



УДК 004.89

**ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ
ОПТИМИЗАЦИИ ГРАНИЦ КАРЬЕРОВ В СИСТЕМЕ НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЯ**
**COMPUTATIONAL COMPLEXITY FOR OPEN PIT OPTIMIZATION ALGORITHMS IN
MINING MINERAL RESERVES**

П.В. Васильев, В.М. Михелев, Д.В. Петров
P.V.Vassiliev, V.M.Mikhelev, D.V.Petrov

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

e-mail: vassiliev@bsu.edu.ru, mikhelev@bsu.edu.ru, petrov@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются основные алгоритмы оптимизации границ открытой разработки, оценивается их вычислительная сложность и трудоемкость реализации. Обосновывается выбор наиболее производительного метода для распараллеливания вычислений при определении границ карьеров.

Resume. The article deals with the basic algorithms of open pit optimization and estimation of computational complexity of ones. There is a substantiation for the choice of the best method in parallel computations of open pit limits.

Ключевые слова: блочное моделирование, алгоритмы оптимизации, границы карьеров, вычислительная сложность, параллельные вычисления

Keywords: block modelling, algorithms of optimization, open pit limits, computational complexity, parallel computations

Введение

При добыче твердых полезных ископаемых открытым способом одной из важнейших задач является определение наиболее выгодной с экономической точки зрения последовательности выемки запасов сырья и расчет соответствующих оптимальных границ карьера по каждому планируемому этапу добычи. В представленной статье рассматриваются основные алгоритмы оптимизации границ карьеров, применяемые в программном обеспечении открытой разработки рудного сырья.

Для выполнения оптимизационных расчетов строится дискретная блочная модель месторождения, в которой каждый блок имеет стоимостную оценку в зависимости от содержания полезного минерала или металла. Исходными данными служат результаты опробования скважин и горных выработок. На их основе компьютерные методы построения полигональных, триангуляционных и интерполяционных моделей рудных тел позволяют получить, в конечном счете, детальные экономические блочные модели месторождений [1].

В работе [2] представлена общедоступная библиотека реальных блочных моделей месторождений MineLib для тестирования и решения задач оптимизации границ карьеров при извлечении запасов. Как отмечается авторами, задача определения границ *предельного карьера* (оболочки карьера на конец срока жизни горного предприятия) состоит в нахождении множества извлекаемых трехмерных блоков руды и породы с целью максимизации прибыли при наличии прецедентных ограничений, связанных с устойчивостью откосов бортов.

Геометрические ограничения на последовательность извлечения блоков (см. рис. 1) гарантируют, что откосы бортов карьера будут устойчивы, а горное оборудование будет иметь доступ к рабочим зонам. *Прецедентные ограничения* требуют выполнения условия, что при извлечении текущего блока на него непосредственно воздействуют вышележащие блоки, которые должны быть извлечены прежде, чем рассматриваемый блок. Прецедентная связь между блоками задается явно как связь транзитивного типа, то есть, если для извлечения блока А необходимо извлечь блок В, а для извлечения блока В необходимо извлечь блок С, то для извлечения блока А также необходимо извлечь и блок С; эта транзитивность отражается в исходных прецедентных ограничениях. Можно использовать это свойство транзитивности для описания прецедентной связи как *непосредственной или прямой*, если на неё не влияет какая-либо иная пара предшественников, что позволяет моделировать прецедентные ограничения путём увеличения числа *прямых предшественников* в моделях.

При удалении 10 блоков угол наклона бортов для блоков лежит в пределах от 35 до 45, тогда как при удалении 6 вышележащих блоков углы крутизны склонов будут меняться в диапазоне от 45 до 55. Переходя от кубических блоков к блокам в виде параллелепипедов с различными размерами по осям X, Y и Z можно добиться изменения величин в необходимом диапазоне углов. Эти правила последовательности выемки блоков трактуются как некое приближение моделей стратегического планирования к реальным процессам добычи, рассматриваемым при планировании продукции. В этих

задачах находится время, когда некоторый блок должен быть извлечен из карьера. Обычно целью при этом является максимизация чистого дисконтированного дохода (ЧДД или NPV) от добычи сырья; ограничения включают порядок извлечения предшествующих блоков и верхние границы использования ресурсов производства.



Рис. 1. Схемы извлечения блоков, основанные на удалении пяти блоков выше заданного 6-го блока (а) или на удалении девяти блоков выше заданного 10-го блока (б)

Fig. 1. Scheme extraction of blocks based on the removal of the five units above a predetermined 6th block (a) or at a distance of nine units above a predetermined 10-th block (b)

Условия оптимизации границ

Поиск оптимальных решений по извлечению запасов сырья из недр требует выполнения условий, обеспечивающих соблюдение ряда горно-геологических, геотехнических и производственных ограничений.

Используются следующие обозначения:

- **индексы и множества:**

- $t \in T$ - множество периодов времени t на уровне;
- $b \in B$ - множество блоков b ;
- $b' \in B_b$ - множество блоков b' , предшествующих извлечению множества блоков b ;
- $r \in R$ - множество типов ресурсов r ;
- $d \in D$ - множество пунктов назначения d ;

- **параметры:**

- $P_b(p_{br}, p_{bd}, p_{bdt})$ - прибыль, получаемая от извлечения (и переработки) блока b (в период времени t при отправке по назначению d) (\$);
- a - скорость дисконтирования, используемая в вычислении коэффициентов целевой функции (прибыли);
- $q_{br}(q_{brd})$ - количество ресурса r , используемого для извлечения и, при необходимости, переработки блока b (при отправке по назначению d) (в тоннах);
- \bar{R}_r - максимально доступный операционный ресурс r в период времени t (в тоннах);
- \underline{R}_r - минимально доступный операционный ресурс r в период времени t (в тоннах);
- A - коэффициенты дополнительных общих ограничений;
- \underline{a}, \bar{a} - нижние и верхние границы, соответственно, для дополнительных общих ограничений (векторы с числом рядов равным этому числу в A);

- **переменные:**

- $x_b = 1$, если блок b находится в проекте конечного карьера, а иначе 0;
- $x_{bt} = 1$, если блок b извлекается в период времени t , а иначе 0;
- y_{bdt} - количество блока b отправленное по назначению d в период времени t (%).

Следуя [2] приведем следующие математические формулировки трех главных задач оптимизации:

1. Задача нахождения предельных границ карьера, (UPIT), или задача поиска замыкания с максимальным весом [3]. Эта задача определяет наиболее прибыльную оболочку из блоков внутри рудного тела и, следовательно, в ней не учитываются факторы времени и какие-либо производственные ограничения. Набор ограничений состоит только из прецедентных отношений между блоками; соответствующая матрица коэффициентов, упорядоченных при обходе блоков против часовой стрелки, является полностью унимодулярной, представляющей эту задачу как задачу сетевого потока. По сути, используя ценность каждого блока без всяких ограничений на необходимые производственные



ресурсы по выемке, решение этой задачи показывает немедленную прибыль от карьера и, соответственно, устанавливает то, какие блоки должны быть извлечены согласно прецедентным ограничениям для получения данной прибыли.

$$(UPIT) = \max \sum_{b \in B} p_b x_b \quad (1)$$

$$\text{при условии } x_b \leq x_{b'}, \forall b \in B, \forall b' \in B + B_b \quad x_b \in \{0,1\} \forall b \in B \quad (2)$$

Цель состоит в том, чтобы максимизировать чистую прибыль от всех извлеченных блоков. Ограничения (1) гарантируют, что каждый блок извлекается только в том случае, если добыты предшествующие ему блоки (см. рис.1). Множество предшествующих блоков соответственно задают углы откосов проектируемого предельного карьера. В статье [4] дается быстрый алгоритм решения этой задачи. Решение задачи (UPIT) определяет только проект карьера, то есть его границы. Решение этой задачи фактически может использоваться для исключения блоков из рассмотрения в дальнейших задачах.

2. *Задача нахождения предельного карьера с ограничениями*, (CPIT), обобщает вышеприведенную задачу нахождения предельных контуров карьера за счет ввода в набор данных фактора времени и связанных с ним ограничений. При этом для модели и её модификаций предполагается, что каждый добычный блок целиком обрабатывается за один период времени. В задаче (CPIT) рассматриваются не только прецедентные ограничения, но и ограничения на доступные операционные ресурсы в заданный период времени. На вход решения задачи (CPIT) поступают:

- **доход по каждому блоку**
- **минимальная и максимальная допустимая величина операционного ресурса в заданный период времени**
- **множество предшественников для каждого блока**

При указанных входных данных решение задачи (CPIT) предполагает составление плана графика добычи, обеспечивающего максимальную прибыль при наличии ограничений операционных ресурсов и прецедентных связей между блоками. В задаче (CPIT) не принимаются в расчет такие детали, как возможность промежуточного складирования.

$$(CPIT) \quad \max \sum_{b \in B} \sum_{t \in T} p_{bt} x_{bt} \quad (3)$$

$$\text{если } \sum_{\tau \leq t} x_{b\tau} \leq \sum_{\tau \leq t} x_{b'\tau} \quad \forall b \in B, b' \in B_b, t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{t \in T} x_{bt} \leq 1 \quad \forall b \in B \quad (5)$$

$$\frac{R_{rt}}{r} \leq \sum_{b \in B} q_{br} x_{bt} \leq \bar{R}_{rt} \quad \forall t \in T, r \in R \quad (6)$$

$$x_{bt} \in \{0,1\} \quad \forall b \in B, t \in T \quad (7)$$

В задаче (CPIT) ищется максимальный чистый доход от извлечения блоков за весь срок жизни горного предприятия. При этом p_{bt} вычисляется как $\frac{p_b}{(1+a)^t}$. Условия (4) устанавливают предшественников.

То есть, если блок b' является непосредственным предшественником блока b , то b' должен быть извлечен в тот же самый период времени, что и блок b или ранее. Условия (5) требуют, чтобы каждый блок добывался не более одного раза. Условия (6) гарантируют, чтобы ограничения значений минимального и максимального операционного ресурса соблюдались для каждого периода времени.

3. *Задача планирования продукции с прецедентными ограничениями* (PCPSP), решается при выполнении следующих условий:

$$(PCPSP) \quad \max \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} p_{bdt} y_{bdt} \quad (8)$$

$$\text{если } \sum_{\tau \leq t} x_{b\tau} \leq \sum_{\tau \leq t} x_{b'\tau} \quad \forall b \in B, b' \in B_b, t \in T \quad (9)$$

$$x_{bt} = \sum_{d \in D} y_{bdt} \quad \forall b \in B, t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{t \in T} x_{bt} \leq 1 \quad \forall b \in B \quad (11)$$

$$\frac{R_{rt}}{r} \leq \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} q_{bdr} y_{bdt} \leq \bar{R}_{rt} \quad \forall t \in T, r \in R \quad (12)$$

$$\underline{a} \leq Ay \leq \bar{a} \quad (13)$$

$$y_{bdt} \in [0,1] \quad \forall b \in B, d \in D_b, t \in T \quad (14)$$

$$x_{bt} \in \{0,1\} \quad \forall b \in B, t \in T \quad (15)$$



Задача (PCPSP) максимизирует чистый доход от извлечения блоков за весь срок жизни рудника. Заметьте, что p_{bat} вычисляется как $\frac{P_{bat}}{(1+a)^t}$. Условия (9) устанавливают требования, касающихся предшественников, для всех блоков и периодов времени. Ограничение (10) предписывает требование о непротиворечивости значений переменных для добычи и переработки. То есть, если блок не извлечен, то его материал не может быть отправлен ни по одному из пунктов назначения, а если извлечен, то весь его материал может быть отправлен куда угодно. Условие (11) вводит ограничение, что блок на любом горизонте (уровне) может быть извлечен только один раз. Ограничения (12) требуют, что кроме уже имеющихся больше никаких операционных ресурсов для целей добычи не используется. Условия (13) определяют общие дополнительные ограничения, подробное обсуждение которых приводится ниже. Заметьте, что поскольку x функционально зависит от y (см. условие (10)), то предыдущая переменная не включается в это условие. Значение переменной, определяющей долю блока, направляемую по конкретному назначению в заданный период времени, должно лежать в диапазоне от 0 до 1. Переменная, определяющая будет или нет блок извлечен в конкретный период времени, является бинарной.

Алгоритмы оптимизации

1. Метод вариантов

В методе вариантов применяется традиционный подход к проектированию карьеров [5]. Основные решения принимаются проектировщиком, а компьютер используется для вычислений площадей, объемов, содержания полезного компонента в руде и технико-экономических показателей.

При расчетах по блочной модели пространство месторождения разбивается на прямоугольные блоки и на основе данных геологоразведочных скважин каждому блоку присваивается кодовый признак породы и процентное содержание полезных компонентов. Базовый вариант границ карьера задается посредством назначения периметра дна, по которому автоматически проектируется верхний контур карьера в соответствии с допустимыми углами откосов рабочего и нерабочего бортов. Объемы пород и полезного ископаемого вычисляются в пределах каждого контура на всех горизонтах. Далее, путём расширения базового периметра, получают различные варианты приращения карьера. Для всех вариантов вычисляют объемы горной массы, коэффициенты вскрыши, затраты на разработку и так далее.

Критерием оценки варианта считается ожидаемая прибыль P . При этом из общего дохода от реализации продукции вычитают затраты на обогащение, переплавку, окомкование, транспортирование для сбыта. С учетом этого прибыль по вариантам рассчитывается по формуле:

$$P = \sum_{n=1}^N \frac{I_n - Q_n}{(1+p)^n} - C \rightarrow \max \quad (16)$$

где I_n — ежегодный доход; Q_n — эксплуатационные затраты; p - доля прибыли; N — срок эксплуатации карьера; n — расчетный год; C — капитальные затраты.

Детализация каждого из вариантов позволяет установить ожидаемое минимальное промышленного содержания металла в руде, производственную мощность карьера и приступить к решению задачи календарного планирования добычи.

2. Плавающий конус

В данном алгоритме элементарная фигура формирования границ карьера — перевернутый усеченный конус, меньшее основание которого имеет размеры, соответствующие минимальной ширине дна карьера. Плоскость, образующая боковую поверхность конуса, наклонена к горизонтальной плоскости под углом, равным углу откоса конечного борта карьера. Этот метод имеет несколько вариантов, но его суть можно объяснить на основе использования двух типов блочных моделей с трехмерными массивами данных. Одна из моделей является моделью задачи, содержащая исходные значения по каждому блоку, вторая - моделью решения, первоначально имеющая нулевые значения.

Процедура поиска оптимальности границ карьера начинается с верхнего горизонта, содержащего полезное ископаемое.

В модели задачи отыскивается некоторый блок, который при его извлечении вместе со всеми блоками в конусе над ним обеспечивает прибыль. Когда такой блок найден, то он извлекается (добывается) — перемещается в модель решения, а нулевые значения помещаются в модель задачи. При построении конусов учитываются ограничения на допустимый наклон границ карьера.

При рассмотрении двумерного случая с углом откоса борта карьера в 45 градусов данное изображение показывает множество значений в начальный момент работы программы. Первый найденный конус с положительным значением закрашен желтым цветом. Заметьте, что блок со значением +2 перекрыт сверху тремя блоками со значением -1. Желтые блоки теперь будут перемещены в модель решения.

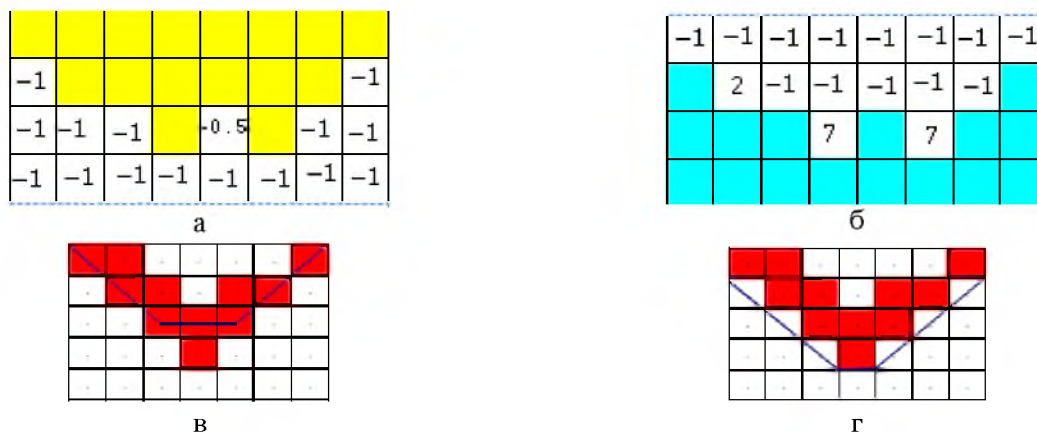


Рис.2. Варианты расположения конусов: а – модель задачи; б – модель решения; в – контур по центрам блоков; г - контур по границам блоков

Fig.2. Options for the location of the cones: a - model of the problem; b - model solutions; c - circuit on the center of the block; d - circuit block boundaries

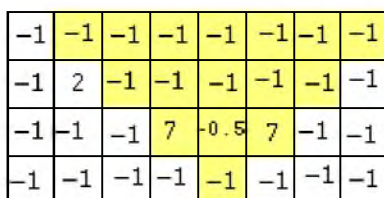


Рис. 3. Конус с положительным значением
Fig. 3. Cone with a positive value

Поиск более выгодных конусов для модели решения может быть продолжен до тех пор, пока больше не останется вариантов. В ряде случаев этот процесс, к сожалению, будет перемещать в модель решения те блоки, которые не должны там находиться. Поэтому следующим этапом является поиск в файле модели решения таких блоков, которые будучи помещенными на вершину конуса, будут иметь отрицательное значение. Если такие конусы обнаруживаются, то они перемещаются обратно в блочную модель задачи и этим блокам приписываются нулевые значения.

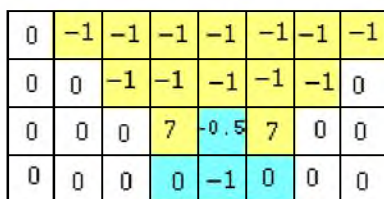


Рис. 4. Диаграмма блочной модели решения
Fig. 4. Block model solutions

Диаграмма показывает «модель решения» - это те блоки, которые, как было обнаружено на первом шаге, находятся в положительном конусе. В «модели решения» мы находим обратный конус с отрицательным значением и закрашиваем его синим цветом. Эти блоки необходимо вернуть обратно в исходную «модель задачи», присвоив нулевые значения.

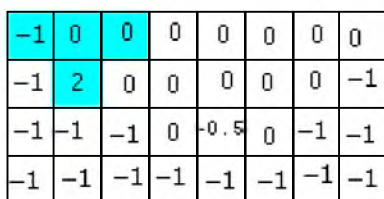


Рис. 5. Возвращение к диаграмме модели задачи
Fig. 5. Return to the chart model problem



Вновь возвращаясь к модели задачи мы обнаруживаем, что появился новый блок со значением 2, который теперь может быть извлечен с прибылью. После его удаления в модель решения в исходной модели задачи больше не будет каких-либо положительных конусов, а в модели решения нельзя будет найти каких-либо отрицательных конусов (обратных). В этом случае алгоритм находит наилучший из возможных контуров карьера.

										-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1									-1		2	-1	-1	-1	-1	-1	
-1	-1	-1		-0.5		-1	-1						7		7		
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1									

Рис. 6. Окончательный вид границ карьера: а) «модель задачи»; б) «модель решения»
Fig. 6. The final form of the open pit limits: a) «model of the problem»; b) a «model solution»

Для большей эффективности алгоритма целесообразно использовать один массив значений стоимости блоков и создать средства переключения с помощью флажка между моделями задачи и решения путём введения массива булевых значений.

По сути, существует не один, а множество алгоритмов «плавающего конуса». Они отличаются по способам поиска положительного конуса, по процедурам переключения и отыскания отрицательного конуса в модели решения. Методы плавающего конуса удобны для представления углов откоса бортов карьеров. Хотя первоначальный метод плавающего конуса не гарантирует нахождение наилучшего оптимального контура карьера, однако в последнее время появились варианты улучшающие его работу [6]. Кроме того, в настоящее время он является единственным методом, для которого удалось использовать вместо регулярной блочной модели структуру представления данных в виде октодера [7].

3. Метод теории графов

В практике проектирования карьеров алгоритм Лерчса-Гроссмана [8], основанный на теории графов, получил наибольшее распространение. В алгоритме LG блочная модель месторождения представляется в виде ориентированного графа $G=(V,A)$. Каждому блоку трехмерной модели i соответствует узел графа с весом b_i , определяющим чистую экономическую ценность данного блока. Два узла i и j соединяются направленной дугой от i к j , если блок i не может быть извлечен раньше, чем блок j . Обычно блок j в таком случае располагается в верхнем слое, прямо над блоком i . Задача состоит в нахождении такого множества блоков, извлечение которых принесет максимальную прибыль. Это эквивалентно нахождению замкнутого набора узлов графа с максимальной суммой весов. Замкнутым считается множество узлов, которое для каждого узла содержит все его дочерние узлы.

Важной концепцией теории графов является *замыкание*. Для взвешенного ориентированного графа *замыкание* определяется как некое множество вершин C , таких, что если $u \in C$ и (u,v) есть дуга арки в графе, то $v \in C$. Вес замыкания равен сумме весов вершин в замыкании. Или, иначе, в контексте выполнения горных работ *замыкание* представляет собой некоторый подходящий контур карьера, суммарный вес которого равен ценности добытых блоков в замыкании. Таким образом, проблема определения контура карьера, удовлетворяющего требованиям безопасных углов наклона бортов и максимизирующего чистый доход, преобразуется в задачу оптимизации графа и определения замыкания максимального веса во взвешенном направленном графе.

По сути алгоритм описывается следующими шагами:

Шаг 0

Первоначально дерево графа образуют ребра, соединяющие все блоки с корневым фиктивным блоком. Это, очевидно, есть нормализованный граф.

Шаг 1. Проверка - имеется ли направленное ребро (дуга) в графе откосов (α, β) , такое, что α - является сильной вершиной, а β - нет? Если нет, то переходим к шагу 4 - конец.

Шаг 2. Пара вершин, найденная в шаге 1, добавляется к дереву графа. Немедленно граф дерева прекращает быть деревом, так как мы имеем структуру с фиктивным ребром на обоих концах. Для того, чтобы исправить эту ситуацию удаляется это фиктивное ребро, поддерживающее (ранее) сильную ветвь. Шаг 2 достаточно легок в понимании, однако сложен для программирования. Хотя в оригинальной статье говорится о добавлении или удалении дуг k /из дерева, но на самом деле речь идёт о ребрах (дерева не направлены).

Шаг 3. Состоит в том, чтобы нормализовать граф циклически назад вплоть до шага 1. После того как граф нормализован до шага 1, нам остается пройти по вновь созданной ветви от листа назад



до корневого блока. Внешняя часть этой ветви теперь будет иметь различный смысл для направления от корня и все вершины в ветви, очевидно, изменят поддерживаемый ими вес.

Шаг 4. Множество сильных вершин представляет собой оптимальный карьер. Множество сильных вершин является множеством, которое поддерживается сильными dummy вершинами. Завершение работы алгоритма.

4. Генетический алгоритм

Генетические алгоритмы оптимизации основаны на моделировании процессов мутации, скрещивания и естественного отбора. Поиск в них начинается со случайной популяции индивидуумов, однозначно характеризующихся неким набором данных – хромосомами. У каждого индивидуума оценивается функция пригодности, аргументом которой являются его хромосома. В работе [9] предложена структура многомерного генетического алгоритма для оптимизации горной добычи с использованием трехмерных пространственных данных и дискретного времени. Долгосрочное календарное планирование представляется в виде матрицы с множеством ячеек, цена которых увязана с периодом их извлечения горной выработкой.

Путем применения генетических операторов (отбора, мутации, скрещивания) популяция улучшается до тех пор, пока либо функция пригодности одного из индивидуумов не достигнет приемлемого значения, либо не пройдет допустимое количество циклов воспроизводства. При реализации генетического алгоритма для карьера, в первую очередь определяется формат представления хромосом.

Предлагается следующее решение: форма карьера (с учетом допустимых углов откосов бортов) представляется с помощью массива целых чисел. Каждый элемент такого массива показывает глубину карьера в текущем столбце трехмерной модели месторождения. Пусть имеется трехмерная блочная модель месторождения $P(I \times J \times K)$, элементы которой характеризуется числами или весами p_{ijk} , $i \in [0, I]$, $j \in [0, J]$, $k \in [0, K]$, показывающими чистую прибыль, получаемую в ходе его добычи, с учетом процентного содержания полезных элементов, себестоимости выработки и рыночной стоимости металла. Тогда генетическую модель можно охарактеризовать вектором $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $n = I * J$ в котором значение глубины столбца с координатами (i, j) , помещается в позицию x_q , где $q = i * I + j$. Этот массив считается хромосомой, так как он полностью характеризует один индивид – одну конкретную форму карьера. Путем итеративного применения генетических операторов к набору таких индивидов (популяции) находится оптимальная форма поверхности карьера.

В качестве критерия оценки пригодности варианта мутации используется следующая функция:

$$f(X) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K p_{ijk}, k \leq x_q, q = i * I + j \quad (17)$$

Данный алгоритм за конечное число шагов находит предельный контур карьера [16]. Для расширения области поиска, уменьшения вероятности преждевременного схождения и уменьшения времени вычислений был разработан параллельный вариант данного алгоритма – иерархический генетический алгоритм с двумя уровнями параллелизма, описанный в работе [17].

5. Линейное и динамическое программирование

Алгоритмы, реализующие оптимизацию границ карьеров на основе методов линейного и динамического программирования рассматриваются в работе [10]. При этом в основном используются стандартные коммерческие или открытые (COIN-OR) библиотеки целочисленного линейного программирования. Однако в виду субоптимальности получаемых решений в практике проектирования карьеров данные методы не получили широкого распространения.

6. Метод максимизации псевдопотока

В работе Хочбаума [4] нормализованные деревья алгоритма LG были адаптированы к более общей модели сетевого потока на основе концепции *псевдопотока*, похожего на *предпоток* (*preflow*). Сетевой *псевдопоток* удовлетворяет ограничениям пропускной способности, но в нём могут нарушаться условия баланса потока с созданием дефицита или избытка в узлах. *Предпоток* удовлетворяет ограничениям пропускной способности, но в нём может нарушаться баланс потока лишь путём создания избытка в узлах. Алгоритм *псевдопотока* решает задачу нахождения максимального потока в обобщенных сетях и работает с *псевдопотоками* вместо масс. Связь между алгоритмом *псевдопотока* и алгоритмом *предпотока* (переразметки, push-relabel) более очевидна, чем между алгоритмом LG и алгоритмом *предпотока*. Методы LG и *псевдопотока* имеют дело с *множеством узлов* (ветвей), способных аккумулировать либо избыток, либо дефицит. В подходе на основе *псевдопотока*, массы M_{rs} , поддерживаемые коневым узлом r_s сильного дерева, трактуются как некий *псевдопоток* и выталкиваются к слабому корню r_w , а затем к фиктивному корневному узлу x_0 (одновременно являющемуся как источником, так и стоком). Алгоритм выталкивания с переразметкой работает с *предпотоками* (*preflows*). Алгоритм переразметки работает скорее с самими узлами, а не с множествами узлов, и избыток в некотором узле выдавливается в находя-



щиеся ближе к стоку узлы в соответствие со значениями дистанционных меток, переразметка обновляет значения меток.

Алгоритм *псевдопотока* предоставляет несколько систематических путей обработки вершин типа *слабый-над-сильным*. Лучшими из этих методов являются варианты с нижней и верхней метками. Методы нижней и верхней разметки работают с концепцией дистанционной метки. Для некоторого узла *дистанционная метка* представляет собой неубывающую функцию и на этом уровне она является неубывающей в составе любого сгенерированного дерева. В статье [4] доказывалось, что дистанционная метка есть неубывающая функция на заданном уровне дерева и для слабого узла v она является некоторой нижней границей уровня (v). Функция дистанционной метки аналогична дистанционным меткам и меткам, используемым в методах сетевого потока [3].

Как отмечается в работе [11] Хочбаум [4] развила алгоритм LG за счет включения в него концепции *псевдопотока* с формулировкой задачи сетевого потока. Такая формулировка дополняет базовый алгоритм LG структурированной стратегией определения последовательности обработки множества дуг.

Реализованный алгоритм систематически находит последовательность нормализованных вложенных остовных деревьев в виде расширенных замкнутых подграфов основного графа. Алгоритм объединяет на каждом этапе всё большее количество дуг из подграфа. Последовательность образующихся деревьев содержит подмножества (сильные ветви), чьи вершины формируют максимальное замыкание вложенного дерева и частичное замыкание подграфа и стремится в пределе к максимальному замыканию подграфа. Алгоритм может начинаться с любого нормализованного вложенного остовного дерева замкнутого расширенного подграфа G^x исходного графа. В данной реализации создается фиктивный корневой узел x_0 и строится начальное связующее дерево, имеющее корень в фиктивном узле и ветви, отходящие к каждому узлу дерева в виде подграфа G . Таким образом, Tx_0 представляет собой нормализованное вложенное остовное дерево расширенного подграфа G^x . Предполагается, что этот подграф в целом должен быть графом без потери общности. Максимальное замыкание замкнутого подграфа содержится внутри максимального замыкания всего графа.

Алгоритм состоит из двух шагов, которые повторяются до тех пор, пока вершины *сильных* ветвей не сформируют максимальное замыкание взвешенного ориентированного графа G . Имеется шаг поглощения (*merger*) и шаг обрезки или нормализации (*pruning*). Таким образом, процесс начинается с некоего супер оптимального множества (первоначально сильных ветвей Tx_0 , образующих множество всех положительных вершин и которое может быть эффективно найдено, например, с помощью эвристического генетического алгоритма), которое не удовлетворяет ограничениям и преобразуется к подмножеству максимального замыкания, удовлетворяющего принятым ограничениям (1)-(9).

На каждом этапе имеются несколько переменных, связанных с каждой вершиной или ребром нормализованного дерева. Они представляют вес поддерева, исходящего из ребра или вершины, тип ребра (p или m), связывающего вершину с её предком (первоначально с корнем x_0), и тип ребра или вершины (*слабая или сильная*). Ребро в нормализованном поддереве является *сильным*, если и только если оно является *p-ребром* и поддерживаемый этим ребром вес является положительным по определению и согласно 'свойству 3'. Другие переменные являются счетчиками и housekeeping переменными. Сама по себе древовидная структура является довольно сложной и представляет собой множество связанных списков, а структура данных спроектирована для оптимизации проходов по дереву и re-combinations. В нормализованном дереве все вершины у ветвей, связанных с корнем x_0 , являются либо все *сильными*, либо все являются *слабыми*. В методах *псевдопотока* с нижней и верхней меткой для определения порядка обработки сильных деревьев применяются приоритетные очереди.

Выполненные в работе [11] расчеты дают представление о времени нахождения решения двумя алгоритмами псевдопотока и алгоритмом Лерчса-Гроссмана. Сравнение приведено в таблице 1.

Таблица 1
Table 1

Сравнение методов оптимизации при работе с блочной моделью размером 220*119*38 (всего 994 840 блоков)
Comparison of optimization methods when working with block model size 119 * 220 * 38 (994 840 blocks in sum)

Алгоритм	Лерчс-Гроссман, LG	Псевдопоток с нижней меткой, LLPF	Псевдопоток с верхней меткой, HLPF
Суммарный денежный поток	57 118 058	57 118 058	57 118 058
Извлеченные блоки	95 228	95 228	95 228
Оставшиеся блоки	830 754	830 754	830 754
Время счета (сек)	1527	126	29



Результаты наглядно показывают значительное преимущество в производительности алгоритма псевдопотока с верхней меткой (графа 4).

Оценка вычислительной сложности и трудоемкости реализации

При оценке вычислительной сложности нами применялся подход, описанный в монографии [12]. Более детальное рассмотрение сложности алгоритмов теории графов и сетевого потока можно найти в монографии [13]

Временная вычислительная сложность дается в среднем для верхней границы, для нижней границы и в худшем случае не определялась. Нами были рассмотрены как математически строгие (методы теории графов, ветвей и границ, сетевого потока), так и эвристические алгоритмы оптимизации (методы плавающего конуса, линейного программирования и генетические алгоритмы). Результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 2
Table 2

Общие характеристики алгоритмов оптимизации границ карьеров
General characteristics of optimization algorithms for open pit limits

Алгоритм оптимизации	Сложность	Строгость	Трудоемкость
1	2	3	4
Метод вариантов	-	-	*
Плавающий конус	$O(n^2)$	-	**
Линейное программирование	$O(\log(n^2))$	-	****
Динамическое программирование	$O(\log(n^2))$	+	****
Метод Лерчса-Гроссмана (теория орграфов)	$O(mn^2)$	+	****
Метод ветвей и границ (фундаментальное дерево)	$O(mn^2)$	+	****
Колония муравьев, АСО	$O(n^2 \log(m))$	-	****
Рой частиц, PSO	$O(n^2 \log(m))$	-	****
Максимальный псевдопоток (метод верхней метки)	$O(mn \log(n))$	+	****

Примечания: «+» строго теоретически доказанный оптимальный результат, «-» эвристический, субоптимальный результат; n – число блоков (узлов, вершин), m – число дуг (ограничивающих крутизну склонов); «*» - чем больше число звездочек, тем более трудоёмким является алгоритм в программной реализации согласно авторской экспертной оценке.

Анализ результатов показывает, что наиболее перспективным с точки зрения производительности и трудоемкости реализации является алгоритм максимизации псевдопотока с верхней меткой, перед которым может быть выполнен предрасчет оптимальной многоуровневой структуры графа сетевого потока на основе генетического алгоритма. Применение последнего способно существенно сократить число блоков (вершин) и связывающих их дуг (ребер) при последующем решении оптимизационных задач по алгоритму максимизации псевдопотока с верхней меткой для объемных мегаблочных моделей.

Выводы

В работе дается краткий обзор исследований в области поиска решений задачи оптимизации карьеров и выполнен анализ работы существующих алгоритмов. Представлена обобщенная оценка вычислительной сложности наиболее эффективных алгоритмов и дана экспертная оценка трудоемкости их программной реализации по 5-ти балльной шкале. Обосновывается выбор наиболее производительного комплекса методов - метода максимизации потока с верхней меткой в сочетании с предрасчетом базового варианта на основе генетического алгоритма. С целью ускорения оптимизации границ предельных карьеров и нахождения промежуточных вложенных оболочек карьеров в заданной последовательности этапов отработки запасов, предложена эффективная схема распараллеливания вычислений по технологиям MPI/CUDA/OpenCL.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-47-03029 p_центр_a).

Список литературы References

1. Construction Economic Ore Body Models for Open Pit Optimization. Whittle D.J., Vassiliev P.V. Moscow : s.n., 1997. 2nd Regional APCOM 97 SYMPOSIUM, Aug. pp. 511-514.
Construction Economic Ore Body Models for Open Pit Optimization. Whittle D.J., Vassiliev P.V. Moscow : s.n., 1997. 2nd Regional APCOM 97 SYMPOSIUM, Aug. pp. 511-514.



2. Minelib 2011: A library of open pit production scheduling problems. Espinoza D, Goycoolea M, Moreno E, Newman A. 2006(1), 2013, *Ann. Oper. Res.*, pp. 93–114.
- Minelib 2011: A library of open pit production scheduling problems. Espinoza D, Goycoolea M, Moreno E, Newman A. 2006(1), 2013, *Ann. Oper. Res.*, pp. 93–114.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва : Мир, 1974. p. 514.
- Hu T. Celochislennoe programmirovaniye i potoki v setjah. Moskva : Mir, 1974. p. 514.
4. The Pseudoflow Algorithm: A New Algorithm for the Maximum-Flow Problem. Hochbaum D.S. 56, 2008, *Operations Research*, Vol. 4, pp. 992–1009.
5. Астафьев Ю.П., Зеленский А.С., Горлов Н.И. и др. Компьютеры и системы управления в горном деле за рубежом. М. : Недра, 1989. стр. 264.
- Astaf'ev Ju.P., Zelenskij A.S., Gorlov N.I. i dr. Komp'yutery i sistemy upravleniya v gornom dele za rubezhom. M. : Nedra, 1989. str. 264.
6. A new algorithm for optimum open pit design: Floating cone method III. Elahi zeyni E., Kakaie R., Yousefi A. 2, 2011, *Journal of Mining & Environment*, Vol. 2, pp. 118-125.
- A new algorithm for optimum open pit design: Floating cone method III. Elahi zeyni E., Kakaie R., Yousefi A. 2, 2011, *Journal of Mining & Environment*, Vol. 2, pp. 118-125.
7. Система многоуровневых октарных моделей горно-геологических объектов. Васильев П.В. 2012 г., Материалы XII Международной конференции Информатика. (XII International Conference "Informatics", 20-22 February 2012) 20-22 February 2012) в 2т, стр. 28-32.
- Sistema mnogourovnevnyh oktarnykh modelej gorno-geologicheskikh ob#ektov. Vasil'ev P.V. 2012 g., Materialy XII Mezhdunarodnoj konferencii Informatika. (XII International Conference "Informatics", 20-22 February 2012) 20-22 February 2012) v 2t, str. 28-32.
8. Lerchs H., Grossmann L. Optimum Disign of Open-Pit Mines. *Ttrans. CIM*. 1965, Vol. LXVII, pp. 17-24.
- Lerchs H., Grossmann L. Optimum Disign of Open-Pit Mines. *Ttrans. CIM*. 1965, Vol. LXVII, pp. 17-24.
9. Denby B., Schofield D., Surme T. Genetic Algorithms for Flexible Scheduling of Open Pit Operations. 1998
- Denby B., Schofield D., Surme T. Genetic Algorithms for Flexible Scheduling of Open Pit Operations. 1998
10. Caccetta L., Hill S.P. An application of branch and cut to open pit mine scheduling. *Journal of Global Optimization*. 2003, №.27, pp. 349-365
- Caccetta L., Hill S.P. An application of branch and cut to open pit mine scheduling. *Journal of Global Optimization*. 2003, №.27, pp. 349-365
11. Muir D.C.W. Pseudoflow, New Life for Lerchs-Grossmann Pit Optimisation. s.l. : Spectrum Series. *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning*, 2008. pp. 97-104. vol.14.
- Muir D.C.W. Pseudoflow, New Life for Lerchs-Grossmann Pit Optimisation. s.l. : Spectrum Series. *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning*, 2008. pp. 97-104. vol.14.
12. Ахо А.И., Хопкрофт Д., Ульман Д.Д. Структуры данных и алгоритмы.: Перв. с англ. М. : Издательский дом "Вильямс", 2000. p. 384
- Aho A.I., Hopkroft D., Ul'man D.D. Struktury dannyh i algoritmy.: Perv. s angl. M. : Izdatel'skij dom "Vil'jams", 2000. p. 384.
13. Кормен Т.Х. и др. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд.: Пер.с англ. М. : ООО И.Д.Вильямс, 2013. стр. 1328.
- Kormen T.H. i dr. Algoritmy: postroenie i analiz, 3-e izd.: Per.s angl. M. : ООО I.D.Vil'jams, 2013. str. 1328.
14. Lerchs H., Grossmann L. Optimum Disign of Open-Pit Mines. *Ttrans. CIM*. 1965, Vol. LXVII, pp. 17-24.
- Lerchs H., Grossmann L. Optimum Disign of Open-Pit Mines. *Ttrans. CIM*. 1965, Vol. LXVII, pp. 17-24.
15. Tolwinski B., Underwood R. A scheduling algorithm for open pit mines. *IMA Journal of Management Mathematics*. 1996, Vol. 7(3), pp. 247-270.
- Tolwinski B., Underwood R. A scheduling algorithm for open pit mines. *IMA Journal of Management Mathematics*. 1996, Vol. 7(3), pp. 247-270.
16. Петров Д.В. Применение методов глобальной оптимизации для поиска предельных границ рудных месторождений. Научные ведомости БелГУ. Серия Экономика. Информатика, 2015. №7 (204) Выпуск 34/1
- Petrov D.V. Primenenie metodov global'noy optimizatsii dlya poiska predel'nykh granits rudnykh mestorozhdeniy. Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya Ekonomika. Informatika, 2015. №7 (204) Vypusk 34/1
17. Михелев В.М., Васильев П.В., Петров Д.В. «Суперкомпьютеры, как средства моделирования граничных контуров карьеров рудных месторождений», Вопросы радиоэлектроники. Серия "Электронная вычислительная техника (ЭВТ)" Выпуск 1, Москва 2013., с. 5-10
- Mikhelev V.M., Vasil'ev P.V., Petrov D.V. «Superkomp'yutery, kak sredstva modelirovaniya granichnykh konturov kar'erov rudnykh mestorozhdeniy», Voprosy radioelektroniki. Seriya "Elektronnaya vychislitel'naya tekhnika (EVT)" Vypusk 1, Moskva 2013., s. 5-10
18. Genetic Algorithms for Flexible Scheduling of Open Pit Operations. Denby B., Schofield D. and Surme T. 1998, *Proceedings of the 27th Int. Sym. of Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industries*.
- Genetic Algorithms for Flexible Scheduling of Open Pit Operations. Denby B., Schofield D. and Surme T. 1998, *Proceedings of the 27th Int. Sym. of Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industries*.