МАТЕМАТИКА

MSC 34M50

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ КРИВОЙ

Г.Н. Аверьянов, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, e-mail: soldatov48@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена классическая задача линейного сопряжения для аналитических функций на кусочно-гладкой кривой во всей шкале весовых пространств Гельдера. Получена явная степенно-логарифмическая асимптотика решения этой задачи в угловых точках кривой в предположении, что аналогичную асимптотику допускает правая часть задачи.

Ключевые слова: задача линейного сопряжения, аналитические функции, пространства Гельдера, кусочно-гладкие кривые.

Рассмотрим классическую задачу линейного сопряжения для аналитических функций

$$\phi^+ - G\phi^- = g \tag{1}$$

на ориентированной кусочно-гладкой кривой Γ в семействе весовых пространств Гельдера. Под кусочно-гладкой кривой понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Каждая из дуг Γ_j определённым образом ориентирована и предельные значения $\phi^\pm$ в (1) понимаются по отношению к этой ориентации.

Задача (1) хорошо изучена [6] как в пространствах Гельдера, так и в весовых гельдеровых пространствах функций, ограниченных в окрестности точек $\tau \in F$ или допускающих в них особенности порядка меньше 1. Как известно, основным инструментом ее исследования служат интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}\,, \quad z \notin \Gamma\,, \tag{2}$$

и связанный с ним сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}\,, \quad t_0 \in \Gamma \setminus F\,. \tag{3}$$

В данной работе эти результаты распространим на весовые пространства любого порядка. Остановимся подробнее на определении этих пространств.

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113РК01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Для компакта K на плоскости обозначим $C^\mu(K)$, $0<\mu<1$, обычное пространство Гельдера с показателем μ. Для фиксированной точки $\tau\in K$ пусть $C^\mu_0(K;\tau)$ означает пространство всех ограниченных функций $\varphi(z)$ на $K\backslash\tau$, для которых $\psi(z)=|z-\tau|^\mu\varphi(z)\in C^\mu(K)$, относительно нормы

$$|\varphi|=\sup_{z\in K}|\varphi(z)|+\sup_{z_i\in K}\frac{|\psi(z_1)-\psi(z_2)|}{|z_1-z_2|^\mu}\,,$$

это пространство банахово. Наконец, пусть пространство $C^\mu_\lambda(K;\tau)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, состоит из всех функций $\varphi(z)=|z-\tau|^\lambda\varphi_0(z)$, $\varphi_0\in C^\mu_0(K;\tau)$, снабженное «перенесенной» нормой $|\varphi|=|\varphi_0|_{C^\mu_0}$.

Введенное весовое пространство обладает следующими свойствами [7].

Лемма 1. (a) *Операция умножения как билинейное отображение ограничено $C^\mu_{\lambda'}\times C^\mu_{\lambda''}\to C^\mu_{\lambda'+\lambda''}$.*

(b) *Семейство пространств (C^μ_λ) монотонно убывает (в смысле вложения банаховых пространств) по каждому из параметров μ и λ.*

(c) *Для любых $\alpha\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $n=0,1,\ldots$ функции*

$$|z-\tau|^{i\alpha}\in C^\mu_0(K,\tau),\quad |z-\tau|^{i\alpha}\ln^n|z-\tau|\in C^\mu_{-\varepsilon}(K,\tau)\,.$$

Пространство $C^\mu_\lambda(K;\tau)$ ниже используем в случаях, когда K является либо радиальной гладкой дугой Γ_τ с концом τ, либо криволинейным сектором S_τ с вершиной τ. Гладкая дуга называется радиальной по отношению к своему концу τ, если окружности $|z-\tau|=r$ при $0<r\le\delta$, где δ – расстояние между концами, пересекают эту дугу и притом некасательно ровно в одной точке. Для любой гладкой дуги с концом τ всегда найдется такое $\delta>0$, что пересечение $\Gamma\cap\{|z-\tau|\le\delta\}$ является радиальной дугой. Под криволинейным сектором с вершиной τ понимается односвязная область, граница которой составлена из двух радиальных дуг с общей вершиной τ, и дуги окружности с центром τ. Радиальные дуги играют роль боковых сторон этого сектора. Заметим, что для двух указанных типов компакта K утверждение (c) леммы 1 сохраняется и для функций $(z-\tau)^{i\alpha}$, $(z-\tau)^{i\alpha}\ln^n(z-\tau)$, определяемых по некоторой ветви логарифма.

Хорошо известно [6], что если область D ограничена гладким контуром, не пересекается с гладкой дугой Γ, лежит вне некоторой окрестности ее концов и прилегает к Γ в том смысле, что $\Gamma\cap\partial D$ не пусто и является дугой, то интегральный оператор типа Коши I ограничен $C^\mu(\Gamma)\to C^\mu(\overline{D})$. В частности, если две такие области $D^\pm$ не пересекаются, т.е. прилегают к Γ с разных сторон (пусть D^+ лежит слева от Γ), то для интеграла типа Коши $\phi=I\varphi$ с плотностью $\varphi\in C^\mu(\Gamma)$ можно рассмотреть граничные значения $\phi^\pm$ на общей части $\Gamma_0=(\partial D^+)\cap\partial D^-\subseteq\Gamma$. Для этих граничных значений справедлива формулы Сохоцкого-Племеля

$$2\phi^\pm=\pm\varphi+S\varphi\,,\tag{4}$$

связывающая интегралы (2) и (3).

Действие интегрального оператора I в весовых пространствах Гельдера (без конкретизации показателя μ) изучено в [6]. В пространствах C^{μ}_{λ} этот результат был уточнен в [8], который сформулируем отдельно.

Теорема 1. *Пусть гладкая дуга Γ с концом τ является продолжением боковой стороны сектора S_τ. Тогда интегральный оператор типа Коши I ограничен $C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,\tau) \to C^{\mu}_{\lambda}(\overline{S}_\tau,\tau)$.*

Из этой теоремы непосредственно следует, что если $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,\tau)$, где $0<\lambda<1$, то $(I\varphi)(z)-(I\varphi)(\tau) \in C^{\mu}_{\lambda}(\overline{S}_\tau,\tau)$. Для доказательства достаточно воспользоваться тождеством

$$\frac{z-\tau}{(t-\tau)(t-z)} = \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\tau}\,,$$

согласно которому

$$(I\varphi)(z)-(I\varphi)(\tau) = (z-\tau)\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_1(t)dt}{t-z}$$

с функцией $\varphi_1(t)=(t-\tau)^{-1}\varphi(t) \in C^{\mu}_{\lambda-1}(\Gamma,\tau)$.

Если $\varphi(t)$ обладает указанным свойством с точностью до константы, то функция $\phi = I\varphi$ в окрестности точки τ ведет себя как $\ln(z-\tau)$.

Лемма 2. *Пусть в условиях теоремы 1 функция $\varphi(t)-a \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,\tau)$, $0<\lambda<1$. Тогда для $\phi=I\varphi$ справедливо разложение*

$$\phi(z) = \pm a\ln(z-\tau)+b+\phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D},\tau)\,,$$

где выбирается верхний знак, если τ является правым концом ориентируемой дуги Γ, и нижний знак в противном случае.

При $\lambda=\mu$ условие на φ в лемме можно записать в форме $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ и ее утверждение сводится к $\phi(z) \mp \varphi(a)\ln(z-\tau) \in C^{\mu}(\overline{D})$. В этом случае данное утверждение хорошо известно [6]. В общем случае эта лемма перекрывается приводимой ниже леммой 4.

Обратимся к кусочно-гладкой кривой Γ, составленной из (разомкнутых или сомкнутых) ориентируемых гладких дуг $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$, которые попарно могут пересекаться только но своим концам. Множество, образованное концами этих дуг, обозначим F. Выберем $\rho>0$ столь малым, что круги $B_\tau=\{|z-\tau|\le\rho\}$ с центрами $\tau\in F$ попарно не пересекаются и для каждого τ кривая $\Gamma\cap B_\tau$ состоит из некоторого числа радиальных дуг $\Gamma_{\tau,j}$, $1\le j\le n_\tau$, с общим концом τ, которые служат боковыми сторонами криволинейных секторов $S_{\tau,j}$, $1\le j\le n_\tau$, с вершиной τ. Эти дуги ориентируем одинаково, считая τ их левым концом. В результате, получаем сигнатуру ориентации $\sigma(\tau,j)=\pm1$, где выбирается знак плюс, если ориентация $\Gamma_{\tau,j}$ противоположна с Γ и знак минус в противном случае. Общее число всех дуг $\Gamma_{\tau,j}$ равно $2m$ и их можно записать в виде семейства Γ^s_k, $1\le k\le m$, $s=0,1$, где для $\Gamma_{\tau,j}\subseteq\Gamma_k$ полагается $\Gamma_{\tau,j}=\Gamma^0_k$, если $\sigma(\tau,j)=-1$ и $\Gamma_{\tau,j}=\Gamma^1_k$ в противном случае. Таким образом, дуга Γ_k ориентирована от Γ^0_k к Γ^1_k. Выберем еще строго внутри Γ_k дугу Γ^*_k, перекрывающуюся с каждой из дуг Γ^0_k, Γ^1_k и рассмотрим вне Γ семейство попарно непересекающихся областей $D^{\pm}_k$, $1\le k\le m$, которые также не пересекаются с некоторой окрестностью множества F и для которых

$(\partial D_k^+) \cap \partial D_k^- = \Gamma_k^*$, $1 \le k \le m$. Тогда, очевидно, обьединение всех $4m$ областей

$$D_k^{\pm},\ 1 \le k \le m, \quad S_{\tau,j}\,, \quad \tau \in F,\ \ 1 \le j \le n_\tau\,, \tag{5}$$

вместе с кривой Γ образуют открытую окрестность этой кривой.

Исходя из векторного весового порядка $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$, введем пространство $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ всех непрерывных на $\Gamma \setminus F$ функций $\varphi(t)$, соответствующие сужения которых принадлежат $C^\mu(\Gamma_k^*)$, $1 \le k \le m$, и $C_{\lambda_\tau}^\mu(\Gamma_{\tau,j}, \tau)$, $\tau \in F$, $1 \le j \le n_\tau$. Аналогичным образом вводится и пространство $C^\mu(\Gamma; F)$ кусочно-гельдеровых функций, когда эти сужения принадлежат классу C^μ на всех указанных дугах.

Точно также но определению пространство $C_\lambda^\mu(\widehat{D}; F)$ состоит из аналитических в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функций $\phi(z)$, соответствующие сужения которых на области (5) принадлежат $C^\mu(\overline{D_k^\pm})$ и $C_{\lambda_\tau}^\mu(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)$. Очевидно, для функций ϕ этого класса определены односторонние предельные значения $\phi^\pm \in C_\lambda^\mu(\Gamma; F)$. Единственное уточнение в этом определении требуется для точек τ с $n_\tau = 1$, когда роль сектора $S_{\tau,1}$ играет круг B_τ с разрезом вдоль Γ_{τ_1}. В этом случае множество $S_{\tau,1}$ радиальным отрезком разобьем на два обычных сектора и потребуем, чтобы классу $C_{\lambda_\tau}^\mu$ принадлежали сужения ϕ на эти сектора. В этом случае для сужения ϕ на весь сектор $S_{\tau,1}$ писать $\phi \in C_{\lambda_\tau}^\mu(\widehat{S}_{\tau,1}, \tau)$.

Нетрудно видеть, что определения этих пространств не зависят от выбора семейства (5). В самом деле, пусть $\widetilde{S}_{\tau,j}$ отвечают $\widetilde{\rho}$ и выбрано соответствующее семейство $\widetilde{D}_k^\pm$ прилегающих областей. Необходимо показать, сужения функции ϕ на эти области также принадлежат соответствующим пространствам. Рассматривая надлежащее третье аналогичное (5) семейство областей, без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\rho} < \rho$ и $\widetilde{D}_k^\pm \supseteq D_k^\pm$ для всех $1 \le k \le m$. Пусть Γ содержится в круге $|z| < R$ большого радиуса и область $D^0 \subseteq D$ такова, что вместе со всеми областями (5) имеем открытое покрытие множества $\{|z| < R\} \setminus \Gamma$. Очевидно, достаточно убедиться, что функция ϕ принадлежит классу C^μ в замыкании $\overline{D}$ каждой области $D = \widetilde{D}_r^\pm$. Но вместе с D^0 множества (5) образуют открытое покрытие $\overline{D} \setminus \Gamma_r$. В частности, по предположению $\phi \in C^\mu(\overline{D \cap D_k^\pm})$ и $\phi \in C^\mu(\overline{D \cap S_{\tau,j}})$. Но для каждой точки $t \in K \cap \Gamma_r$ найдется такой круг B с центром в этой точке, что множество $B \cap D$ целиком содержится в одном из областей (5). Отсюда включение $\phi \in C^\mu(\overline{D})$ получается непосредственно.

По отношению к этим пространствам теорему 1 можно переформулировать следующим образом: если $\varphi \in C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, то интеграл типа Коши $\phi = I\varphi$ принадлежит $C_\lambda^\mu(\widehat{D}; F)$ и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля (4). На этот факт в дальнейшем ссылаемся также как на теорему 1.

Для $\varphi \in C^\mu(\Gamma; F)$ имеем $2m$ предельных значений, которые можно записать следующими двумя способами:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\tau, j) &= \lim_{t \to \tau, t \in \Gamma_{\tau,j}} \varphi(t)\,, \quad 1 \le j \le m,\ \tau \in F\,, \\ \widehat{\varphi}_k^s &= \lim_{t \to \tau, t \in \Gamma_k^s} \varphi(t), \quad 1 \le k \le m,\ s = 0, 1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

В принятых обозначениях лемму 2 также можем переформулировать следующим образом: если $\varphi \in C^\mu(\Gamma, F)$, то в секторах $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $\phi = I\varphi$ представим в виде

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma(\tau,j)\widehat{\varphi}(\tau,j)\right)\ln(z-\tau) + \phi_{\tau,j}(z)\,, \quad \phi_{\tau,j}\in C^\mu(\overline{S}_{\tau,j})\,, \tag{7}$$

где $\ln(z-\tau)$ – некоторая непрерывная в $S_{\tau,j}$ ветвь логарифма. Конечно, при $n_\tau = 1$ условие на $\phi_{\tau,j}$ здесь следует записывать в форме $\phi_{\tau,j}\in C^\mu(\widehat{S}_{\tau,1})$, т.е. в смысле принадлежности классу C^μ в каждом из двух секторов, на которые разбивается область $S_{\tau,1}$ радиальным отрезком.

Обратимся к задаче (1), дополнительно предполагая, что функция $G(t)$ отлична от нуля всюду на $\Gamma\setminus F$, включая её предельные значения $\widehat{G}(\tau,j)$ в точках $\tau\in F$. Очевидно, в этом случае $1/G\in C^\mu(\Gamma;F)$ и аналогичным свойством обладает непрерывная на $\Gamma\setminus F$ ветвь логарифма $\ln G(t)$.

В обозначениях (6) введем приращения $(\ln G)\big|_{\Gamma_k} = (\widehat{\ln G})^1_k - (\widehat{\ln G})^0_k$ на дуге Γ_k и сумму

$$\operatorname{Ind} G = \sum\nolimits_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i}(\ln G)\big|_{\Gamma_j}\,, \tag{8}$$

которую назовем индексом Коши функции G. Очевидно, полученное комплексное число не зависит от выбора ветви логарифма. Заметим, что согласно (6) имеет место равенство

$$\operatorname{Ind}G = \sum_{\tau\in F}\zeta_\tau, \quad \zeta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma(\tau,j)(\widehat{\ln G})(\tau,j)\,. \tag{9}$$

Положим

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\ln\widehat{G}_\tau\,, \quad 0\le\alpha_\tau<1\,, \tag{10}$$

где для краткости

$$\widehat{G}_\tau = \prod_{j=1}^{n_\tau}[\widehat{G}(\tau,j)]^{\sigma(\tau,j)}\,,$$

и введем семейство дискретных множеств $\Delta_\tau = \{\alpha_\tau + k, k\in\mathbb{Z}\}$, $\tau\in F$. Для весового порядка запись $\delta\in\Delta$ означает, что $\delta_\tau\in\Delta_\tau$ для всех $\tau\in F$.

Очевидно, $\zeta_\tau - (\alpha_\tau + i\beta_\tau)\in\mathbb{Z}$, поэтому с учетом (8) – (10) для любого $\delta\in\Delta$ число

$$æ = \operatorname{Ind} G - \sum\nolimits_{\tau\in F}(\delta_\tau + i\beta_\tau)\in\mathbb{Z}\,. \tag{11}$$

Теорема 2. *Для любого $\delta\in\Delta$ существует единственная аналитическая в $D=\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функция $X(z)$, которая всюду отлична от нуля и удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered} X(z),\ 1/X(z)\in C^\mu(\overline{D_k^\pm}), \quad 1\le k\le m; \\ X_{\tau,j}(z),\ 1/X_{\tau,j}(z)\in C^\mu(\overline{S}_{\tau,j}), \quad \tau\in F,\ 1\le j\le n_\tau\,, \end{gathered} \tag{12}$$

где $X_{\tau,j}(z) = X(z)(z-\tau)^{-\delta_\tau - i\beta_\tau}$, $z\in S_{\tau,j}$, и

$$X^+ = GX^-\,, \tag{13}$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z)z^{æ} = 1\,. \tag{14}$$

□ Если две функции X_1, X_2 удовлетворяют условиям (12)-(14), то их отношение $Y = X_1/X_2$ обладает свойством $Y^+ = Y^-$ и, следовательно, является функцией, аналитической в $\mathbb{C}\setminus F$. Этот факт является очевидным следствием хорошо известного свойства об аналитическом продолжении, которое сформулируем отдельно и докажем позже. ■

Лемма 3. *Пусть простая область D_0 разбита ориентируемой гладкой дугой Γ_0 на две подобласти $D^{\pm}$, считая D^+ лежащей слева от Γ_0. Тогда любая функция $\phi_0 \in C(\overline{D_0})$, аналитическая в подобластях $D^{\pm}$, аналитична во всей области D_0.*

Итак, функция $Y(z)$ аналитична в $\mathbb{C}\setminus F$ и в силу (12) в окрестности точек $\tau \in F$ ограничена. Поэтому она аналитична на всей плоскости и на основании (14) стремится к 1 при $z \to \infty$. В силу теоремы Лиувилля отсюда $Y(z) \equiv 1$, что означает единственность функции $X(z)$.

Исходя из непрерывной на $\Gamma\setminus F$ ветви логарифма $\ln G \in C^{\mu}(\Gamma; F)$, рассмотрим функцию

$$X_0(z) = \exp[I(\ln G)](z)\,, \quad z \in D\,.$$

Применяя к $\varphi = \ln G$ соотношение (7), убеждаемся, что функция $X_0(z)$ удовлетворяет условиям (12) по отношению к семейству ζ_τ в (9) и стремится к 1 при $z \to \infty$. Кроме того, она удовлетворяет и краевому условию (13). Поэтому можем положить

$$X(z) = \prod_{\tau\in F}(z-\tau)^{\delta_\tau + i\beta_\tau - \zeta_\tau} X_0(z)\,.$$

Остаётся заметить, что в силу (8), (11)

$$\sum\nolimits_\tau (\zeta_\tau - \delta_\tau - i\beta_\tau) = æ$$

и, следовательно, выполнено и условие (14).

□ Доказательство леммы 3 легко получается из формулы Коши. Если дуги $\Gamma^{\pm} = \partial D^{\pm}\setminus\Gamma_0$ ориентированы положительно по отношению к $D^{\pm}$, то согласно этой формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{\pm}} \frac{\phi_0(t)dt}{t-z} \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\phi_0(t)dt}{t-z} = \begin{cases} \phi_0(z), & z \in D^{\pm}, \\ 0, & z \in D^{\mp}. \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим представление

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_0} \frac{\phi_0(t)dt}{t-z}, \quad z \in D_0\setminus\Gamma_0,$$

которое доказывает аналитичность функции ϕ_0 в области D_0. ■

Следуя [6], функцию $X(z)$ назовём канонической по отношению к задаче (1) и весовому порядку $\delta \in \Delta$. Процедура построения этой функции также впервые указана в [6].

Отметим, что асимптотика канонических матриц-функции в точках $\tau \in F$ для задачи (1) в общем векторном случае приведена в [9].

Рассмотрим задачу (1) в классе функций $\phi \in C^{\mu}_{\lambda}$, поведение которых на бесконечности подчиняется оценке

$$|\phi(z)| \le C|z|^k, \quad |z| \ge R, \tag{16}$$

где R выбрано столь большим, что $\Gamma \subseteq \{|z| < R\}$ и $k \in \mathbb{Z}$ фиксировано. Эта оценка равносильна тому, что функция $\phi(z)$ в области $|z| \ge R$ раскладывается в ряд

$$\phi(z) = \sum\nolimits_{j=-\infty}^{k} c_j z^j .$$

Наибольшее $j \le k$, для которого $c_j \ne 0$ в этом разложении называется порядком $\deg \phi$ на бесконечности. Таким образом, оценку (16) можем выразить условием $\deg \phi \le k$. Условимся под $\deg p$ понимать степень многочлена p, считая $p = 0$ при $\deg p < 0$, и обозначим P_k класс многочленов p степени $\deg p \le k$. Очевидно, его размерность равна $\max(0, k+1)$.

Пользуясь канонической функцией, обычным образом [6] легко построить эффективное решение задачи (1).

Теорема 3. *Пусть весовой порядок λ удовлетворяет условию $\lambda_\tau \notin \Delta_\tau$, $\tau \in F$, так что найдется $\delta \in \Delta$ со свойством $-1 < \lambda_\tau - \delta_\tau < 0$. Пусть X – каноническая функция задачи (1), отвечающая δ. Тогда в классе*

$$\{\phi \in C^{\mu}_{\lambda},\ \deg \phi \le k - 1\} \tag{17}$$

при $æ + k \ge 0$ все решения однородной задачи $\phi^+ = G\phi^-$ состоят из функций Xp, $p \in P_{æ+k-1}$, а неоднородная задача всегда разрешима и одним из её решений служит функция

$$\phi = X\phi_0, \quad \phi_0 = I[(X^+)^{-1}g]. \tag{18}$$

Если $æ + k < 0$, то однородная задача в классе (17) имеет только нулевое решение, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int_\Gamma [X^+(t)]^{-1} g(t) p(t) dt = 0, \quad p \in P_{-æ-k-1}. \tag{19}$$

При выполнении этих условий решение задачи даётся формулой (18).

□ В силу леммы 1 и теоремы 1 преобразование $\phi \to \phi_0 = X^{-1}\phi$ осуществляет изоморфизм класса (17) на класс

$$\{\phi_0 \in C^{\mu}_{\nu},\ \deg \phi \le k + æ - 1\} \tag{20}$$

с весовым порядком $\nu_\tau = \lambda_\tau - \delta_\tau$, удовлетворяющим условию $-1 < \nu < 0$. При этом преобразовании с учетом (13) задача (1) переходит в $\phi_0^+ - \phi_0^- = g_0$ с правой частью $g_0 = (X^+)^{-1}g \in C^{\mu}_{\nu}(\Gamma, F)$. Если $g = 0$, то тогда функция ϕ_0 аналитически продолжается в $\mathbb{C}\setminus F$ и в точках $\tau \in F$ допускает слабые особенности. Поэтому в действительности эта функция аналитична на всей плоскости, поэтому на основании (20) и теоремы Лиувилля эта функция является многочленом p степени $\deg p \le k + æ$. В частности, $\phi = 0$ при $k + æ < 0$.

При $k + æ \ge 0$ интеграл типа Коши $\phi_0 = Ig_0$ принадлежит классу (20) и в силу формул Сохоцкого-Племеля (4) удовлетворяет краевому условию $\phi_0^+ - \phi_0^- = g_0$, поэтому формула (18) доставляет решение задачи (1) в классе (17). При $k + æ < 0$ функцию g_0 нужно подчинить дополнительным условиям, обеспечивающим ее принадлежность классу (20). В силу разложения

$$(Ig_0)(z) = \sum_{j\ge 0} c_j z^{-j-1}\,, \quad c_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_0(t)t^j dt\,,$$

интеграла типа Коши в окрестности ∞ эти условия сводятся к $c_j = 0,\ 0 \le j \le -(k + æ) - 1$, что равносильно условиям ортогональности (19). ■

Теорема 3 позволяет описать степенно-логарифмическую асимптотику в точках $\tau \in F$ решений задачи (1) при условии, что аналогичное поведение имеет правая часть g задачи (1). Начнем со следующего вспомогательного результата, дополняющего лемму 2.

Лемма 4. *Пусть гладкая дуга Γ_0 с концами $\tau \ne \tau'$ ориентирована от τ к τ', задана простая область $D_0 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$, для которой $\overline{D_0} \cap \Gamma_0 = \{\tau\}$, и выбрана ветвь логарифма $\ln(z-\tau)$ с разрезом вдоль Γ_0 и граничными значениями $\ln^+(t-\tau) = \ln(t-\tau)$ и $\ln^-(t-\tau) = \ln(t-\tau) + 2\pi i$ на Γ_0. Пусть функция*

$$\varphi(t) = (t-\tau)^\zeta q[\ln(t-\tau)] + \varphi_0(t)\,, \quad \varphi_0 \in C_\lambda^\mu(\Gamma_0, \tau)\,, \tag{21}$$

где $-1 < \operatorname{Re}\zeta < \lambda < 0$ и $q(u)$ – многочлен некоторой степени $k \ge -1$ (при $k = -1$ полагается $q = 0$). Тогда интеграл типа Коши с плотностью φ в области D_0 представим в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} = (z-\tau)^\zeta p[\ln(z-\tau)] + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C_\lambda^\mu(\overline{D_0}, \tau)\,, \tag{22}$$

где многочлен p имеет ту же степень k и однозначно определяется из уравнения

$$p(u) - e^{2\pi i\zeta}p(u+2\pi i) = q(u)\,. \tag{23}$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $\operatorname{Re}\zeta = 0,\ 0 < \lambda < 1$ с той разницей, что в представлении (22) функция $\phi_0 - c_0 \in C_\lambda^\mu(\overline{D_0}, \tau)$ с некоторой постоянной $c_0 \in \mathbb{C}$, а степень многочлена p не превосходит k при $\zeta \ne 0$ и $k+1$ при $\zeta = 0$.

□ Убедимся прежде всего, что при $e^{2\pi i\zeta} \ne 1$ уравнение (23) в классе многочленов степени не выше n однозначно разрешимо. Поскольку оператор N этого уравнения можно записать в форме

$$Np = (1 - e^{2\pi i\zeta})p - \sum_{k\ge 1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}p^{(k)}\,,$$

достаточно убедиться, что уравнение $Np = 0$ имеет только нулевой решение. Но этот факт является следствием того, что многочлен Np имеет ту же степень, что и p. Что касается случая $\zeta = 0$, то в этом случае

$$Np = -\sum_{k\geq 1} \frac{(2\pi i)^k}{k!} p^{(k)} \ ,$$

и предыдущие рассуждения достаточно применить к p'. Таким образом, решение p уравнения $p(u) - p(u + 2\pi i) = q(u)$ определено с точностью до константы и имеет степень, на единицу большую степени q.

Выберем положительные числа $\rho_1 < \rho_2$ столь малыми, что пересечение круга $\{|z - \tau| \leq \rho_k\}$ с Γ_0 является некоторой дугой Γ_k, $k = 1, 2$ и, пусть S_k есть дополнение к Γ_0 в этом круге. Очевидно, утверждение леммы достаточно установить но отношению к сектору S_1, записывая условие на функцию ϕ_0 в (22) в форме $\phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{S}_1, \tau)$. Применим в секторе S_2 к функции $\Omega(z) = (z - \tau)^{\zeta} p[\ln(z - \tau)]$, где многочлен $p(u)$ есть решение уравнения (23), формулу Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\tau|=\rho_2} \frac{\Omega(t)dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{[\Omega^+(t) - \Omega^+(t)]dt}{t - z} = \Omega(z)\,, \quad z \in S_2\,.$$

В результате приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{(t - \tau)^{\zeta} q[\ln(t - \tau)]dt}{t - z} = \Omega(z) + h_0(z), \quad z \in S_1\,,$$

где функция $h_0(z)$ аналитична в круге $|z - \tau| < \rho_2$. Отсюда приходим к равенству (22) с функцией

$$\phi_0(z) = h_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_2} \frac{(t - \tau)^{\zeta} q[\ln(t - \tau)]dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - z}\,, \quad z \in S_1\,.$$

Если $-1 < \operatorname{Re}\zeta < \lambda < 0$, то на основании теоремы 1 функция $\phi_0 \in C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{S}_1, \tau)$. Если $\operatorname{Re}\zeta = 0$ и $0 < \lambda < 1$, то согласно очевидному соотношению

$$\frac{z - \tau}{(t - \tau)(t - z)} = \frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \tau}$$

можем записать

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - z} = (z - \tau) \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi_1(t)dt}{t - z} + \int_{\Gamma_0} \varphi_1(t)dt$$

с функцией $\varphi_1(t) = (t - \tau)^{-1}\varphi_0(t) \in C^{\mu}_{\lambda-1}(\Gamma_0, \tau)$. Поскольку $-1 < \lambda - 1 < 0$, остается воспользоваться теоремой 1. ■

Отметим, что уравнение (23) можно решить в явной форме. С этой целью рассмотрим аналитическую функцию $g(u) = 1 - e^{2\pi i u}$. Исходя из тейлоровского разложения

$g(\zeta+u)$ по степеням u и операции дифференцирования $Dp = p'$ в классе многочленов p, введем в этом классе линейную операцию

$$g(\zeta+D)p = \sum_{k\geq 0} \frac{g^{(k)}(\zeta)}{k!} D^k p\,.$$

В терминах этой операции уравнение (23) можно записать в виде $g(\zeta+D)p = q$. Пусть $\zeta \neq 0$ и $h(u) = (1-e^{2\pi i u})^{-1}$. Тогда записывая тождество $h(\zeta+u)g(\zeta+u) = g(\zeta+u)h(\zeta+u) = 1$ для тейлоровских разложений но степеням u, убеждаемся, что операции $g(\zeta+D)$ и $h(\zeta+D)$ взаимно обратны, так что решением уравнения (23) служит $p = h(\zeta+D)q$.

При $\zeta = 0$ рассмотрим разложение функции $h(u)$ в ряд Лорана

$$h(u) = -\frac{1}{2\pi i}u^{-1} + \sum_{k\geq 0} c_k u^k$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1}{2}\,, \quad c_1 = -\frac{2\pi i}{12}\,, \quad c_2 = 0\,, \dots\,,$$

и соответственно этому разложению положим

$$h(D)p = -\frac{1}{2\pi i}p^{(-1)} + \sum_{k\geq 0} c_D^k p, \quad p^{(-1)}(u) = \int_0^u p(v)dv\,.$$

Тогда аналогично предыдущему проверяется, что $g(D)h(D)p = p$ для любого многочлена p, однако порядок операций здесь существенен. Поэтому многочлен $p = h(D)q$ является решением уравнения (23) и в этом случае.

Согласно лемме 1 функции вида (21), (22) принадлежат классу $\cap_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda-\varepsilon}$, который обозначим $C^\mu_{\lambda-0}$. Аналогичным образом положим $C^\mu_{\lambda+0} = \cup_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda+\varepsilon}$. Очевидно, но отношению к классу $C^\mu_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ условие на λ в теореме 3 можно опустить, выбирая $\delta \in \Delta$ но условию

$$\delta_\tau - 1 < \lambda_\tau \leq \delta_\tau\,, \ \tau \in F\,. \tag{24}$$

Теорема 4. *Пусть функция g принадлежит классу $C^\mu_{\lambda-0}(\Gamma, F)$ и $\delta \in \Delta$ выбрано по условию (24). Пусть для фиксированного $\tau \in F$ сужение функции g иа дуги $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \leq j \leq n_\tau$, представимо в виде*

$$g(t) = (t-\tau)^\zeta q_j[\ln(t-\tau)] + g_j(t), \quad g_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\Gamma_{\tau,j}, \tau)\,, \tag{25}$$

где $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau$ и $q_j \in P_k$.

Тогда при $\lambda_\tau < \delta_\tau$ любое решение $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ задачи (1) в секторах $S_{\tau,j}$ представимо в виде

$$\phi(z) = (z-\tau)^\zeta p_j[\ln(z-\tau)] + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)\,, \tag{26}$$

с некоторыми многочленами $p_j \in P_k$. Если $\lambda_\tau = \delta_\tau$, то

$$\phi(z) = (z-\tau)^\zeta p_j[\ln(z-\tau)] + c_j(z-\tau)^{\zeta_\tau} + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j}, \tau)\,, \tag{27}$$

с некоторыми $c_j \in \mathbb{C}$ и многочленами p_j, степень которых не превосходит k при $\operatorname{Im}\zeta \neq \beta_\tau$ и $k+1$ при $\operatorname{Im}\zeta = \beta_\tau$.

□ Согласно теореме 3 решение $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(\widehat{D}, F)$ задачи (1) представимо в виде

$$\phi = X(\phi_0 + p_0), \quad \phi_0 = I[(X^+)^{-1}g]\,, \tag{28}$$

с некоторым многочленом p_0. Тогда на основании (25) и теоремы 2 можем записать

$$[X^+(t)]^{-1}g(t) = (t-\tau)^{\zeta-\delta_\tau-i\beta_\tau}q_j[\ln(t-\tau)] + g^0_j(t)\,, \quad g^0_j \in C^\mu_{\nu_\tau+0}(\Gamma_{\tau,j},\tau)\,,$$

где $\operatorname{Re}\zeta - \delta_\tau = \nu_\tau$ и $-1 < \nu_\tau \leq 0$.

Предположим сначала, что $\nu_\tau < 0$. Тогда в силу леммы 4 отсюда

$$\phi_0(z) = (z-\tau)^{\zeta-\delta_\tau-i\beta_\tau}p_j[\ln(z-\tau)] + \phi^0_j(z)\,, \quad \phi^0_j \in C^\mu_{\nu_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)\,,$$

что для функции ϕ в (28) приводит к соотношению (26).

Если $\nu_\tau = 0$, то на основании леммы 4

$$\phi_0(z) = (z-\tau)^{i(\operatorname{Im}\zeta-\beta_\tau)}p_j[\ln(z-\tau)] + c_j + \phi^0_j(z)\,, \quad \phi^0_j \in C^\mu_{+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)\,,$$

с многочленами p_j соответствующей степени. Совместно с (28) отсюда следует второе утверждение теоремы.

Проиллюстрируем теорему в ситуации, когда $\lambda_\tau = \zeta = 0$ и q_j являются многочленами нулевой степени, т.е. когда условие (25) переходит в

$$g(t) - a_j \in C^\mu_{+0}(\Gamma_{\tau,j},\tau)\,, \quad 1 \leq j \leq n_\tau\,. \tag{29}$$

Напомним, что в обозначениях (10) множество Δ_τ состоит из чисел $\alpha_\tau + j$, $j \in \mathbb{Z}$, где $0 \leq \alpha_\tau < 1$. Поэтому на основании теоремы 4 при $0 < \alpha_\tau < 1$ любое решение ϕ задачи (1), принадлежащее $C^\mu_{-0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)$ в окрестности τ, в действительности обладает свойством $\phi(z) - c_j \in C^\mu_{+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)$ с некоторой постоянной c_j. Если $\alpha_\tau = 0$, но $\beta_\tau \neq 0$, то согласно (27) имеем разложение

$$\phi(z) = b_j + c_j(z-\tau)^{i\beta_\tau} + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)\,.$$

Наконец при $\alpha_\tau = \beta_\tau = 0$ многочлены p_j в (27) имеют степень 1 и, следовательно, в этом случае

$$\phi(z) = b_j + c_j\ln(z-\tau) + \phi_j(z), \quad \phi_j \in C^\mu_{\lambda_\tau+0}(\overline{S}_{\tau,j},\tau)\,. \tag{30}$$

Таким образом, решение ϕ будет ограниченным в окрестности τ для любой функции g вида (29) тогда и только тогда, когда $\alpha_\tau + i\beta_\tau \neq 0$. По терминологии Н.И. Мусхелишвили [6] точки $\tau \in F$, для которых $\zeta_{\tau,0} \neq 0$, называются неособенными.

Из доказательства теоремы 4 и леммы 2 видно, что при $\alpha_\tau = 0$ коэффициенты c_j в разложении (30) обращаются в нуль тогда и только тогда, когда постоянные a_j в (29) подчинены условию

$$\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma(\tau,j)\frac{\widehat{g}(\tau,j)}{\widehat{X^+}(\tau,j)} = 0\,. \tag{31}$$

Здесь учтено, что в соответствии с принятым предположением и теоремой 2 каноническая функция $X(z) \in C^{\mu}(\overline{S}_{\tau,j})$ и, следовательно, $X^+ \in C^{\mu}(\Gamma_{\tau,j})$.

Рассмотрим частный случай, когда $n_\tau = 2$ и знаки $\sigma(\tau, j)$, $j = 1, 2$, противоположны, например, $\sigma(\tau, 1) = -\sigma(\tau, 2) = 1$. Тогда в окрестности τ кривая Γ ориентирована единым образом, причем дуга $\Gamma_{\tau,1}$ лежит слева от τ и ее можно обозначить $\Gamma_{\tau,-0}$, и аналогично $\Gamma_{\tau,2} = \Gamma_{\tau,+0}$. Соответственно предельные значения (6) на этих дугах можно обозначить $\varphi(\tau \pm 0)$. В этом случае (10) принимает вид

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(\tau - 0)}{G(\tau + 0)}\,, \quad 0 \le \alpha_\tau < 1\,.$$

Пусть $G(\tau - 0) = G(\tau + 0)$ и выполнено условие (29), т.е. $g(t) - a_\pm \in C^{\mu}_{+0}(\Gamma_{\tau\pm 0}, \tau)$. Тогда для аналитической функции ϕ в двух секторах $S_{\tau,1}$ и $S_{\tau,2}$ будем иметь разложение (30). Пусть каноническая функция $X(z)$ в теореме 2 построена для случая, когда все $\alpha_\tau + i\beta_\tau = 0$. Тогда ее сужение X_j на сектор $S_{\tau,j}$ вместе со своим обратным принадлежит классу $C^{\mu}(\overline{S}_{\tau,j})$. Считая для определенности сектор $S_{\tau,1}$ расположенным слева от Γ, приходим к заключению, что значения $X^+(\tau \pm 0)$ совпадают с $X_1(\tau)$ и, следовательно, соотношение (31) сводится к равенству $g(\tau + 0) = g(\tau - 0)$. Выполнение этого условия необходимо и достаточно для обращения в нуль логарифмического слагаемого в разложении (30).

В заключение остановимся на случае, когда Γ является кусочно-гладким контуром, т.е. каждая связная компонента этой кривой гомеоморфна окружности, и функция $G \in C^{\mu}(\Gamma)$. Пусть эти компоненты, которые обозначим $\Gamma_{(1)}, \dots, \Gamma_{(n)}$, ориентированы определенным образом (но или против часовой стрелки). Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha_\tau + i\beta_\tau = 0$ для всех $\tau \in F$, каноническая функция $X(z)$, построенная по теореме 2 для $\delta = 0$, в прилегающих областях $D^\pm$ вместе со своей обратной $1/X(z)$ принадлежит $C^{\mu}(\overline{D^\pm})$. Соответственно для $g \in C^{\mu}(\Gamma)$ теорема 3 описывает разрешимость задачи (1) а классе функций $\phi \in C^{\mu}(\widehat{D})$ с порядком не выше $k - 1$ на ∞.

Целое число æ в рассматриваемом случае совпадает с индексом Коши æ $= \mathrm{Ind}G$, которое определяется суммой приращений ветви $\ln G$ на простых контурах $\Gamma_{(j)}$ в соответствии с их ориентацией, т.е.

$$æ = \frac{1}{2\pi i} \sum\nolimits_{j=1}^{n} \ln G\big|_{\Gamma_{(j)}}\,. \tag{32}$$

Здесь ветвь логарифма предполагается непрерывной на $\Gamma_{(j)}$ вне фиксированной точки $\tau_{(j)}$.

Следуя [5,6], каноническую функцию можно строить по той же схеме, что и в теореме 3, но только исходя из компонент $\Gamma_{(j)}$. Если все слагаемые в правой части (32) равны нулю, то $\ln G \in C^{\mu}(\Gamma)$ и можно положить

$$X(z) = \exp[I(\ln G)](z)\,, z \in D\,.$$

В общем случае пусть æ$_j$ означает $j-$ое слагаемое в правой части (32). Каждый простой контур $\Gamma_{(j)}$ разбивает плоскость на конечную D^0_j и бесконечную D^1_j области.

Выберем точку $a_j \in D_j^0$ и положим

$$G_1(t) = \prod_{j=1}^{s} (t - a_j)^{\sigma_j æ_j}\,, \quad t \in \Gamma\,,$$

где $\sigma_j = 1$, если контур $\Gamma_{(j)}$ ориентирован против часовой стрелки, и $\sigma_j = -1$ в противном случае. Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i} \ln G_1\big|_{\Gamma_{(j)}} = æ_j\,, \quad 1 \le j \le n\,,$$

и, следовательно, функция $G_0 = G_1^{-1} G$ обладает свойством $\ln G_0 \in C^\mu(\Gamma)$. Легко видеть, что аналитическая вне Γ функция

$$X_1(z) = \prod_{j=1}^{n} Y_j(z), \quad Y_j(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_j^0, \\ (z - a_j)^{-æ_j}, & z \in D_j^1, \end{cases}$$

будет канонической для коэффициента $G_1(t)$. Соответственно каноническую функцию для коэффициента G можем определить равенством

$$X(z) = X_0(z) X_1(z), \quad X_0(z) = \exp[I(\ln G_0)](z)\,, \quad z \in D\,.$$

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968.
2. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.
3. Солдатов А.П. Обобщенный интеграл тина Коши / Дифференц. ур-ния. – 1991. – 27, №.2. – С.3-8.
4. Солдатов А.П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций / Изв. АН СССР (сер.матем.). – 1979. – 43, №.1. – С.184-202.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Физматгиз, 1963.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE LINEAR CONJUGATION PROBLEM AT ANGULAR POINTS OF THE CURVE

G.N. Averianov, A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. The classical problem of linear conjugation problem with piecewise smooth curve is under consideration for analytic functions in the frame of weight Hölder's spaces scale. It is obtained the explicit power-logarithmic asymptotic of solution of this problem at angle points of the conjugation curve at the supposition that the right-hand side of the problem has the analogous asymptotic.

Key words: linear conjugation problem, analytic functions, Hölder's spaces, piecewise-smooth curves..