



УДК 621.397

**ОБОБЩЕННЫЙ СУБПОЛОСНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

**THE GENERALIZED SUBBAND ANALYSIS ON THE BASIS OF UNITARY TRANSFORMATIONS**

**А.А.Черноморец, Е.В. Болгова, Д.А. Черноморец**  
**A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova, D.A. Chernomorets**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85*  
*Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia*

*e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru, zhilyakov@bsu.edu.ru, bolgova\_e@bsu.edu.ru*

*Аннотация.* В данной работе рассмотрен единый подход к исследованию свойств сигналов и изображений на основе обобщенного субполосного анализа при использовании различных унитарных преобразований. Приведены соотношения для вычисления обобщенных субполосных матриц.

*Resume.* In this paper uniform approach to research of properties of signals and images on the basis of the generalized subband analysis using different unitary transformations is considered. Ratios for computation of the generalized subband matrixes are given.

*Ключевые слова:* унитарные преобразования, ортогональные функции, обобщенный субполосный анализ, обобщенные субполосные матрицы.

*Keywords:* unitary transformations, orthogonal functions, generalized subband analysis, generalized subband matrixes.

В современных информационно-телекоммуникационных системах основной объем информации представляется в виде сигналов и изображений в цифровой форме. Анализ данной информации осуществляется как во временной (пространственной) области, так и в области преобразований. В данной статье рассматривается возможность единого подхода к анализу свойств сигналов и изображений при использовании различных ортогональных преобразований.

При анализе сигналов и изображений в цифровой форме в области преобразований, также называемом анализом изображений в частотной области  $D_2$  (области нормированных пространственных частот (ПЧ)), в настоящее время широко применяют различные ортогональные системы базисных функций [1-3]:

- тригонометрические функции ( $\exp(-jnu)$ ,  $\sin(nu)$ ,  $\cos(nu)$ ), функции Хартли  $cas(nu)$ ,
- функции Уолша ( $wal(n, u)$ ,  $had(n, u)$ ,  $pal(n, u)$ ),
- функции Хаара  $har(nu)$  и др.,

которым соответствуют различные унитарные преобразования сигналов и изображений.

Далее в работе в качестве объекта анализа использованы изображения [4], что не снижает общности полученных результатов.

В дискретном случае анализ в области пространственных частот позволяет выделить различные свойства изображений  $\Phi = (f_{ik})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , на основе анализа значений коэффициентов  $F_{nm}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , унитарного преобразования  $W$  в выбранном базисе на основе ортогональной системы базисных функций  $\{w_{nm}(u, v)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $(u, v) \in D_2$ :

$$F_{nm} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik} w_{nm}(i, k). \tag{1}$$

При этом элементы анализируемого изображения  $\Phi$  могут быть представлены частичными суммами обобщенного ряда Фурье,

$$f_{ik} = \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M F_{nm} w_{nm}^*(i, k), \tag{2}$$

где  $w_{nm}^*(i, k)$  – сопряженные функции, значения  $a, b$  зависят от выбранного унитарного преобразования и, в большинстве случаев, равны  $N$  и  $M$  соответственно,

$$a = N, \quad b = M.$$



Коэффициенты  $F_{nm}$ ,  $n=1,2,\dots,N$ ,  $m=1,2,\dots,M$ , унитарного преобразования  $W$  изображения  $\Phi$  можно представить в виде матрицы  $F = (F_{nm})$ , размерность  $N \times M$  которой совпадает с размерностью анализируемого изображения.

Кроме того, известно, что указанные выше двумерные ортогональные функции, используемые в качестве базиса при обработке изображений, являются разделяемыми, поэтому, преобразование можно представить в виде преобразования строк изображения в базисе функций  $\{w_n(i)\}$ ,  $i,n=1,2,\dots,N$ , с последующим преобразованием столбцов полученного результата в базисе функций  $\{w_m(k)\}$ ,  $k,m=1,2,\dots,M$ .

Следовательно, выражения (1), (2) могут быть записаны в матричном виде:

$$F = W_N \Phi W_M^T, \quad (3)$$

$$\Phi = \frac{1}{ab} W_N^{-1} F (W_M^T)^{-1}, \quad (4)$$

где  $W_N$  и  $W_M$  – матрицы унитарных преобразований размерности  $N \times N$  и  $M \times M$  соответственно, строки которых составлены из базисных функций  $\{w_n(i)\}$ ,  $i,n=1,2,\dots,N$ , и  $\{w_m(k)\}$ ,  $k,m=1,2,\dots,M$ .

Очевидно, что матрицы  $W_N$  и  $W_M$  являются ортогональными. Следовательно,

$$W_N^T = W_N^{-1}, \quad W_M^T = W_M^{-1}.$$

Тогда, соотношение (4) может быть записано в виде:

$$\Phi = \frac{1}{ab} W_N^T F W_M. \quad (5)$$

Если  $W_N$  и  $W_M$  – симметрические матрицы с действительными элементами, то справедливы следующие соотношения:

$$F = W_N \Phi W_M, \quad (6)$$

$$\Phi = \frac{1}{ab} W_N F W_M. \quad (7)$$

Если  $W_N$  и  $W_M$  – симметрические матрицы с комплексными элементами, то, обычно, применяют следующие преобразования:

$$F = W_N \Phi W_M, \quad (8)$$

$$\Phi = \frac{1}{ab} W_N^* F W_M^*, \quad (9)$$

где  $W_N^*$  и  $W_M^*$  – комплексно-сопряженные матрицы.

Известно, что для преобразования (3) в базисе ортогональных функций справедлива теорема Парсеваля [2] (теорема Планшереля, обобщенная формула Релея), которая в дискретном виде для изображений в цифровой форме записывается следующим образом:

$$\|\Phi\|^2 = \frac{1}{ab} \|F\|^2$$

или

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik}^2 = \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |F_{nm}|^2.$$

В случае непрерывных базисных функций соответствующие соотношения для вычисления коэффициентов преобразования, представления изображения в виде обобщенного ряда Фурье и теорема Парсеваля имеют следующий вид:

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik} w_u(i) w_v(k), \quad (10)$$

$$f_{ik} = \frac{1}{a_0 b_0} \iint_{(u,v) \in D_2} F(u, v) w_u^*(i) w_v^*(k) du dv, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik}^2 = \frac{1}{a_0 b_0} \iint_{(u,v) \in D_2} |F(u, v)|^2 du dv, \quad (12)$$



где значения  $a_0, b_0$  зависят от выбранного преобразования.

В контексте субполосного анализа равенство Парсеваля (12) целесообразно представить в виде

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R E_{sr}(\Phi), \quad (13)$$

где

$$E_{sr}(\Phi) = \frac{1}{a_0 b_0} \iint_{(u,v) \in V_{sr}} |F(u,v)|^2 du dv, \quad (14)$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

где  $V_{sr}$  – подобласти пространственных частот (ППЧ), которые получены на основании разбиения области пространственных частот  $D_2$  на непересекающиеся подобласти (в общем случае, выбор разбиения области пространственных частот зависит от применяемой системы базисных функций),

$$D_2 = \bigcup_{s=1}^S \bigcup_{r=1}^R V_{sr},$$

$$V_{sr} = D_s \cap G_r, \quad (15)$$

где  $D_s$  и  $G_r$  – некоторые субполосы в области  $D_2$  (зависят от выбранного преобразования).

Представляется естественным интегралы вида (14) называть частями энергии (евклидовой нормы) изображения в заданном базисе функций, попадающей в соответствующие ППЧ.

В свою очередь отношения

$$P_{sr}(\Phi) = E_{sr}(\Phi) / \|\Phi\|^2, \quad (16)$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

представляют собой доли энергии, которые позволяют судить о ее сосредоточенности в выбранных ППЧ  $V_{sr}, s = 1, 2, \dots, S, r = 1, 2, \dots, R$ .

Можно доказать следующее утверждение. Значения частей энергий изображения вида (14), соответствующие подобласти пространственных частот  $V_{sr}$  вида (15) при заданной системе базисных функций, определяются соотношением

$$E_{sr}(\Phi) = \text{tr}(A_s \Phi B_r \Phi^T), \quad (17)$$

где «tr» означает след матрицы, а «T» – операцию транспонирования матрицы,  $A_s = (a_{in}^s), i, n = 1, 2, \dots, N$ , и  $B_r = (b_{km}^r), k, m = 1, 2, \dots, M$ , – обобщенные субполосные матрицы, соответствующие подобласти  $V_{sr}$  при заданной системе базисных функций, значения элементов которых определяются на основании следующих выражений:

$$a_{in}^s = \frac{1}{a_0} \int_{u \in D_s} w_u(i-1) w_u(n-1) du, \quad (18)$$

$$b_{km}^r = \frac{1}{b_0} \int_{v \in G_r} w_v(k-1) w_v(m-1) dv. \quad (19)$$

Справедливость этого утверждения доказывается непосредственной подстановкой в определение (14) представления (10).

Для унитарных преобразований, соответствующих симметрической матрице, интегралы в выражениях (18) и (19), в большинстве случаев, можно вычислить точно.

Учитывая соотношения (16) и (17), соотношение для вычисления доли энергии изображения, соответствующей ППЧ  $V_{sr}$ , при заданной системе базисных функций имеет вид

$$P_{sr}(\Phi) = \frac{\text{tr}(A_s \Phi B_r \Phi^T)}{\text{tr}(\Phi \Phi^T)}. \quad (20)$$

Соотношение (20) позволяет при заданной системе базисных функций реализовать анализ распределения значений долей энергий изображения по различным подобластям пространственных частот вида (14), на которые разбита вся область пространственных частот.



Так, при дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) изображение представляется в виде ряда Фурье по следующим системам базисных комплексных функций:

$$w_n(i) = \exp(-j2\pi(n-1)(i-1)/N), \quad i, n = 1, 2, \dots, N,$$

$$w_m(k) = \exp(-j2\pi(m-1)(k-1)/M), \quad k, m = 1, 2, \dots, M,$$

где  $j$  – мнимая единица.

Тогда, комплексная матрица  $W_N$  ДПФ в соотношениях (3)-(9) имеет вид (матрица  $W_M$  задается аналогично):

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Непрерывные базисные функции и параметры в соотношениях (10)-(12) для преобразования Фурье задаются следующими значениями:

$$w_u(i) = e^{-ju(i-1)}, \quad (21)$$

$$a_0 = b_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad (22)$$

$$D_2 = \{(u, v) \mid -\pi \leq u, v < \pi\}. \quad (23)$$

При анализе изображений на основе преобразования Фурье подобласть пространственных частот  $V_{sr}$  задается следующим образом

$$V_{sr} = \{ (u \in [-u_{s2}, -u_{s1}] \cup [u_{s1}, u_{s2}]) \cap (v \in [-v_{r2}, -v_{r1}] \cup [v_{r1}, v_{r2}]) \},$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

$$u_{11} = 0, \quad u_{S,2} = \pi, \quad u_{s+1,1} = u_{s,2}, \quad v_{11} = 0, \quad v_{R,2} = \pi, \quad v_{r+1,1} = v_{r,2}.$$

При указанном разбиении в подобласти  $V_{sr}$  переменная  $u$  принимает значения из интервала  $D_s$  (субполосы) оси абсцисс плоскости ПЧ

$$D_s = [-u_{s2}, -u_{s1}] \cup [u_{s1}, u_{s2}], \quad (24)$$

тогда как одновременно переменная  $v$  попадает в интервал  $G_r$  (субполосу) оси ординат

$$G_r = [-v_{r2}, -v_{r1}] \cup [v_{r1}, v_{r2}]. \quad (25)$$

Подобласть пространственных частот  $V_{sr}$  при анализе изображений на основе преобразования Фурье схематично изображена на рисунке 1.

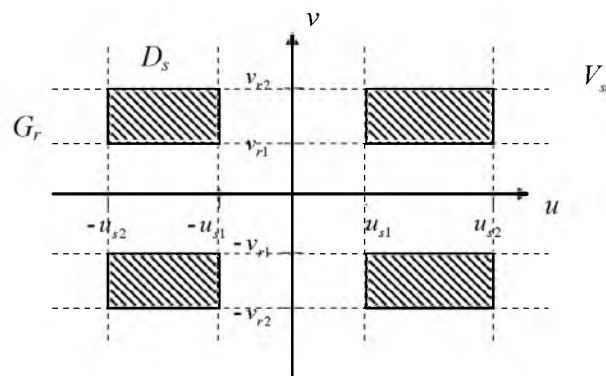


Рис. 1. Подобласть пространственных частот  $V_{sr}$  при анализе изображений на основе преобразования Фурье

Fig. 1. Subarea of spatial frequencies  $V_{sr}$  in the analysis of images on the basis of Fourier transform



При анализе изображений на основе преобразования Фурье можно показать, что значения элементов субполосных матриц в выражениях (18)-(19) для областей  $D_s$  и  $G_r$  вида (24)-(25) определяются следующими соотношениями [4, 5]:

$$a_n^s = \frac{1}{2\pi} \int_{u \in D_s} e^{-ju(i-1)} e^{-ju(n-1)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{u \in D_s} e^{-ju(i-n)} du = \begin{cases} \frac{\sin(u_{s2}(i-n)) - \sin(u_{s1}(i-n))}{\pi(i-n)}, & i \neq n, \\ \frac{u_{s2} - u_{s1}}{\pi}, & i = n, \end{cases} \quad (26)$$

$$b_{km}^r = \frac{1}{2\pi} \int_{v \in G_r} e^{-jv(k-1)} e^{-jv(m-1)} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{v \in G_r} e^{-jv(k-m)} dv = \begin{cases} \frac{\sin(v_{r2}(k-m)) - \sin(v_{r1}(k-m))}{\pi(k-m)}, & k \neq m, \\ \frac{v_{r2} - v_{r1}}{\pi}, & k = m. \end{cases} \quad (27)$$

Аналогичным образом могут быть получены субполосные матрицы для косинусного преобразования Фурье [6, 7].

Преобразование Уолша (Уолша-Адамара) основано на базисе функций Уолша, которые образуют полную систему ортонормированных прямоугольных функций (принимают значения -1 и +1). Множество функций Уолша обычно рассматривают в трех вариантах, отличающихся последовательностью расположения функций в системе, а именно:

- упорядочение по Уолшу (по частности),
- упорядочение по Адамару (естественное),
- упорядочение по Пэли (диадическое).

При упорядочении по Адамару матрица преобразования Уолша-Адамара для системы из  $N = 2^n$  функций Уолша может быть получена в результате последовательного построения  $n$  блочных матриц  $H_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , следующим образом:

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad H_0 = (1).$$

В данном случае матрица преобразования (базисным функциям соответствуют строки данной матрицы) задается соотношением:

$$W_N = H_n.$$

Так, при упорядочении по Адамару матрица преобразования Уолша-Адамара для системы из восьми функций Уолша имеет вид:

$$W_N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Значения функций Уолша также можно получить из множества функций Радемахера при использовании кода Грея [1].

Непрерывные базисные функции и параметры в соотношениях (10)-(12) для преобразований Уолша-Адамара задаются следующими значениями:

$$a_0 = b_0 = 1, \quad (28)$$

$$D_2 = \{(u, v) \mid 0 \leq u, v < 1\}, \quad (29)$$

Первые восемь непрерывных функций Уолша приведены на рисунке 2.

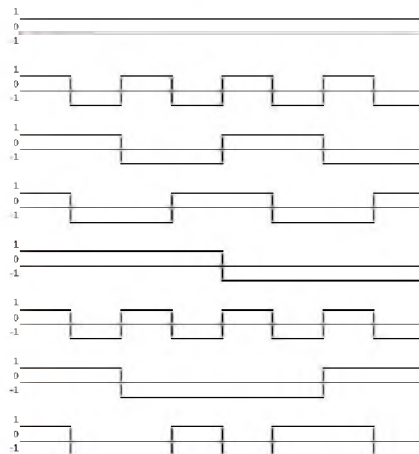


Рис. 2. Пример функций Уолша  
Fig. 2. Example of Walsh functions

При применении преобразований Уолша-Адамара подобласть пространственных частот  $V_{sr}$  определяется следующим образом:

$$V_{sr} = \{ (u \in [u_{s1}, u_{s2})) \cap (v \in [v_{r1}, v_{r2})) \},$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

$$u_{11} = 0, \quad u_{S,2} = 1, \quad u_{s+1,1} = u_{s,2}, \quad v_{11} = 0, \quad v_{R,2} = 1, \quad v_{r+1,1} = v_{r,2}.$$

При указанном разбиении в подобласти  $V_{sr}$  переменные  $u, v$  принимают значения из интервалов  $D_s$  и  $G_r$ ,

$$D_s = [u_{s1}, u_{s2}), \tag{30}$$

$$G_r = [v_{r1}, v_{r2}). \tag{31}$$

При применении преобразования Уолша-Адамара подобласть пространственных частот  $V_{sr}$  схематично изображена на рисунке 3.

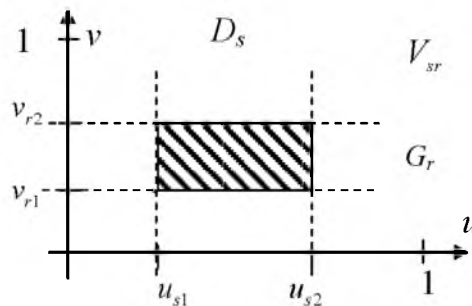


Рис. 3. Подобласть пространственных частот  $V_{sr}$   
при анализе изображений на основе преобразований Уолша

Fig. 3. Subarea of spatial frequencies  $V_{sr}$  in the analysis of images on the basis of Walsh transforms

При анализе изображений на основе преобразования Уолша-Адамара (базисные функции упорядочены по Адамару) значения элементов  $a_{in}^s$  субполосной матрицы  $A_s$  в выражении (18) для области  $D_s$  вида (30) определяется следующим образом (учтем симметричность матрицы преобразования Уолша-Адамара при упорядочении функций по Адамару, а также соотношения (28), (30)):

$$a_{in}^s = \int_{u \in D_s} w_u(i-1)w_u(n-1)du = \int_{u_{s1}}^{u_{s2}} w_{i-1}(u)w_{n-1}(u)du = \int_{u_{s1}}^{u_{s2}} w_{(i-1) \oplus (n-1)}(u)du, \tag{32}$$



где  $(i-1) \oplus (n-1)$  – результат сложения по модулю 2 номеров в двоичной системе чисел  $(i-1)$  и  $(n-1)$ .

Учитывая тот факт, что функции Уолша являются кусочно-постоянными, то интеграл в правой части выражения (32) может быть записан в виде конечной суммы. Тогда,

$$a_{in}^s = \frac{1}{N} \sum_{n_0=u_{s1}}^{u_{s2}} w_{(i-1) \oplus (n-1)}(n_0), \tag{33}$$

$$i, n = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

Аналогично можно получить следующее соотношение для вычисления значений элементов субполосной матрицы  $B_r$  при анализе изображений на основе преобразования Уолша-Адамара:

$$b_{km}^r = \frac{1}{M} \sum_{n_0=u_{r1}}^{u_{r2}} w_{(k-1) \oplus (m-1)}(n_0), \tag{34}$$

$$k, m = 1, 2, \dots, M, \quad r = 1, 2, \dots, R.$$

Преобразование Хаара основано на функциях Хаара  $har_i(x)$ , определенных на интервале  $x \in [0,1)$  и  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , где  $N = 2^n$ .

Базисные функции Хаара задаются на основании следующих соотношений:

$$har_0(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in [0,1),$$

$$har_i(x) = h_{pq}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & x \in [(q-1)/2^p, (q-1/2)/2^p) \\ -2^{p/2}, & x \in [(q-1/2)/2^p, q/2^p) \\ 0, & \text{для всех остальных } x \in [0,1], \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{35}$$

где  $p, q$  – целые положительные числа,

$$i = 2^p + q - 1, \quad 1 \leq q < 2^p.$$

Матрица преобразования Хаара, строки которой составлены из базисных функций Хаара, при  $N = 8$  имеет следующий вид:

$$W_N = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Первые восемь непрерывных функций Хаара приведены на рисунке 4.

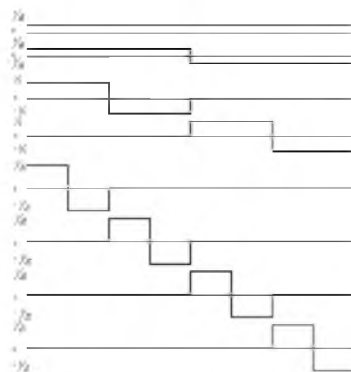


Рис.4. Пример функций Хаара  
Fig. 4. Example of Haar functions



При применении преобразования Хаара подобласть пространственных частот  $V_{sr}$  совпадает с ППЧ, применяемом при преобразовании Уолша-Адамара.

При анализе изображений на основе преобразования Хаара значения элементов  $a_{in}^s$  субполосной матрицы  $A_s$  в выражении (18) для области  $D_s$  вида (30) определяется следующим образом (в виду несимметричности матрицы преобразования Хаара соответствующий интеграл может быть вычислен приблизительно):

$$a_{in}^s = \int_{u \in D_s} har_u(i-1)har_u(n-1)du = \sum_{u=u_{s1}}^{u_{s2}} har_u(i-1)har_u(n-1), \quad (36)$$

Аналогичным образом можно указать значения элементов субполосных матриц для других унитарных преобразований.

Применение субполосных матриц, их собственных чисел и собственных векторов позволяет вычислить распределение долей энергий изображений по соответствующим подобластям пространственных частот, а также выделять оптимальные (в выбранном базисе) субполосные компоненты изображений [8], соответствующие различным унитарным преобразованиям. Применение субполосных матриц также обеспечивает решение задач повышения визуального качества изображений, выделение контуров и др.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-07-01570а и при поддержке Государственного задания НИУ «БелГУ» (код проекта № 358).*

### Список литературы

#### References

1. Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980. – 248 с.  
Ahmed N., Rao K. Ortogonal'nye preobrazovaniya pri obrabotke cifrovyyh signalov. – М.: Svjaz', 1980. – 248 s.
2. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Сов. Радио, 1979. – 312 с.  
Jaroslavskij L.P. Vvedenie v cifrovuju obrabotku izobrazhenij. – М.: Sov. Radio, 1979. – 312 s.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – 312 с.  
Prjett U. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij. – М.: Mir, 1982. – 312 s.
4. Жилияков, Е.Г., Черноморец А.А. О частотном анализе изображений // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 94-103.  
Zhilyakov, E.G., Chernomorets A.A. O chastotnom analize izobrazhenij // Voprosy radioelektroniki. Ser. JeVT. – 2010. – Vyp. 1. – S. 94-103.
5. Черноморец, А.А. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам [Текст] / А.А. Черноморец, О.Н. Иванов // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2010. – № 19 (90). – Вып. 16/1. – С. 161-166.  
Chernomorets, A.A. Metod analiza raspredelenija jenergij izobrazhenij po zadannym chastotnym intervalam [Tekst] / A.A. Chernomorets, O.N. Ivanov // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2010. – № 19 (90). – Vyp. 16/1. – S. 161-166.
6. Черноморец А.А., Волчков В.П. О свойствах квазисубполосных и G-субполосных матриц // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2012. – № 1 (120). – Вып. 21/1. – С. 126-134.  
Chernomorets A.A., Volchkov V.P. O svojstvah kvazisubpolosnyh i G-subpolosnyh matric // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2012. – № 1 (120). – Vyp. 21/1. – S. 126-134.
7. Черноморец А.А., Болгова Е.В. Об анализе данных на основе косинусного преобразования // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2015. – № 1 (198). – Вып. 33/1. – С. 68-73.  
Chernomorets A.A., Bolgova E.V. Ob analize dannyh na osnove kosinusnogo preobrazovaniya // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2015. – № 1 (198). – Vyp. 33/1. – S. 68-73.
8. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А. Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений // Информационные системы и технологии. – № 1 (75). – 2013. – С. 5-11.  
Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A. Ob optimal'nom vydelenii subpolosnyh komponent izobrazhenij // Informacionnye sistemy i tehnologii. – № 1 (75). – 2013. – S. 5-11.