{\varphi_m^k:m=1,2;k\in Z\}$, $\{\psi_m^k:m=1,2;k\in\mathrm{Z}\}$, являются базисами Рисса в H_t^2. На произвольной вектор-функции $h(t)\in H_t^2$,

$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{2}\left(h,\psi_m^k;H_t^2\right)\varphi_m^k(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{2}h_k^m\varphi_m^k(t);$$

определим конечномерный оператор $P_n:H_t^2\to H_t^2$, положив

$$P_nh(t)=\sum_{|k|<n}\sum_{m=1}^{2}\left(h.\upsilon_{m,k,s};H_t^2\right)u_{m,k,s}(t) \tag{20}$$

Простыми выкладками последовательно получаем

$$P_nh(t)=\sum_{|k|\le n}\sum_{m=1}^{2}h_k^m\varphi_m^k(t) \tag{21}$$

$$\left\|\mathrm{T}^{-1}\right\|^{-2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{2}\left|h_k^m\right|\le\left|h;H_t^2\right|^2\le\left\|\mathrm{T}\right\|^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{2}\left|h_k^m\right|^2 \tag{22}$$

$$\left|P_nh;H_t^2\right|^2\le\left\|\mathrm{T}\right\|^2\left\|\mathrm{T}^{-1}\right\|\left|h,H_t^2\right| \tag{23}$$

Теперь из неравенства (23) на основании теоремы Банаха-Штейнхауса любая вектор-функция $h(t)\in H_t^2$ единственным образом представима в виде ряда

$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{2}\left(h,\upsilon_{m,k,s};H_t^2\right)u_{m,k,s}(t) \tag{24}$$

По биортонормированной последовательности $\{u_{m,k,s}(t), \upsilon_{m,k,s} : m=1,2; k \in Z\}$. Следовательно, представление (24) позволяет утверждать, что последовательность (18) является базисом в H_t^2. Далее из представления (21) получаем

$$\left|P_n h; H_t^2\right|^2 \le \|\mathrm{T}\|^2 \sum_{|k|<n} \sum_{m=1}^{2} \left|h_k^m\right|^2, \quad \sum_{|k|<n} \sum_{m=1}^{2} \left|h_k^m\right|^2 \le \left\|\mathrm{T}^{-1}\right\|^2 \left|P_{nh}; H_t^2\right|_2 .$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, в силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} P_n h = h$ снова получаем двойное неравенство (22). Однако в этом случае мы можем утверждать, что последовательность (18) является базисом Рисса в H_t^2 [8]. Теперь, повторяя рассуждения, использованные при исследовании квазиэллиптического дифференциального оператора первого типа, получим весь спектр квазиэллиптического дифференциального оператора второго типа.

Пример 2. *Положив так же, как и в примере 1,* $B(D_x) = D_x + 1$, $\mu = 1$, $T = 2\pi$; $\mu_1 = 1$, $a_1 = 2\pi$ *получим точечный спектр*

$$\lambda_{m,k,s} = i(-1)^m \begin{cases} sign k\sqrt{k^2 - (1+is)^2}, & k \ne 0; \\ i(1+is), & k = 0, \end{cases} \quad m = 1,2; \quad k,s \in Z$$

периодической задачи для эллиптической системы второго типа, последовательность собственных вектор-функции которой не полна в $H_{t,x2}^2 = L_2^2(V_{t,x})$.

Список литературы
References

1. Дезин А.А. 2000. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач, М. , Тр. МИАН, 229, Наука, 175 .

Desin, A.A. 2000. Differential-operator equations. A method of model operators in the theory of boundary value problems. M., Tr. MIAN, 229, Science, 175.

2. Дезин А.А. 1980. Общие вопросы теории граничных задач. М., Наука, 208.

Desin A. A. 1980. General questions of the theory of boundary value problems. M., Nauka, 208.

3. Корниенко В.В. 2000. О спектре вырождающихся операторных уравнений. Математические заметки, 68(5): 677-691.

Kornienko V.V. 2000. On the spectrum of degenerate operator equations. Mathematical notes, 68(5): 677-691.

4. Корниенко В.В. 2000. О спектре нелокальной задачи для иррегулярных уравнений. Математический сборник, 191(11): 21-46.

Kornienko V.V. 2000. On the spectrum of non-local problem for irregular equations. Mathematical collection, 191(11): 21-46.

5. Бицадзе А.В. 1981. Некоторые классы уравнений в частных производных. М, Наука, 448.

Bitsadze A.V. 1981. Some classes of partial differential equations. M. , Nauka, 448.

6. Романко В.К. 1986. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений. Доклады АН СССР, 286(1): 47-50.

Romanko V.K. 1986. Mixed boundary value problems for one system of equations. Doklady as USSR., 286(1): 47-50.

7. Алексеева О.В. 2010. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика., 20, № 17 (88): 5-9.

Alekseeva O.V. 2010. On the spectrum of the Dirichlet problem for elliptic two systems. Scientific statements of Belgorod state University. Series: Mathematics. Physics, 20, No. 17 (88): 5-9.

8. Годунов С.К. 1979. Уравнения математической физики. М., Наука, 392 .

Godunov S.K. 1979. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 392.