КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 621.396.01

ОЦЕНИВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ
DISCRETE FUNCTIONS DERIVATIVES ESTIMATION

Е.Г.Жиляков, А.А.Черноморец, Е.В. Болгова
E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

e-mail: chernomorets @bsu.edu.ru, zhilyakov @bsu.edu.ru, bolgova _e@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе предложен метод оценивания значений производных одномерных и двумерных дискретных функций, оптимальный в смысле величины частей их энергии, соответствующих заданным частотным подобластям.

Resume. The method of estimation of one-dimensional and two-dimensional discrete functions derivatives is given in the paper. This method is optimal in the sense of values of their energy parts corresponding to the given frequency subareas.

Ключевые слова: оценка производной, дискретная функция, частотная подобласть, субполосная матрица
Keywords: derivatives estimation, discrete function, frequency subarea, subband matrix

Решение проблемы оценивания значений производных дискретных функций имеет существенное прикладное значение. Так, в задачах цифровой обработки сигналов проблема вычисления значений производных возникает, например, при решении задач управления. Результаты оценивания производных двумерных дискретных функций находят широкое применение в задачах сегментации, выделения границ объектов на цифровых изображениях, в задачах повышения их резкости и др.

Сложность получения оценок производных обусловлена некорректностью задачи, так как скорость изменения дискретной функции, следовательно, и значение производной, может быть очень значительной. В силу этого классические численные методы вычисления приближенных значений производных, в большинстве случаев, оказываются малопригодными, так как они ориентированы на класс гладких функций.

В настоящее время большинство подходов вычисления приближенных значений производных [1, 2] не позволяют учесть частотные свойства исходных дискретных функций, например, сосредоточенность энергии в отдельной частотной подобласти (интервале).

В данной работе задачу оценивания производных предлагается решать как задачу вычисления приближенных значений производной функции, интерполирующей исходную, при условии сохранения частотных свойств в заданной частотной подобласти V [3]. Основные теоретические положения предлагаемого подхода изложены, используя двумерные представления дискретных функций.

Исходную двумерную дискретную функцию представим в виде матрицы вещественных чисел $U=(um_1,um_2)$, $m_1=1,2,\ldots,M_1$, $m_2=1,2,\ldots,M_2$. Значения интерполирующей дискретной функции $\hat{U}=(\hat{u}\cdot n_1,n_2)$, $n_1=1,2,\ldots,N_1$, $n_2=1,2,\ldots,N_2$, следует вычислять в D_1 и D_2 промежуточных точках между исходными точками вдоль соответствующих осей координат, то есть справедливы следующие соотношения:

$$N_1=D_1(M_1-1)+1,\quad N_2=D_2(M_2-1)+1, \tag{1}$$

при этом интерполирующие равенства имеют вид:

$$\hat{u}_{D_1(m_1-1)+1,D_2(m_2-1)+1}=u_{m_1m_2},\ m_1=1,2,\ldots,M_1,\ m_2=1,2,\ldots,M_2. \tag{2}$$

Отметим, что при решении практических задач дискретные функции являются результатом регистрации с шагом Δ_1 и Δ_2 функций $u(t_1,t_2)$, описывающих реальные явления. В силу физической природы этих функций они являются положительными и бесконечное число раз дифференцируемыми, следовательно, имеет место следующее представление:

$$u(t_1,t_2) = u_{11} + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z_{12}(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 , \tag{3}$$

и для ее начальных значений при $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$ имеем

$$u(t_1,0) = u_{11} + \int_0^{t_1} z_1(\tau_1) d\tau_1 , \quad u(0,t_2) = u_{11} + \int_0^{t_2} z_2(\tau_2) d\tau_2 \tag{4}$$

$$0 \le t_1 \le (M_1 - 1)\Delta_1 , \quad 0 \le t_2 \le (M_2 - 1)\Delta_2 ,$$

в которых подынтегральные функции имеют смысл производных функции $u(t_1,t_2)$.

Аппроксимация представлений (3), (4) позволяет представить значения интерполирующей функции в следующем виде:

$$\hat{u}_{i_1 i_2} = u_{11} + \sum_{k_1=1}^{i_1-1} \sum_{k_2=1}^{i_2-1} \psi_{k_1 k_2} , \tag{5}$$

$$i_1 = 2,3,\ldots,N_1 , \quad i_2 = 2,3,\ldots,N_2 ,$$

и для начальных строки и столбца:

$$\hat{u}_{k,1} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{k-1} \varphi_{k_1,1} , \quad k = 2,3,\ldots,N_1 , \tag{6}$$

$$\hat{u}_{1,i} - u_{11} = \sum_{k_2=1}^{i-1} \varphi_{1,k_2} , \quad i = 2,3,\ldots,N_2 , \tag{7}$$

где значения $\{\psi_{k_1 k_2}\}$, $\{\varphi_{k_1,1}\}$, $\{\varphi_{1,k_2}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, $k_2 = 1,2,\ldots,N_2 - 1$, являются аппроксимациями второй и первой производных соответствующих фрагментов интерполирующей дискретной функции.

При этом интерполяционные равенства принимают соответствующий вид:

$$u_{m_1 m_2} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{D_1(m_1-1)} \sum_{k_2=1}^{D_2(m_2-1)} \psi_{k_1 k_2} , \tag{8}$$

$$m_1 = 2,3,\ldots M_1 , \quad m_2 = 2,3,\ldots M_2 ,$$

и для начальных строки и столбца:

$$u_{m_1,1} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{D_1(m_1-1)} \varphi_{k_1,1} , \quad m_1 = 2,3,\ldots M_1 , \tag{9}$$

$$u_{1,m_2} - u_{11} = \sum_{k_2=1}^{D_2(m_2-1)} \varphi_{1,k_2} , \quad m_2 = 2,3,\ldots M_2 . \tag{10}$$

Следующий шаг заключается в выборе таких аппроксимаций $\{\psi_{k_1 k_2}\}$, $\{\varphi_{1,k_2}\}$ и $\{\varphi_{k_1,1}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, $k_2 = 1,2,\ldots,N_2 - 1$, соответствующих производных, область ненулевых значений спектров которых [4] не выходили бы за пределы заданной частотной подобласти *V*.

Для простоты рассмотрим сначала одномерный вектор, имея в виду (6) и (9).

Соответствующий вектор $\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \{\varphi_{k_1,1}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, предлагается представить в виде разложения

$$\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \alpha_{\bullet k} \vec{q}_k^{\,\Omega_1} , \tag{11}$$

по ортонормированному базису, составленному из собственных векторов $\vec{q}_k^{\,\Omega_1}$, $k = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, так называемой субполосной матрицы A_{Ω_1} [5, 6], размерности $(N_1 - 1) \times (N_1 - 1)$, соответствующей заданной частотной подобласти $V(\tilde{\Omega}_1,\Omega_1)$,

$$V(\tilde{\Omega}_1,\Omega_1) = \{x_1 \mid x_1 \in [-\Omega_1,-\tilde{\Omega}_1[\cup [\tilde{\Omega}_1,\Omega_1[\} , \tag{12}$$

$$0 \le \tilde{\Omega}_1 < \Omega_1 < \pi .$$

Далее в работе в качестве разложения вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \{\varphi_{k_1,1}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, используется следующее представление его компонент

$$\varphi_{k_1,1} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \alpha_{\bullet k} q_{k_1 k}^{\Omega} , \quad k_1 = 1,2,\ldots,N_1 - 1 , \tag{13}$$

где $q_{ik}^{\Omega_1}$ – компоненты соответствующих собственных векторов $\vec{q}_k^{\,\Omega_1}$, $k = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, субполосной матрицы $A_{\Omega_1} = \{a_{im}^{\Omega_1}\}$, $i,m = 1,2,\ldots,N_1 - 1$, соответствующей подобласти $V(\tilde{\Omega}_1,\Omega_1)$ вида (12).

Аналогичные соотношения можно получить для вектора $\vec{\varphi}_{1\bullet} = \{\varphi_{1,k_2}\}$, $k_2 = 1,2,\ldots,N_2 - 1$, и субполосной матрицы A_{Ω_2}, соответствующей подобласти $V(\widetilde{\Omega}_2,\Omega_2)$.

Тогда, соотношениям (13) соответствуют следующие представления

$$\vec{\varphi}_{\bullet 1} = Q_1\vec{\alpha}_1, \quad \vec{\varphi}_{1\bullet} = Q_2\vec{\alpha}_2, \tag{14}$$

где

$$Q_1 = \left(\vec{q}_1^{\,\Omega_1}, \vec{q}_2^{\,\Omega_1}, \ldots \vec{q}_{N_1-1}^{\,\Omega_1}\right), \quad Q_2 = \left(\vec{q}_1^{\,\Omega_2}, \vec{q}_2^{\,\Omega_2}, \ldots \vec{q}_{N_2-1}^{\,\Omega_2}\right), \tag{15}$$

Q_1 и Q_2 – матрицы, состоящие из $N_1 - 1$ и $N_2 - 1$ собственных векторов субполосных матриц A_{Ω_1} и A_{Ω_2},

$$\vec{\alpha}_1 = (\alpha_{\bullet 1}, \alpha_{\bullet 2}, \ldots \alpha_{\bullet N_1-1})^T, \quad \vec{\alpha}_2 = (\alpha_{1\bullet}, \alpha_{2\bullet}, \ldots, \alpha_{N_2-1\bullet})^T.$$

В частности, такие представления предлагается использовать для реализации соотношений (6) и (7), совокупности которых можно придать векторный вид

$$\hat{\vec{u}}_{\bullet 1} - u_{11}\vec{e}_1 = B_1Q_1\vec{\alpha}_1, \quad \hat{\vec{u}}_{1\bullet} - u_{11}\vec{e}_2 = B_2Q_2\vec{\alpha}_2, \tag{16}$$

где

$$\hat{\vec{u}}_{1\bullet} = (\hat{u}_{12}, \hat{u}_{13}, \ldots \hat{u}_{1N_2})^T, \quad \hat{\vec{u}}_{\bullet 1} = (\hat{u}_{21}, \hat{u}_{31}, \ldots \hat{u}_{N_1 1})^T,$$

B_1 и B_2 – квадратные нижние треугольные матрицы, содержащие 0 выше главной диагонали и 1 на главной диагонали и ниже ее, размерности которых $(N_1 - 1) \times (N_1 - 1)$ и $(N_2 - 1) \times (N_2 - 1)$ соответственно; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – состоящие из единиц векторы, размерности которых $(N_1 - 1)$ и $(N_2 - 1)$ соответственно,

Тогда интерполяционные равенства (9) и (10) можно представить в следующем виде

$$\vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1 = \hat{B}_1\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \hat{B}_1Q_1\vec{\alpha}_1, \quad \vec{u}_{1\bullet} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_2 = \hat{B}_2\vec{\varphi}_{1\bullet} = \hat{B}_2Q_2\vec{\alpha}_2 \tag{17}$$

где

$$\vec{u}_{1\bullet} = (u_{12}, \ldots u_{1,M_2})^T; \ \vec{u}_{\bullet 1} = (u_{21}, \ldots u_{M_1,1})^T,$$

$\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ – векторы, размерностей $(M_1 - 1)$ и $(M_2 - 1)$, состоящие из единиц,

$\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$ – матрицы размерностей $(M_1 - 1) \times (N_1 - 1)$ и $(M_2 - 1) \times (N_2 - 1)$ соответственно, состоящие из строк матриц B_1 и B_2 с номерами D_1, $2D_1$, ..., $(M_1 - 1)D_1$ и D_2, $2D_2$, ..., $(M_2 - 1)D_2$ соответственно.

Решим следующую задачу относительно вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$.

Вычисление значений вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$ предлагается осуществлять исходя из условий удовлетворения следующему требованию: вектор $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$ вида (11) при выполнении интерполяционных условий (17) должен обладать максимальной сосредоточенностью [7] энергии в соответствующей частотной подобласти $V(\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1)$ вида (12), что, учитывая свойства [5, 8] субполосной матрицы A_{Ω_1}, соответствует решению следующей вариационной задачи:

$$\|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\|^2 - \vec{\varphi}_{\bullet 1}^T A_{\Omega_1}\vec{\varphi}_{\bullet 1} \to \min_{\vec{\varphi}_{\bullet 1}}, \ \vec{\varphi}_{\bullet 1} \in R^{N_1-1},$$

$$\vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1 = \hat{B}_1\vec{\varphi}_{\bullet 1}.$$

Рассмотрим функционал

$$Z_{\Omega_1}(\vec{\varphi}_{\bullet 1}) = \|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\|^2 - \vec{\varphi}_{\bullet 1}^T A_{\Omega_1}\vec{\varphi}_{\bullet 1}, \tag{18}$$

значение которого равно величине энергии вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$ вне частотной подобласти $V(\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1)$ вида (12).

В работе доказано следующее утверждение. Функционал $Z_{\varphi}(\vec{\varphi}_{\bullet 1})$ вида (18) при выполнении интерполяционных условий (17),

$$\hat{B}_1\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1, \tag{19}$$

принимает минимальное значение

$$Z_{\Omega_1}(\vec{\varphi}_{\bullet 1}^*) = \min_{\vec{\varphi}_{\bullet 1} \in R^{N_1-1}} \|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\|^2 - \vec{\varphi}_{\bullet 1}^T A_{\Omega_1}\vec{\varphi}_{\bullet 1}, \tag{20}$$

при

$$\vec{\varphi}_{\bullet 1}^* = Q_1\begin{pmatrix}\vec{\beta}_1^* \\ \vec{\beta}_2^*\end{pmatrix},$$

$$\vec{\beta}_1^* = (G_1^T G_1)^{-1} G_1^T \vec{u},$$

$$\vec{\beta}_2^* = W_2^{-1}G_2^T(G_2W_2^{-1}G_2^T)^{-1}(I - G_1(G_1^TG_1)^{-1}G_1^T)\vec{u},$$

где

$$\vec{u} = \vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1,$$

$$G_1 = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_J),$$

$$G_2 = (\vec{g}_{J+1}, \vec{g}_{J+2}, \dots, \vec{g}_{N_1-1}),$$

J – количество собственных чисел субполосной матрицы A_{Ω_1}, близких к единице,

$$\lambda_1^{\Omega_1} \approx \lambda_2^{\Omega_1} \approx \dots \approx \lambda_J^{\Omega_1} \approx 1,$$

$\vec{g}_k$, $k = 1,2,\dots,N_1 - 1$, – вектор-столбцы матрицы G,

$$G = \hat{B}_1 Q_1,$$

I – единичная матрица соответствующей размерности,
W_2 – матрица, размерности $(N_1 - 1 - J)\times(N_1 - 1 - J)$,

$$W_2 = I_J - L_J,$$

I_J – единичная матрица соответствующей размерности,

L_J – диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные числа $\lambda_{J+1}^{\Omega_1}, \lambda_{J+2}^{\Omega_1}, \dots, \lambda_{N_1-1}^{\Omega_1}$ субполосной матрицы A_{Ω_1}.

В основе доказательства справедливости этого утверждения используются представления [5, 6, 8] энергии вектора и части его энергии, попадающей в заданную частотную подобласть, полученные на основе коэффициентов разложения (11) данного вектора по собственным векторам субполосной матрицы, соответствующей заданной частотной подобласти.

Аналогичным образом, можно представить соотношения для вычисления вектора $\vec{\varphi}_{1\bullet}$, являющегося аппроксимацией первой производной первой строки интерполирующей функции.

Матрица $\Psi = \{\psi_{ik}\}$, $i = 1,2,\dots,N_1 - 1$, $k = 1,2,\dots,N_2 - 1$, аппроксимирующая вторые производные интерполирующей функции и удовлетворяющая требованию по аналогии с задачей (19), (20) обладания максимальной сосредоточенностью энергии в соответствующей частотной подобласти при выполнении интерполяционных равенств (8), записанных в матричном виде

$$U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T} = \hat{B}_1\Psi\hat{B}_2^{\,T},$$

$$U_u = \{u_{ik}\},\ i = 2,\dots,M_1,\ k = 2,\dots,M_2,$$

по аналогии с решением оптимизационной задачи (19), (20), может быть представлена в виде блочной матрицы

$$\Psi = Q_1\begin{pmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \Psi_{21} & \Psi_{22}\end{pmatrix}Q_2^{\,T},$$

где

$$\Psi_{11} = (G_1^TG_1)^{-1}G_1^T(U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})((H_1^TH_1)^{-1}H_1^T)^T,$$

$$\Psi_{12} = (G_1^TG_1)^{-1}G_1^T(U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})(Z_2^{-1}H_2^T(H_2Z_2^{-1}H_2^T)^{-1}(I - H_1(H_1^TH_1)^{-1}H_1^T))^T,$$

$$\Psi_{21} = W_2^{-1}G_2^T(G_2W_2^{-1}G_2^T)^{-1}(I - G_1(G_1^TG_1)^{-1}G_1^T)(U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})((H_1^TH_1)^{-1}H_1^T)^T,$$

$$\Psi_{22} = W_2^{-1}G_2^T(G_2W_2^{-1}G_2^T)^{-1}(I - G_1(G_1^TG_1)^{-1}G_1^T)(U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})\cdot(Z_2^{-1}H_2^T(H_2Z_2^{-1}H_2^T)^{-1}(I - H_1(H_1^TH_1)^{-1}H_1^T))^T,$$

где матрицы H_1, H_2 и Z_2 получают аналогично матрицам G_1, G_2 и W_2.

В работе также показано, что при выборе в разложении (11) только первых $M_1 - 1$ и $M_2 - 1$ собственных векторов соответствующих субполосных матриц и формирования из них матриц Q_1 и Q_2, то матрицы первых производных U_{der1} столбцов и первых производных U_{der2} строк дискретной функции U могут быть вычислены на основании следующих соотношений

$$U_{der,1} = \widetilde{Q}_1(\hat{B}_1\widetilde{Q}_1)^{-1}(U_u - \vec{\gamma}_1\vec{u}_{1\bullet}^T),$$

$$U_{der,2} = (U_u - \vec{u}_{\bullet 1}\vec{\gamma}_2^{\,T})(\widetilde{Q}_2^{\,T}\hat{B}_2^{\,T})^{-1}\widetilde{Q}_2^{\,T},$$

матрица смешанных производных $U_{der,1,2}$ может быть получена на основании соотношения,

$$U_{der,1,2} = \widetilde{Q}_1(\hat{B}_1\widetilde{Q}_1)^{-1}(U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})(\widetilde{Q}_2^{\,T}\hat{B}_2^{\,T})^{-1}\widetilde{Q}_2^{\,T}.$$

Матрицы вторых производных по столбцам и строкам исходного изображения могут быть получены на основании матриц первых производных $U_{der,1}$ и $U_{der,2}$ и т.д.

Вычислительные эксперименты показали работоспособность предложенного подхода оценивания производных дискретных функций и возможность проведения более подробного анализа их значений.

Следует отметить, что при вычислении производных, например, при выделении контуров объектов на изображении, целесообразно выбирать частотные подобласти и, следовательно, субполосные матрицы, соответствующие высоким пространственным частотам, чтобы подчеркнуть изменчивость производной при изменении исходного изображения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-47-08052

Список литературы
References

1. Колесников, Е.Г. Введение в численный анализ / Е.Г. Колесников. – М.: Из-во РУДН, 2002.
Kolesnikov, E.G. Vvedenie v chislennyj analiz / E.G. Kolesnikov. – M.: Iz-vo RUDN, 2002.
2. Бахвалов, Н.С.Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2004.
Bahvalov, N.S.Chislennye metody / N.S. Bahvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel'kov. – M.: Binom, 2004.
3. Жиляков, Е.Г. Об эффективности метода оценивания значений долей энергии изображений на основе частотных представлений / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, А.Н. Заливин // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. – № 2/52 (563) март-апрель. – 2009. – С. 12-22.
Zhilyakov, E.G. Ob jeffektivnosti metoda ocenivanija znachenij dolej jenergii izobrazhenij na osnove chastotnyh predstavlenij / E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorec, A.N. Zalivin // Izvestija OrelGTU. Informacionnye sistemy i tehnologii. – № 2/52 (563) mart-aprel'. – 2009. – S. 12-22.
4. Черноморец, А.А. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам / А.А. Черноморец, О.Н. Иванов // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2010. – № 19 (90). – Вып. 16/1. – С. 161-166.
Chernomorec, A.A. Metod analiza raspredelenija jenergij izobrazhenij po zadannym chastotnym intervalam / A.A. Chernomorec, O.N. Ivanov // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2010. – № 19 (90). – Vyp. 16/1. – S. 161-166.
5. Жиляков, Е.Г. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений / Е.Г. Жиляков, С.П. Белов, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники, Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 10-25.
Zhilyakov, E.G. Variacionnye metody analiza signalov na osnove chastotnyh predstavlenij / E.G. Zhilyakov, S.P. Belov, A.A. Chernomorec // Voprosy radiojelektroniki, Ser. JeVT. – 2010. – Vyp. 1. – S. 10-25.
6. Жиляков, Е.Г. О частотном анализе изображений / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 94-103.
Zhilyakov, E.G. O chastotnom analize izobrazhenij / E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorec // Voprosy radiojelektroniki. Ser. JeVT. – 2010. – Vyp. 1. – S. 94-103.
7. Черноморец, А.А. О частотной концентрации энергии изображений / А.А. Черноморец, В.А. Голощапова, И.В. Лысенко, Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2011. – № 1 (96). – Вып. 17/1. – С. 146-151.
Chernomorec, A.A. O chastotnoj koncentracii jenergii izobrazhenij / A.A. Chernomorec, V.A. Goloshhapova, I.V. Lysenko, E.V. Bolgova // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2011. – № 1 (96). – Vyp. 17/1. – S. 146-151.
8. Черноморец, А.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц / А.А. Черноморец, Е.И. Прохоренко, В.А. Голощапова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2009. – № 7 (62). – Вып. 10/1. – С. 122-128.
Chernomorec, A.A. O svojstvah sobstvennyh vektorov subpolosnyh matric / A.A. Chernomorec, E.I. Prohorenko, V.A. Goloshhapova // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2009. – № 7 (62). – Vyp. 10/1. – S. 122-128.