



УДК 531.224.5

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПОД ВНЕШНИМ ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ**THE FINIT LENGTH CYLINDRICAL SHELL UNDER EXTERNAL HYDROSTATIC PRESSURE****В.И. Ванько**
V.I. Vanko

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5.
Bauman Moscow State Technical University, 105005, Russia, Moscow, 2-ya Baumanskaya St., 5.

E-mail: vvanko@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется процесс деформирования круглоцилиндрической оболочки конечной длины под внешним (боковым) гидростатическим давлением. Оболочка изготовлена из упруго-линейновязкого материала. Принятая кинематическая схема позволяет проследить процесс деформирования срединного поперечного сечения оболочки вплоть до полного сплющивания и оценить “время жизни” конструкции.

Resume. This article analyses deformation process of the cylindrical shell of the finite length under external (side) pressure. The shell is made of elastic-linear viscous material. The accepted kinematic scheme allows to observe the deformation process of the middle cross section up to complete flattening and to estimate the “lifetime” of the construction.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка конечной длины; внешнее гидростатическое давление; упруго-линейновязкий материал; метод коллокации; “время жизни” конструкции.

Keywords: cylindrical shell of the finite length; external hydrostatic (side) pressure; linear elastic-linear viscous material; collocation method; “lifetime” of a construction.

Введение

В работах [1,2,3], посвященных исследованию поведения оболочек при перемещениях точек срединной поверхности, сравнимых с толщиной оболочки, используется теория, основанная на нелинейных кинематических соотношениях “перемещения ~ деформации”. Как следствие упомянутой нелинейности, уравнения равновесия имеют весьма сложный и громоздкий вид и делать какие-либо качественные предварительные заключения становится невозможным.

В работе [4] при изучении процесса развития больших перемещений точек нейтрального слоя кругового кольца, первоначально имевшего слабую овальность формы, была использована следующая кинематическая схема: форма кольца (поперечного сечения бесконечно длинной оболочки) аппроксимировалась сопряжением двух окружностей радиусов R_b и R_a ($R_b > R_a$), рис. 1. Здесь, ввиду центральной симметрии формы кольца, рассматривается только первая четверть в осях XOY . В процессе деформирования радиус R_b увеличивается, R_a — уменьшается, вследствие чего изгибающие моменты в поперечных сечениях дуг BC и CA — разных знаков. Поэтому считаем, что в точке сопряжения дуг изгибающий момент равен нулю.

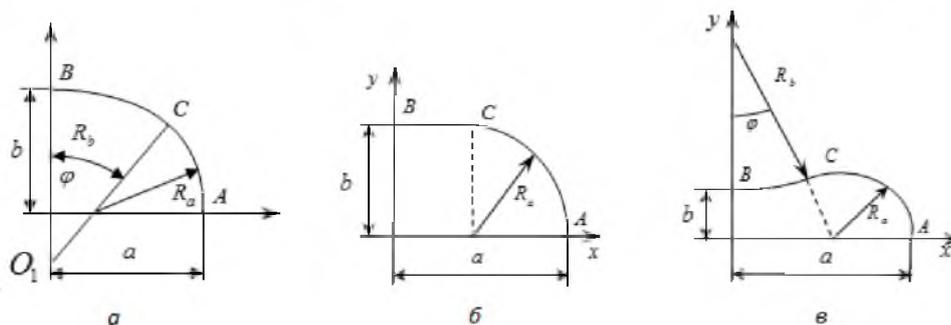


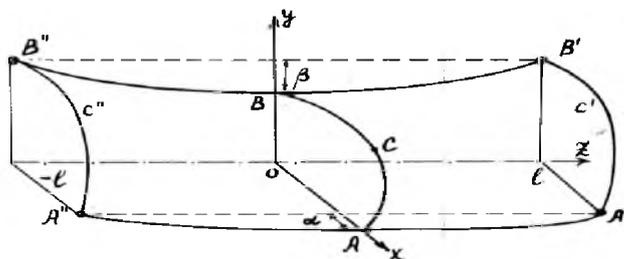
Рис. 1. Схемы деформирования поперечного сечения цилиндрической оболочки на этапе I (а), по окончании этапа I (б), на этапе II (в).

Fig. 1. Scheme of deformation of the cross section of the cylindrical casings for phase I (a), at the end of phase I (b), phase II (c)

При малой начальной овалности точка С соответствует полярному углу $\varphi = \pi / 4$. Движение по окончании этапа I (R_b стремится к бесконечности) происходит так, что $b(t)$ стремится к 0. Решение задачи доводится до состояния полного сплющивания: $b = 0$. При учете ползучести материала кольца (внешнее гидростатическое давление, достигнув некоторой величины, остается постоянным) возможно определить время сплющивания [4]; для упругопластической оболочки – соответствующее значение параметра нагружения [5].

Уравнения равновесия

Развивая описанную выше кинематическую схему, рассмотрим круглоцилиндрическую оболочку длиной $2l$. Исследуем два вида закрепления конечных сечений: шарнирное опирание и жесткую заделку контуров. Как и прежде, оболочка находится под действием внешнего гидростатического давления. Процесс сплющивания происходит так, что существуют три плоскости симметрии: XOY , XOZ и YOZ [6].



На рис. 2 даны сечения оболочек в плоскостях симметрии. При этом считаем, что в случае шарнирного опирания образующие $B''B'$ и $A''A'$ в плоскостях симметрии в процессе деформирования остаются полуволнами синусоиды; в случае жесткой заделки аналогичные образующие остаются полуволнами косинусоиды с амплитудами соответственно $\beta(t)$ и $\alpha(t)$.

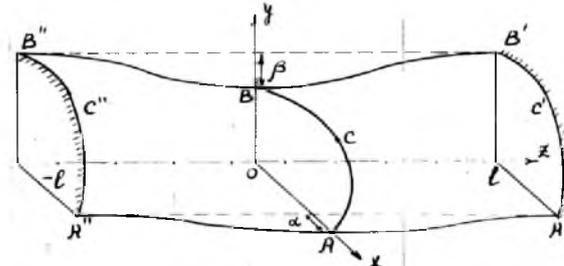


Рис. 2. Процесс деформирования оболочек с шарнирно опертыми и жестко заделанными конечными сечениями

Fig. 2. The process of deformation of shells with simply supported and rigidly clamped end sections



Точка C по-прежнему обозначает точку срединного сечения, в которой изгибающий момент M_0 (в плоскости поперечного сечения) обращается в нуль. Считаем, что в области $BB'CC'$ оболочка продавливается (вминается внутрь), в области $CC'A'A'$ — выпучивается.

Учет влияния конечности длины оболочки скажется, прежде всего, в том, что вследствие растяжения образующих цилиндра возникнут дополнительные распределенные усилия, приложенные к дугам BC и CA срединного сечения оболочки.

Осевые усилия, возникающие от растяжения образующей $B''BB'$, дадут равнодействующую, направленную по оси OY и приложенную в точке B . Аналогично, вследствие растяжения образующей $A''AA'$, равнодействующая усилий приложена в точке A вдоль оси OX (в отрицательном направлении). Относительно распределения этих дополнительных усилий по дугам: BC — $t_2(s)$ и CA — $t_1(s)$, примем следующие предположения.

Максимальное значение усилий $t_2(s)$, очевидно, в точке B , $t_1(s)_{\max}$ — в точке A .

В [4] показано, что большая часть I периода протекает при (почти) неподвижной точке C ($\psi = \frac{\pi}{4}$). Поэтому считаем, что в точке C : $t_1(s) = t_2(s) = 0$, а сами усилия $t_1(s)$ и $t_2(s)$ распределены по соответствующим дугам *линейно*, рис. 3.

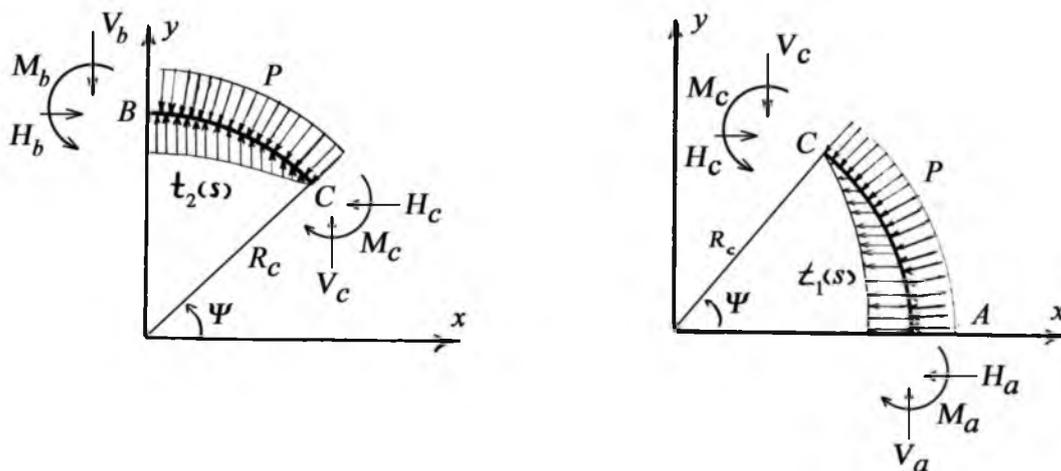


Рис. 3. Распределение усилий по дугам BC и CA срединного сечения оболочки
Fig. 3. Allocation of effort in the arcs BC and CA of the mid-section of the shell

При составлении уравнений равновесия дуг BC и CA принимаем во внимание, что вследствие симметрии формы поперечного сечения $z = 0$: $V_b = H_a = 0$. Учитываем также равнодействующие параллельных усилий $t_1(s)$ и $t_2(s)$: T_1 и T_2 соответственно и их моменты $M_c(t_1)$, $M_c(t_2)$ относительно точки C .

Равновесие дуги BC :

$$\begin{cases} H_b - H_c - p(b - R_c \sin \psi) = 0, \\ T_2 + V_c - p(R_c \cos \psi) = 0, \\ M_b + \left(\frac{P}{2}\right)(R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{P}{2}\right)(b - R_c \sin \psi)^2 - H_b(b - R_c \sin \psi) - M_c(t_2) = 0. \end{cases} \quad (1)$$



Равновесие дуги CA :

$$\begin{cases} H_c - p (R_c \sin \psi) - T_1 = 0, \\ V_a - V_c - p (a - R_c \cos \psi) = 0, \\ M_a + \left(\frac{p}{2}\right)(a - R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)(R_c \sin \psi)^2 - V_a(a - R_c \cos \psi) + M_c(t_1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) сохраняют силу в течение всего процесса сплющивания. Исключая из третьих уравнений систем (1) и (2) величины H_b , V_c , H_c и V_a , получим уравнения равновесия в моментах:

$$\begin{cases} M_b + \left(\frac{p}{2}\right)(R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)(b - R_c \sin \psi)^2 - M_c(t_2) - (T_1 + pb)(b - R_c \sin \psi) = 0, \\ M_a + \left(\frac{p}{2}\right)(a - R_c \cos \psi)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)(R_c \sin \psi)^2 + M_c(t_1) + (T_2 - pa)(a - R_c \cos \psi) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь: p – равномерное по поверхности внешнее (боковое) гидростатическое давление на оболочку, $M_{a,b,c}$ и $T_{1,2}$ – моменты и усилия, отнесенные к единице длины:

$$M_{a,b} = \int_{-h}^h \sigma z dz; \quad T = \int_{-h}^h \sigma dz.$$

Вычисление распределенных усилий t_1 и t_2 и их моментов относительно точки C продемонстрируем на примере шарнирно опертой оболочки.

Пусть a_0 и b_0 – начальные (до нагружения) значения наибольшего и наименьшего радиусов среднего поперечного сечения ($z = 0$).

При шарнирном опирании уравнения образующих $B''BB'$ и $A''AA'$:

$$y(z) = b_0 - \beta(t) \cos \frac{\pi z}{2l},$$

$$x(z) = a_0 + \alpha(t) \cos \frac{\pi z}{2l}.$$

Текущие длины этих образующих

$$\begin{aligned} l_2(t) &= \int_0^l \sqrt{1 + \beta^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l}} dz; \\ l_1(t) &= \int_0^l \sqrt{1 + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l}} dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Если принять во внимание, что рассматриваются такие перемещения и параметры оболочки, что $u/2l < 1/5$, $R_0/2l < 1/5$, здесь u – характерное перемещение, то можно воспользоваться формулой бинома с точностью $\sim 5\%$, и выражения (4) существенно упрощаются:

$$l_2(t) = \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l} \right) dz,$$



$$I_1(t) = \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \pi}{2l} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi z}{2l} \right) dz.$$

После вычисления интегралов имеем:

$$I_2(t) = l \left(1 + \frac{w_1^2}{4} \right), \quad I_1(t) = l \left(1 + \frac{w_2^2}{4} \right).$$

Здесь $w_1 = \frac{\pi}{2l} \beta(t)$, $w_2 = \frac{\pi}{2l} \alpha(t)$.

Соответствующие деформации в точках срединной поверхности на образующих BB' и AA' :

$$\varepsilon_z^0 = \frac{w_1^2}{4}, \quad \varepsilon_z^0 = \frac{w_2^2}{4} \text{ — шарнирное опирание.}$$

Так как в плоскости XOY сечение оболочки имеет возможность *изгибаться*, деформациями растяжения—сжатия срединной поверхности в плоскости XOY пренебрегаем: $\varepsilon_{\psi}^0 = 0$.

Скорости деформации в точках сечений XOY , YOZ и XOZ имеют значения (производные вычисляются по времени либо по параметру нагружения):

$$\dot{\varepsilon}_z^0 = \frac{1}{2} w_1 \dot{w}_1, \quad \dot{\varepsilon}_z^0 = \frac{1}{2} w_2 \dot{w}_2.$$

Деформации и их скорости обуславливают возникновение растягивающих напряжений σ_z^0 в точках образующих BB' и AA' срединной поверхности.

Считаем, что напряжения σ_z^0 равномерно распределены по длине образующих оболочки, причем вектор $\vec{\sigma}_z^0$ в любой точке направлен по касательной к соответствующим образующим BB' и AA' (BB'' и AA'') при любом закреплении концов оболочки, рис. 4.

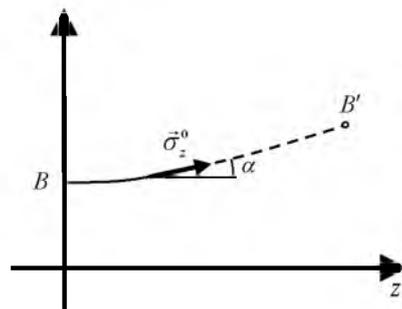


Рис. 4. Образующая оболочки и вектор внутреннего напряжения.
Fig. 4. Forming the shell and the vector of internal tension.

Проектируем вектор $\vec{\sigma}_z^0$ на ось OY (OX):

$$\sigma_{zy}^0 = |\vec{\sigma}_z^0| \sin \alpha \approx |\vec{\sigma}_z^0| \operatorname{tg} \alpha = \sigma_z^0 y'(z);$$



$$\sigma_{zx}^0 \approx \sigma_z^0 x'(z).$$

Находим средние по длине оболочки значения производных $y'(z)$, $x'(z)$. При шарнирном опирании и жесткой заделке получаем:

$$BB': \frac{1}{l} \int_0^l \beta(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{1}{l} \int_0^l \beta(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\beta(t)}{l};$$

$$AA': \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(t) \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\alpha(t)}{l}.$$

Итак, усилия в точке B (рассматриваем всю образующую $B''BB'$):

$$t_2(B) = \int_{-h}^h 2\sigma_z^0 \frac{\beta(t)}{l} d\eta = 4h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0.$$

Аналогично, в точке A :

$$t_1(A) = \int_{-h}^h 2\sigma_z^0 \frac{\alpha(t)}{l} d\eta = 4h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0.$$

В точках A и B модули усилий от растяжения образующих — максимальны.

Принимаем *линейные* по углу ψ распределения усилий $t_2(\psi)$ и $t_1(\psi)$ по дугам BC и CA , рис. 4:

$$t_2(\psi) = k_2(\varphi - \psi), \quad 0 \leq \psi \leq \varphi;$$

$$t_1(\psi) = k_1\psi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (5)$$

Множители пропорциональности k_1 и k_2 в выражениях (5) легко определяются, так как значения $t_2(B)$ и $t_1(A)$ известны:

$$k_2 = t_2(B)/\varphi = 4h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0 \frac{1}{\varphi};$$

$$k_1 = \frac{t_1(A)}{\pi/2 - \varphi} = 4h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0 \frac{1}{\pi/2 - \varphi}.$$

Интегрируя по дугам BC и CA (по переменному углу ψ), получим равнодействующие T_2 и T_1 , а также моменты $M_c(t_2)$ и $M_c(t_1)$ (усилия и моменты отнесены к единице длины):

$$T_2 = \int_0^\varphi k_2(\varphi - \psi) d\psi = k_2 \frac{\varphi^2}{2} = 2h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0 \varphi;$$

$$T_1 = \int_0^{\pi/2 - \varphi} k_1\psi d\psi = 2h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right). \quad (6)$$



$$M_c(t_2) = \int_0^{\varphi} k_2(\varphi - \psi) R_b (\sin \varphi - \sin \psi) d\psi = k_2 R_b \left(\frac{1}{2} \varphi^2 \sin \varphi - \varphi + \sin \varphi \right) =$$

$$= 4hR_b \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0 \left(\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi - 1 + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right); \quad (7)$$

$$M_c(t_1) = \int_0^{\pi/2 - \varphi} k_1 \psi R_a (\cos \varphi - \cos(\varphi + \psi)) d\psi = k_1 R_a \left(\cos \varphi \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \cos \varphi \right) =$$

$$= 4hR_a \sigma_z^0 \left(\cos \varphi \left(\frac{\pi/2 - \varphi}{2} + \frac{1}{\pi/2 - \varphi} \right) - 1 \right) \frac{\alpha(t)}{l}.$$

В [4] было показано, что I этап для бесконечно длинной оболочки, в основном, протекает при почти постоянном значении угла $\varphi \approx \psi \approx \pi/4$. Примем во внимание данное замечание и при исследовании процесса сплющивания оболочек конечной длины будем считать скорость изменения угла равной нулю: $\dot{\varphi} = 0$.

При этом сам угол φ будем определять из соотношения постоянства периметра срединного сечения $z = 0$:

$$R_b \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_a = \frac{\pi}{2} R_0 \equiv L. \quad (8)$$

В выражениях (7) для моментов $M_c(\cdot)$ введем обозначения:

$$\cos \varphi \left(\frac{\pi/2 - \varphi}{2} + \frac{1}{\pi/2 - \varphi} \right) - 1 = \gamma_1;$$

$$\sin \varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\varphi} \right) - 1 = \gamma_2.$$

Тогда моменты усилий $t_1(s)$, $t_2(s)$ относительно точки C запишутся так:

$$M_c(t_1) = 4hR_a \gamma_1 \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^0(A),$$

$$M_c(t_2) = 4hR_b \gamma_2 \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^0(B).$$

Уравнения равновесия (3) с учетом связей R_c , ψ с величинами R_a , R_b , φ [4], запишем в виде:

$$\begin{cases} M_b = \frac{P}{2} (b^2 - x_0^2 - y_0^2) + M_c(t_2) + T_1(b - y_0); \\ M_a = \frac{P}{2} (a^2 - x_0^2 - y_0^2) - M_c(t_1) - T_2(a - x_0). \end{cases} \quad (9)$$



Система (9) замыкается условием (8). Характер решения системы (8), (9) зависит от вида определяющих соотношений для материала оболочки.

Материал оболочки – упруго-линейновязкий

Считаем материал оболочки линейно вязким и принимаем определяющие соотношения “ скорости деформаций ~ напряжения ” в виде [7]:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\theta &= \Lambda \sigma'_\theta, \quad \dot{\epsilon}_z = \Lambda \sigma'_z; \\ \sigma'_\theta &= \frac{2}{3} \sigma_\theta - \frac{1}{3} \sigma_z, \quad \sigma'_z = \frac{2}{3} \sigma_z - \frac{1}{3} \sigma_\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\dot{\epsilon}_\theta$ и $\dot{\epsilon}_z$, σ_θ и σ_z – главные скорости деформаций и главные напряжения в окружном и продольном направлениях θ и z ; Λ – постоянная материала оболочки: $[\Lambda] = \frac{\text{М}^2}{\text{Н} \cdot \text{с}}$.

Из уравнений (10):

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \Lambda^{-1} (2 \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z), \\ \sigma_z &= \Lambda^{-1} (2 \dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_\theta). \end{aligned} \tag{11}$$

Уже было оговорено, что вследствие свободы изгибания оболочки в окружном направлении (сечение $z = 0$) пренебрегаем изменением периметра срединной поверхности этого сечения. Пусть ξ – координата по толщине оболочки, тогда имеем выражения для скоростей деформаций:

$$\dot{\epsilon}_\theta = \kappa_\theta \dot{\xi} \quad (\dot{\epsilon}_\theta^0 = 0), \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_z^0 + \kappa_z \dot{\xi}. \tag{12}$$

Здесь $\dot{\epsilon}_z^0$ – скорость деформации срединной поверхности в направлении оси z ; κ_θ и κ_z – главные кривизны; точкой над буквенным символом обозначаем производную по времени.

Вычисляем скорости кривизн в продольном направлении в точках B ($z = 0, \theta = \pi / 2$)

и A ($z = 0, \theta = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_z &= \dot{y}''(z) = \frac{1}{4} \dot{\beta}(t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad \text{– точка } B, \\ \dot{\kappa}_z &= \dot{x}''(z) = -\frac{1}{4} \dot{\alpha}(t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad \text{– точка } A; \end{aligned} \tag{13}$$

Из (11) получим выражения для напряжений:

$$\sigma_z^{01} = 2\Lambda^{-1} \dot{\epsilon}_z^{01}, \quad \sigma_z^{02} = 2\Lambda^{-1} \dot{\epsilon}_z^{02} \quad \text{– средние напряжения в точках } B \text{ и } A;$$

$$\sigma_\theta = \Lambda^{-1} \left[2 \left(\frac{1}{R_b} \right) \dot{\xi} + \dot{\epsilon}_z^{01} + \frac{1}{4} \dot{\beta} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \xi \right] \quad \text{в точке } B,$$



$$\sigma_{\theta} = \Lambda^{-1} \left[2 \left(\frac{1}{R_a} \right)^{\cdot} \xi + \dot{\epsilon}_z^{02} - \frac{1}{4} \dot{\alpha} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \xi \right] \text{ в точке } A.$$

Ограничимся лишь подробным изучением первого этапа деформирования срединного сечения.

Вычисляем моменты M_{θ} (в окружном направлении) в точках A и B :

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2}{3} \frac{h^3}{\Lambda} \left\{ 2 \left(\frac{1}{R_a} \right)^{\cdot} - k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\alpha}(t) \right\}; \\ M_b &= \frac{2}{3} \frac{h^3}{\Lambda} \left\{ 2 \left(\frac{1}{R_b} \right)^{\cdot} + k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\beta}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициент k имеет значения:

$$k = \frac{1}{4} \text{ при шарнирном опирании; } k = \frac{1}{2} \text{ при жесткой заделке.}$$

Из геометрических соотношений I этапа имеем зависимости ($\dot{\varphi} \approx 0$):

$$b(t) = R_b - (R_b - R_a) \cos \varphi \Rightarrow \dot{b}(t) = \dot{R}_b (1 - \cos \varphi) + \dot{R}_a \cos \varphi,$$

$$\beta(t) = b_0 - b(t) \Rightarrow \dot{\beta} = -\dot{b}(t) = -(\dot{R}_b (1 - \cos \varphi) + \dot{R}_a \cos \varphi),$$

$$a(t) = R_a (1 - \sin \varphi) + R_b \sin \varphi \Rightarrow \dot{a}(t) = \dot{R}_a (1 - \sin \varphi) + \dot{R}_b \sin \varphi,$$

$$\alpha(t) = a(t) - a_0 \Rightarrow \dot{\alpha}(t) = \dot{R}_a (1 - \sin \varphi) + \dot{R}_b \sin \varphi.$$

Для деформаций имеем выражения:

$$\epsilon_z^0 = \epsilon_z^{02}, \quad \epsilon_z^{0*} = \epsilon_z^{01}; \quad \epsilon_z^{02} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta^2, \quad \epsilon_z^{01} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}_z^{02} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta \dot{\beta}, \quad \dot{\epsilon}_z^{01} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

Вычисляем соответствующие средние напряжения в плоскостях YOZ и XOZ и усилия в точках B и A :

$$\sigma_z^{02} = \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta \dot{\beta}, \quad \sigma_z^{01} = \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha \dot{\alpha} \Rightarrow t_2(B) = 4h \frac{\beta(t)}{l} \sigma_z^{02} = 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta^2 \dot{\beta},$$

$$t_1(A) = 4h \frac{\alpha(t)}{l} \sigma_z^{01} = 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha^2 \dot{\alpha} \Rightarrow T_2 = 2h \frac{\beta}{l} \sigma_z^{02} \varphi = 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \beta^2 \dot{\beta} \varphi,$$



$$T_1 = 2h \frac{\alpha}{l} \sigma_z^{01} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \alpha^2 \dot{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad (15)$$

$$M_c(t_2) = 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_2 R_b \beta^2 \dot{\beta},$$

$$M_c(t_1) = 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_1 R_a \alpha^2 \dot{\alpha}.$$

Приводим запись уравнений равновесия (9) на I этапе:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \Lambda^{-1} h^3 \left\{ 2 \left(\frac{1}{R_b} \right)^{\square} + k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\beta}(t) \right\} = \frac{p}{2} (b^2 - x_0^2 - y_0^2) + \\ + 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_2 R_b \beta^2 \dot{\beta} + 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (b - y_0) \alpha^2 \dot{\alpha}, \\ \frac{2}{3} \Lambda^{-1} h^3 \left\{ 2 \left(\frac{1}{R_a} \right)^{\square} - k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\alpha}(t) \right\} = \frac{p}{2} (a^2 - x_0^2 - y_0^2) - \\ - 4 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \gamma_1 R_a \alpha^2 \dot{\alpha} - 2 \left(\frac{h}{l} \right) \Lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \varphi (a - x_0) \beta^2 \dot{\beta}. \end{cases} \quad (16)$$

Дальнейшие преобразования системы (16) — алгебраические: все входящие в (16) линейные величины — α, β, a, b и т. д. — относим к длине дуги BCA $L = \frac{\pi}{2} R_0$; параметр толщины оболочки

$\bar{h} = \frac{2h}{\pi R_0}$ — отношение половины толщины к длине дуги BCA , $\bar{l} = \frac{2l}{\pi R_0}$ — параметр удлинения;

вводим безразмерное время $\tau = t \Lambda p$; дифференцирование осуществляется по τ . Все безразмерные линейные величины в дальнейшем сохраняют свои прежние обозначения.

Приводим систему (16) к каноническому виду:

$$\begin{cases} a_{11} \dot{R}_b + a_{12} \dot{R}_a = b_1, \\ a_{21} \dot{R}_b + a_{22} \dot{R}_a = b_2. \end{cases} \quad (17)$$

Коэффициенты матрицы системы (17) выражаются в виде:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{4}{3} h^3 - \frac{2}{3} \pi^2 k h^3 \frac{R_b^2}{l^2} (1 - \cos \varphi) + \pi^2 h \frac{R_b^3}{l^3} \gamma_2 \beta^2 (1 - \cos \varphi) - \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2} \frac{h R_b^2}{l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (b - y_0) \alpha^2 \sin \varphi, \\ a_{12} &= -\frac{2}{3} h^3 k \pi^2 \frac{R_b^2}{l^2} \cos \varphi + \pi^2 h \gamma_2 \frac{R_b^3}{l^3} \beta^2 \cos \varphi - \end{aligned}$$



$$-\frac{\pi^2}{2} \frac{hR_b^2}{l^3} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (b - y_0) \alpha^2 (1 - \sin \varphi),$$

$$b_1 = \frac{R_b^2}{2} (b^2 - x_0^2 - y_0^2);$$

$$a_{21} = -\frac{2}{3} k \pi^2 h^3 \frac{R_a^2}{l^2} \sin \varphi + \pi^2 h \frac{R_a^3}{l^3} \gamma_1 \alpha^2 \sin \varphi -$$

$$-\frac{\pi^2}{2} \frac{hR_a^2}{l^3} \varphi (a - x_0) (1 - \cos \varphi) \beta^2,$$

$$a_{22} = -\frac{4}{3} h^3 - \frac{2}{3} \pi^2 k h^3 \frac{R_a^2}{l^2} (1 - \sin \varphi) + \pi^2 h \frac{R_a^3}{l^3} \gamma_1 \alpha^2 (1 - \sin \varphi) -$$

$$-\frac{\pi^2}{2} \frac{hR_a^2}{l^3} \varphi (a - x_0) \beta^2 \cos \varphi,$$

$$b_2 = \frac{R_a^2}{2} (a^2 - x_0^2 - y_0^2).$$

Здесь (напомним): $\varphi = \left(1 - \frac{\pi}{2} R_a \right) / (R_b - R_a),$

$$\alpha(\tau) = a(\tau) - a_0, \quad a = R_a(1 - \sin \varphi) + R_b \sin \varphi,$$

$$\beta(\tau) = b_0 - b(\tau), \quad b = R_b(1 - \cos \varphi) + R_a \cos \varphi,$$

$$x_0 = R_b \sin \varphi, \quad y_0 = R_a \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{\varphi} - 1,$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\cos \varphi}{\pi/2 - \varphi} - 1;$$

Система (17) решается при начальных условиях [4]:

$$\tau = 0: R_a(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{\alpha_0}{\sqrt{2} - 1}, \quad R_b(0) = \frac{2}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2} - 1}.$$

Считаем, что во время нагружения возрастающим давлением $p < p_3$ оболочка – упругая и начальное (для решения задачи ползучести) значение «эксцентриситета» α_0 может быть вычислено по формуле (α_{00} – величина эксцентриситета до начала нагружения):

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{00}}{1 - p/p_3},$$

где p_3 – эйлерово давление для бесконечно длинной упругой оболочки [8].

В таблицах 1 и 2 представлены результаты решения системы (17) [6]:



Таблица 1

Результаты решения системы (17) в зависимости от параметра длины \bar{l} ($\bar{h} = 0.03$)

\bar{l}	∞	12.5	5	2.5
$R_a(10)$	0.6325	0.6325	0.6325	0.6325
$R_g(10)$	0.6407	0.6407	0.6407	0.6407
R_a^*	0.3070	0.2997	0.1835	0.0419
R_g^*	∞	∞	∞	∞
τ^*	106.5	108.5	154	1080

Здесь показано влияние параметра \bar{l} (при фиксированном значении параметра толщины $\bar{h} = 0,03$) на время протекания I этапа – τ^* и на конечную конфигурацию срединного сечения в конце I этапа: чем *короче* оболочка, тем *более* сплющивается при $\tau = \tau^*$ ее срединное сечение, что видно по величине радиуса R_a^* ; оболочки, параметр длины которых *превышает* 12.5, можно считать «бесконечно длинными»; $R_a(10), R_g(10)$ – значения радиусов R_a и R_g при $\tau = 10$ (время – безразмерное).

На рис. 5 показана характерная картина завершения I этапа деформирования линейно вязкой “короткой” оболочки ($\bar{l} < 5$).

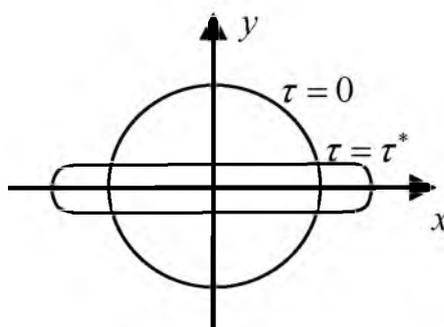


Рис. 5. Форма срединного поперечного сечения линейновязкой оболочки в начале и в конце этапа I деформирования

Fig. 5. Form the median of the cross-section limanowski shell at the beginning and at the end of phase I deformation

Очевидно, для таких оболочек рассматривать II этап не имеет смысла.

Таблица 2

Результаты решения системы (17) в зависимости от параметра \bar{h} ($\bar{l} = 2.5$)

\bar{h}	0.03	0.017	0.012
$R_a(10)$	0.6325	0.6094	0.5058
$R_g(10)$	0.6407	0.6662	0.7707
R_a^*	0.0419	0.0177	0.0097
R_g^*	∞	∞	∞
τ^*	1080	1130	1215



Здесь даны значения радиусов R_a и R_g при $\tau = 10$. Естественно, чем *тоньше* оболочка, тем *более* сплющивается срединное сечение при $\tau = \tau^*$. При этом время завершения I этапа несколько увеличивается.

Заключение

В представленной работе продемонстрирован эффект удачного математического моделирования процесса деформирования цилиндрической оболочки в условиях необходимости учета больших перемещений точек срединной поверхности. Сравнительно с цитируемыми выше работами [1,2,3] данный подход дает представление о процессе в течение всего времени жизни конструкции.

Отметим, что адекватность кинематической схемы, предложенной в [4], проверена экспериментально [9].

Список литературы References

1. Муштарь Х.М., Галимов К.З. 1957. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 431.
Mushtary H.M., Galimov K.Z. 1957. The non-linear theory of elastic shells. Kazan, Tatknigoizdat, 431.
2. Новожилов В.В. 1962. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 378.
Novozhylov V.V. 1962. The theory of thin shells. Leningrad, Sudpromgiz, 378.
3. Лопаницын Е.А., Матвеев Е.А. 2011. Устойчивость цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами под действием внешнего давления. Изв. РАН Механика твердого тела, №2 : 17-25.
Loranizyn E.A., Matveev E.A. 2011. The stability of non-perfect cylindrical shells under external pressure. Proceedings of RAS. Mechanics of solid body, N2: 17 – 25.
4. Ванько В.И., Шестериков С.А. 1965. Сплющивание кольца в условиях ползучести. Инженерный журнал. Механика твердого тела, №2: 127-130 .
Vanko V.I., Shesterikov S.A. 1965. The flattening of ring on creep conditions. Engineer journal. Mechanics of solid body, N2: 127 – 130
5. Ванько В.И. 2011. Цилиндрическая оболочка под внешним давлением: неклассическое решение задачи о больших перемещениях. Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского, N 4, часть 4: 1413–1414.
Vanko V.I. 2011. The cylindrical shell under external pressure: non-classical solution on larger movements conditions. The Herald of Nizhny Novgorod Lobachevskiy University, 4(4): 1413 – 1414.
6. Ванько В.И. 1966. Продольный изгиб и выпучивание. Дисс... канд. физ.- мат. наук.- М., МГУ: 136.
Vanko V.I. 1966. Bucling and stability. Ph.D. Thesis. Moscow State University, 136.
7. Odquist F.K.G. 1966. Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford, Clarendon Press: 168.
8. Вольмир А.С. 1963. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 879.
Volmir A.S. 1963. The elastic systems stability. Moscow, Fizmatgiz, 879.
9. Локощенко А.М. 2016. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва, Физматлит, 502.
Lokoshchenko A.M. 2016. The creep and creep rupture of metals. Moscow, Fizmatlit, 502.