УДК 517.9

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
THEOREM OF COMPLETENESS OF SPACE FRACTIONAL-DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

М.В. Кукушкин
M.V. Kukushkin

Институт прикладной математики и автоматизации,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89a Shortanova St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: kukushkinmv@rambler.ru

Аннотация. Получено представление для нормы, в энергетическом пространстве, порожденном оператором дробного дифференцирования, в терминах коэффициентов Фурье дробной производной функции - элемента пространства. Доказана теорема устанавливающая полноту унитарного пространства дробно-дифференцируемых функций в случае, когда элементами унитарного пространства являются функции представимые дробным интегралом от суммируемых с квадратом функций. Доказана теорема имеющая своим результатом описание, в терминах шкалы пространств Лебега функций суммируемых в степени q, замкнутых линейных многообразий в энергетическом пространстве порожденном оператором дробного дифференцирования.

Resume. In this paper we investigate the representation for norm, in the energetic space generated by the operator of fractional differentiation, in terms of coefficients of Fourier of a fractional derivative function. The theorem establishes the completeness of the unitary space of fractionally- differentiable functions, when elements of the unitary space are the functions represented by fractional integral from square-integrable functions, is proved. The theorem having the result the description of closed linear manifolds, in the energetic space generated by the operator of fractional differentiation, is proved.

Ключевые слова: энергетическое пространство, оператор дробного дифференцирования, положительно определенный оператор.
Key words: energetic space, operator of fractional differentiation, strongly monotone operator.

Введение

В работе [1] доказана положительная определенность оператора дробного дифференцирования на линейном пространстве, $I^{\alpha}_{a+}(L_{\theta})$ что в свою очередь порождает унитарное пространство. Как известно из общей теории гильбертовых пространств всякое унитарное пространство можно пополнить до гильбертова пространства с точностью до изометрии (см.[2, с.26]). Очевидно, сразу возникает вопрос полноты унитарного пространства. Будут ли идеальные элементы (см.[2, с.25]) также принадлежать унитарному пространству? Данная работа посвящена изучению этого вопроса. Выделен класс, по которому построенное унитарное пространство является полным. Доказаны утверждения в терминах шкалы L_q, результатом которых является возможность определения многообразий замкнутых, в смысле введенной нормы, в классах $I^{\alpha}_{a+}(L_q)$. Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать: $\alpha \in (0,1), x \in (a,b) = \Omega$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения

$$D^{-\alpha}_{ax}u = \frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{u(t)}{|x-t|^{-\alpha+1}}dt, \qquad D^{\alpha}_{ax}u = \operatorname{sgn}(x-a)\frac{d}{dx}D^{\alpha-1}_{ax}u,$$

$$\langle f,g\rangle_0 \equiv \langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,\ \langle f,g\rangle_{0,\psi} \equiv \langle f,g\rangle_{L_2(\Omega,\psi)} = \int_\Omega f(x)g(x)\psi(x)dx.$$

Будем рассматривать классы

$$I_{a+}^{\alpha}(L_\theta) = \{f(x): f(x) = D_{ax}^{-\alpha}\psi,\ \psi(x)\in L_\theta(\Omega)\},$$
$$I_{b-}^{\alpha}(L_\theta) = \{f(x): f(x) = D_{bx}^{-\alpha}\psi,\ \psi(x)\in L_\theta(\Omega)\}, \tag{1}$$
$$I_{b-}(L_q)^{+} = \{f(x): f(x)\in I_{b-}^{\alpha}(L_q),\ \psi(x)>0\}. \tag{2}$$

Допустим, что действительные числа: θ, q удовлетворяют условиям

$$\frac{2}{\theta}+\frac{1}{q}\le 1+2\alpha,\ \frac{2}{1+2\alpha}<\theta<\frac{1}{\alpha},\ 1<q<\frac{1}{\alpha}, \tag{3}$$

и пусть $c(x)\in I_{b-}^{\alpha}(L_q)^{+}$. Определим на $I_{a+}^{\alpha}(L_\theta)$ билинейную форму

$$\langle u,v\rangle_{\alpha,c} = \frac{1}{2}\langle u, D_{ax}^{\alpha}v\rangle_{0,c} + \frac{1}{2}\langle v, D_{ax}^{\alpha}u\rangle_{0,c}\ ,\ u,v\in I_{a+}^{\alpha}(L_\theta). \tag{4}$$

Для этой билинейной формы выполнение аксиом скалярного произведения очевидно, кроме аксиомы

$$\langle u,u\rangle_{\alpha,c} > 0,\ u\ne 0. \tag{5}$$

Из леммы 1 [1], следует, что пара билинейная форма (4) и линейное пространство $I_{a+}^{\alpha}(L_\theta)$ образует унитарное пространство, которое обозначим $\tilde{N}_{\alpha,c}(L_\theta)$. Гильбертово пространство полученное в результате пополнения унитарного пространства $\tilde{N}_{\alpha,c}(L_\theta)$, будем обозначать $N_{\alpha,c}(L_\theta)$. Согласно теореме 1 [1] пространство $N_{\alpha,c}(L_\theta(\Omega))$, $\left(c(x)=D_{bx}^{-\alpha}\varphi\right)$ ограниченно вложенно в $L_2(\Omega,\varphi)$, и имеет место энергетическое неравенство

$$\|u\|_{0,\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}} \le \|u\|_{\alpha,c}\ ,\ u\in N_{\alpha,c}(L_\theta). \tag{6}$$

Положим в (4) θ=2, определим весовую функцию

$$\varphi(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}, \tag{7}$$

тогда согласно формуле (2.45) [3, с.47] дробного интегрирования степенной функции имеем: $c(x)=D_{bx}^{-\alpha}\varphi=1$. Для рассматриваемого случая веса (7), неравенство квазиположительной определенности (6), легко свести к неравенству положительной определенности (см.[4, с. 62]) для оператора дробного дифференцирования

$$\left\langle D_{ax}^{\alpha}u,u\right\rangle_0 \ge \lambda^2\|u\|_0^2,\quad \lambda = \left(2(b-a)^{\alpha}\Gamma(-\alpha+1)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Основная теорема

Перед доказательством теоремы полноты пространства $\tilde{N}_{\alpha 1}(L_2)$, в целях удобства дальнейшего изложения, докажем два утверждения являющиеся незначительными обобщениями утверждений доказанных в [5, с.39].

Лемма 1. *Пусть* $f(x)$*– неотрицательная убывающая функция из класса* $C(0,b-a]\cap L(0,b-a)$*, которая имеет возрастающую производную* $f'(x)$ *из класса* $C(0,b-a)$*. Тогда*

$$a_n^0 = \frac{2}{b-a}\int_0^{b-a} f(x)\cos\frac{2\pi n}{b-a}xdx > 0,\quad n=0,1\ldots \tag{9}$$

Доказательство. Будем рассматривать периодическое продолжение функции $f(x)$ с периодом T=b-a. Из условий наложенных на $f(x)$ очевидно, что $a_0^0>0$. Положим

$$F(t) = f\left(\frac{b-a}{2\pi n}t\right),\quad t\in[0,2\pi n],\quad n=1,2,\ldots$$

Осуществив замену переменной $t=\dfrac{2\pi n}{b-a}x$ в (9), получим

$$a_n^0 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi n} F(t)\cos tdt = \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{2n-1}\int_{\pi r}^{\pi(r+1)} F(t)\cos tdt.$$

Сделав замену $x = t - \pi r$, с учетом равенства $\cos(x+\pi r) = (-1)^r \cos x$ имеем

$$a_n^0 = \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^r\int_0^{\pi} F(x+\pi r)\cos x dx = \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^r\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+\pi r)\cos x dx + \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^r\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(x+\pi r)\cos x dx.$$

После замены: $t = x - \dfrac{\pi}{2}$ во втором слагаемом правой части последнего равенства, получим

$$a_n^0 = \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^r\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F(x+\pi r)\cos x - F\left(x+\frac{2r+1}{2}\pi\right)\sin x\right]dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[F(x+2\pi r) - F\left(x+(2r+1)\pi\right)\right]\cos x + \left[F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right) - F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right)\right]\sin x\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F(x+2\pi r) - F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left(x+(2r+1)\pi\right) + F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right)\right]\cos x dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right)\right](\cos x - \sin x)dx = S_1 + S_2.$$

Из условий монотонности наложенных на $f(x)$ и $f'(x)$ в формулировке данной теоремы, следует монотонное убывание функции $F(x-h) - F(x)$ на интервале $(h, 2\pi n), n = 1, 2\ldots$. Положив $h = \dfrac{\pi}{2}$, в силу вышесказанного, имеем положительность подынтегральных функций в выражении для S_1. Из чего очевидно следует: $S_1 > 0$. Далее для S_2 имеем

$$S_2 = \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right)\right](\cos x - \sin x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right)\right](\cos x - \sin x)dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right)\right](\cos x - \sin x)dx.$$

Осуществив в интегралах второго слагаемого правой части последнего равенства замену $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, получим

$$S_2 = \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right)\right](\cos x - \sin x)dx -$$

$$- \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[F\left((2r+1)\pi - t\right) - F\left(2(r+1)\pi - t\right)\right](\cos t - \sin t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[F\left(x+\frac{4r+1}{2}\pi\right) - F\left((2r+1)\pi - x\right) - F\left(x+\frac{4r+3}{2}\pi\right) + F\left(2(r+1)\pi - x\right)\right](\cos x - \sin x)dx.$$

Из условия данной леммы, полностью аналогично рассуждениям приведенным для доказательства положительности S_1 (достаточно положить $h = \dfrac{\pi}{2} - 2x$), следует положительность подынтегральных выражений в правой части последнего равенства. Следовательно $S_2 > 0$.

В результате $a_n^0 = S_1 + S_2 > 0, \quad n = 1, 2\ldots$. Лемма доказана.

Рассмотрим квадратичную форму с симметричным ядром см.[5, с.38]

$$I(\psi,\psi)=\int_a^b\int_a^b K(x,y)\psi(x)\psi(y)dxdy. \tag{10}$$

В силу доказанной в [5, с. 35] теоремы 1.3.1, квадратичная форма (10) с ядром $K(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}|x-y|^{\alpha-1}, \alpha\in(0,1)$ является положительной на множестве: $\Psi=\{\psi:\psi\in L,\ I(\psi,\psi)<\infty\}$.

Следующая теорема дает возможность представления квадратичной формы (10) в терминах коэффициентов Фурье.

Теорема 1. *Пусть:* $\gamma(x)\in C(0,b-a]\bigcap L(0,b-a)$ *– неотрицательная, убывающая функция которая имеет возрастающую непрерывную производную* $\gamma'(x)\in C(0,b-a)$, *свертка функций*

$$\psi*\gamma\in L_p,\quad \psi\in L_\theta,\quad p\geq\frac{\theta}{1-\alpha\theta},\quad \theta>\frac{2}{1+\alpha}. \tag{11}$$

Тогда на множестве L_θ *квадратичная форма (10) с ядром* $K(x,y)=\gamma(|x-y|)$ *имеет представление*

$$I(\psi,\psi)=\mu^2\left[\frac{a_0^0}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^0(a_n^2+b_n^2)\right],\quad \mu=\frac{b-a}{2},\quad \psi\sqcup c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),$$

где

$$a_n^0=\frac{2}{b-a}\int_0^{b-a}\gamma(x)\cos\frac{2\pi n}{b-a}xdx>0,\quad n=0,1,\ldots.$$

Доказательство. Будем рассматривать периодические продолжения: функций $\psi(x),(\psi*\gamma)(x)$ с периодом T=b-a, функции $\gamma(|x|)$ с периодом 2T. Используя свойства периодичности функций, изменив порядок интегрирования воспользовавшись теоремой Фубини, имеем

$$r_n=\frac{1}{b-a}\int_a^b(\psi*\gamma)(x)e^{-\frac{2\pi ni}{b-a}x}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-\frac{2\pi ni}{b-a}x}dx\int_a^b\gamma(|x-y|)\psi(y)dy=\frac{1}{2(b-a)}\int_{a-b}^{b-a}e^{-\frac{2\pi ni}{b-a}x}dx\int_a^b\gamma(|x-y|)\psi(y)dy=$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\psi(y)e^{-\frac{2\pi ni}{b-a}y}dy\int_{a-b}^{b-a}\gamma(|x-y|)e^{-\frac{2\pi ni}{b-a}(x-y)}dx=$$

$$=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b\psi(y)e^{-\frac{2\pi ni}{b-a}y}dy\int_0^{b-a}\gamma(x)\cos\frac{2\pi ni}{b-a}xdx=\mu c_n a_n^0,\quad n=0,1\ldots \tag{12}$$

Следовательно

$$(\psi*\gamma)(x)\sqcup\sum_{-\infty}^{\infty}\mu a_n^0c_ne^{\frac{2\pi ni}{b-a}x}. \tag{13}$$

Обозначим частичную сумму ряда (13) как: $S_n(x)=\sum_{n=-N}^{n=N}\mu a_n^0c_ne^{\frac{2\pi ni}{b-a}x}$. Заметим, что квадратичная форма (10) ограничена. В этом несложно убедиться используя неравенство Коши-Гельдера

$$|I(\psi,\psi)|=\left|\int_a^b\psi(x)(\psi*\gamma)(x)dx\right|\leq\|\psi\|_{L_\theta}\|\psi*\gamma\|_{L_{\theta'}}\leq C\|\psi\|_{L_\theta}\|\psi*\gamma\|_{L_p}<\infty,\quad C=const, \tag{14}$$

поскольку из условия (11) данной теоремы следует : $p\geq\frac{\theta}{1-\alpha\theta}>\frac{\theta}{\theta-1}=\theta'$. В силу теоремы 6.4 [7, с.423], ряд (13) сходится к $\psi*\gamma$ в смысле нормы L_p. С учетом оценки (14), используя свойство непрерывности скалярного произведения, имеем

$$I(\psi,\psi)=\langle\psi,\psi*\gamma\rangle_0=\lim_{N\to\infty}\langle\psi,S_N\rangle_0=\lim_{N\to\infty}\int_a^b\psi(x)\sum_{n=-N}^{n=N}\mu a_n^0c_ne^{\frac{2\pi ni}{b-a}x}dx=\mu\sum_{-\infty}^{\infty}a_n^0c_n\int_a^b\psi(x)e^{\frac{2\pi ni}{b-a}x}dx=$$

$$(b-a)\mu\sum_{-\infty}^{\infty}a_n^0|c_n|^2=\frac{b-a}{4}\mu\sum_{-\infty}^{\infty}a_n^0\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Поскольку: $b_{-n}^0=-b_n^0, a_{-n}^0=a_n^0, b_0^0=b_0=0,$ то последнее выражение можно преобразовать к следующему виду

$$I(\psi,\psi)=\mu^2\left[\frac{a_0^0}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^0(a_n^2+b_n^2)\right]. \tag{15}$$

Положительность коэффициентов $a_n^0, n=0,1,2\ldots$ незамедлительно следует из леммы 1. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. $\tilde{N}_{\alpha,1}(L_2)=N_{\alpha,1}(L_2)$.

Доказательство. Допустим, что последовательность $\{u_n\}\subset I^{\alpha}_{a+}(L_2)$, фундаментальна в смысле нормы $N_{\alpha,1}(L_2)$. Покажем, что существует эллемент $u_0\in I^{\alpha}_{a+}(L_2)$ являющийся пределом данной последовательности. Поскольку $u_n=D^{-\alpha}_{ax}\psi_n$, то в силу: следствия 2 [3, с.51] , теоремы 1 имеем цепочку равенств

$$\|u_{n+m}-u_n\|_{\alpha,1}=\left\langle u_{n+m}-u_n,D^{\alpha}_{ax}(u_{n+m}-u_n)\right\rangle_0=\left\langle \psi_{n+m}-\psi_n,D^{-\alpha}_{ax}(\psi_{n+m}-\psi_n)\right\rangle_0=$$

$$=\mu\left\{\frac{a_0^0}{2}(a_{0,n+m}-a_{0,n})^2+\sum_{k=1}^{\infty}a_n^0\left[(a_{k,n+m}-a_{k,n})^2+(b_{k,n+m}-b_{k,n})^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно поскольку $\|u_{n+m}-u_n\|_{\alpha,1}\to 0,\quad \forall m\in\mathbb{N},\quad n\to\infty,$ то

$$\|\psi_{n+m}-\psi_n\|_0=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[(a_{k,n+m}-a_{k,n})^2+(b_{k,n+m}-b_{k,n})^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0.$$

Значит в силу полноты пространства L_2 имеет место: $\psi_n\xrightarrow{L_2}\psi_0\in L_2$, а следовательно и подавно: $\psi_n\xrightarrow{L_\theta}\psi_0,\ \dfrac{2}{1+\alpha}<\theta<\min\left\{\dfrac{1}{\alpha},2\right\}$. В силу теоремы Харди-Литтлвуда [3, с.64]: $u_n\xrightarrow{L_p}u_0,\ p=\dfrac{\theta}{1-\alpha\theta}$, откуда следует

$$\|u_n-u_0\|^2_{\alpha,1}=\langle\psi_n-\psi_0,u_n-u_0\rangle_0\le\|\psi_n-\psi_0\|_{L_\theta}\|u_n-u_0\|_{L_{\theta'}}\le$$

$$\le C\|\psi_n-\psi_0\|_{L_\theta}\|u_n-u_0\|_{L_p}\to 0,\quad C=const,\quad n\to\infty,$$

поскольку: $\theta'=\dfrac{\theta}{\theta-1}<\dfrac{\theta}{1-\alpha\theta}=p.$ Таким образом мы показали, что всякая фундаментальная последовательность в пространстве $\tilde{N}_{\alpha,1}(L_2)$, сходится к элементу $u_0\in I^{\alpha}_{a+}(L_2)$. Теорема доказана.

Как известно из теории рядов Фурье равенство Парсеваля имеет место в пространстве L_2, ответ на вопрос возможны ли оценки нормы через коэффициенты Фурье в пространствах $L_p, p\neq 2$ дает теорема 3.19 [8, с.165], в более общем случае теорема Пэли [8, с.182]. Для случая рассматриваемого пространства дробно-дифференцируемых функций, из вышеупомянутых утверждений вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть линейное многообразие* Λ *определено следующим образом*

$$\Lambda_\vartheta=\left\{\psi:\psi\sim c_n,|c_n|=O(|n|^{-\vartheta})\right\},\quad 1<\vartheta<\infty.$$

Тогда
$$\overline{I^{\alpha}_{a+}(\Lambda)}\subset I^{\alpha}_{a+}(L_q),\quad q=2+\frac{\alpha}{\vartheta-1},\tag{16}$$

где операция замыкания понимается в смысле нормы пространства $N_{\alpha,1}(L_q)$.

Доказательство. Так как в силу теоремы 2.22 [7, с.305], для коэффициентов Фурье ядра: $\gamma(x)=x^{\alpha-1},\alpha\in(0,1)$ имеет место ассимптотическое равенство

$$a_k^{(\alpha)}\sim k^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\sin\frac{1}{2}\pi(1-\alpha),\quad k\to\infty,$$

то с учетом условий (16) относительно q, получим следующие оценки

$$|c_k|^q\left(|k|+1\right)^{q-2}\le C|c_k|^2\left(|k|+1\right)^{-\alpha}\le C_1|c_k|^2a_k^{(\alpha)},\quad C,C_1=const,\quad k\in\mathbb{Z}.\tag{17}$$

В силу теоремы Харди и Литтлвуда [8,с.165], с учетом (17), имеем цепь неравенств

$$\|\psi_{n+m}-\psi_n\|_{L_q}\le A_q\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}|c_{k,n+m}-c_{k,n}|^q\left(|k|+1\right)^{q-2}\right\}^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le C_q\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}a_k^{(\alpha)}\left[(a_{k,n+m}-a_{k,n})^2+(b_{k,n+m}-b_{k,n})^2\right]\right\}^{\frac{1}{q}},\quad \{\psi_n\}\in\Lambda_\vartheta,\quad A_q,C_q=const.$$

Значит из: $\left\|D_{ax}^{-\alpha}(\psi_{n+m}-\psi_n)\right\|_{\alpha,1}\to 0,$ следует: $\left\|\psi_{n+m}-\psi_n\right\|_{L_q}\to 0.$ Откуда в силу полноты пространства L_q существует предел: $\psi_n \xrightarrow{L_q} \psi_0, \psi_0\in L_q,$ а значит и подавно: $\psi_n \xrightarrow{L_\eta} \psi_0, \dfrac{2}{1+\alpha}<\eta<\min\left\{\dfrac{1}{\alpha},q\right\}.$ Условие относительно η коректно, поскольку в силу (16): $q>\dfrac{2}{1+\alpha}$. Из теоремы об ограниченном действии опрератора дробного интегрирования (теорема 3.5 [3, с. 64]) следует

$$D_{ax}^{-\alpha}\psi_n \xrightarrow{L_p} D_{ax}^{-\alpha}\psi_0, \quad p=\frac{\eta}{1-\alpha\eta}.$$

На основании вышесказанного имеем

$$\left\|D_{ax}^{-\alpha}\psi_n-D_{ax}^{-\alpha}\psi_0\right\|_{\alpha,1}^2=\left\langle \psi_n-\psi_0, D_{ax}^{-\alpha}\psi_n-D_{ax}^{-\alpha}\psi_0\right\rangle_0\le\left\|\psi_n-\psi_0\right\|_{L_\eta}\left\|D_{ax}^{-\alpha}\psi_n-D_{ax}^{-\alpha}\psi_0\right\|_{L_{\eta'}}\le$$

$$\le C\left\|\psi_n-\psi_0\right\|_{L_\eta}\left\|D_{ax}^{-\alpha}\psi_n-D_{ax}^{-\alpha}\psi_0\right\|_{L_p}\to 0, \quad n\to\infty, \quad C=const,$$

последнее неравенство выполняется, поскольку из оценки снизу для η, имеющей место в определении, следует

$$\eta'=\frac{\eta}{\eta-1}<\frac{\eta}{1-\alpha\eta}=p.$$

Теорема доказана.

Для теоремы 3 можно привести наглядную иллюстрацию. В силу теоремы 40 [6, с.48]

$$AC^1\subset\Lambda_2, \quad \Lambda_2=\left\{\psi:\psi\sim c_n, |c_n|=O\left(|n|^{-2}\right)\right\}.$$

Из теоремы 3 следует

$$\overline{I_{a+}^{\alpha}\left(AC^1\right)}\subset I_{a+}^{\alpha}\left(L_q\right), \quad q=2+\alpha,$$

где операция замыкания понимается в смысле нормы пространства $N_{\alpha,1}\left(L_q\right)$.

Список литературы
References

1. Кукушкин М.В. 2016. О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. № 6 (227), выпуск 42: 60-70.

Kukushkin M.V. 2016. About the weighted spaces of fractionally differentiable functions.// Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics, №6(227),42: 60-70.

2. Морен К. 1965. Методы гильбертова пространства. М., Мир: 570.

Moren K. 1965. Hilbert space methods. M., Mir, 570.

3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения . Минск "Наука и техника" : 688.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integrals and derivatives of fractional order, and some applications. Minsk "Science and Technology" :688.

4. Михлин С.Г. 1977.Линейные уравнения в частных производных. М., "Высшая школа" :431 .

Mikhlin S.G. 1977. Linear partial differential equations. M ., Higher School, 431.

5. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит: 272 .

Nahushev A.M. 2003. Fractional calculus and its application. M ., FIZMATLIT: 272.

6. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. 1962. Ряды Фурье.М., Физматгиз :156.

Hardy G.H., Rogosinski W.W. 1956. Fourier Series. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 38, 156.

7. Зигмунд А. 1965. Тригонометрические ряды. Том 1. М., Мир, 616 .

Zygmund A. 1959. Trigonometric Series volume I. Cambridge at the university press, 616.

8. Зигмунд А. 1965. Тригонометрические ряды. Том 2. М. , Мир: 538 .

Zygmund A. 1959. Trigonometric Series volume II. Cambridge at the university press, 538.