MSC 11P21

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ ТИТЧМАРША С ПОЛУПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о числе решений уравнения $p_1p_2^a - xy = 1$, где p_1 и p_2 — простые, а x и y — натуральные числа, при условии, что числа $p_1p_2^a$ лежат в промежутках $[(2m)^c, (2m+1)^c)$, где $m \in \mathbb{N}, c \in (1,2]$, а простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют дополнительным условиям.

Ключевые слова: проблема делителей Титчмарша, бинарная аддитивная задача, полупростые числа, метод тригонометрических сумм, короткие (виноградовские) промежутки.

1. Введение. Задача о получении асимптотической формулы для числа решений уравнения $p - 1 = xy$, $p \leqslant n$, впервые поставленная в работе 1930 года [1], но имени автора этой статьи, получила название проблемы делителей Титчмарша. В [1] эта задача была решена в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана. Безусловное доказательство асимптотической формулы в задаче Титчмарша было получено Ю.В. Линником [2] с помощью разработанного им дисперсионного метода.

Заметим, что после появления в 1965 году теоремы Бомбьери-Виноградова (см. [3] и [4]) для решения многих аддитивных задач вместо дисперсионного метода стала применяться эта теорема. Например, в работе Д.В. Горяшина [5] с помощью теоремы Бомбьери-Виноградова были решены некоторые задачи, являющиеся аналогами проблемы Титчмарша.

С работы И.М. Виноградова 1940 года [6] началось решение аддитивных арифметических задач с простыми числами из «коротких» («виноградовских») промежутков. Такое название получили отрезки натурального ряда вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1,2]$. (В работе [6] $c = 2$.)

Задачи с простыми числами из промежутков вида (1) рассматривались, например, в работах С.А. Гриценко [7], [8], А. Балога и Дж. Фридлендера [9].

Отметим, что в работах [7]- [9] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи. Однако, бинарные аддитивные задачи с простыми числами из промежутков (1), к которым относится и проблема Титчмарша, в настоящее время не поддаются решению. Это связано с отсутствием аналогов классической теоремы Бомбьери-Виноградова, равных ей по силе, для простых чисел из промежутков вида (1).

Автором были решены некоторые бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами из «виноградовских» промежутков ([10]- [13]). В настоящей статье решается задача, которую можно считать вариантом проблемы делителей Титчмарша. Доказывается теорема о числе решений диофантова уравнения $p_1p_2^a - xy = 1$, которая была сформулирована в работе [11].

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 0 > 0$, $a \geqslant 2$ *– натуральные числа,* $Q = \exp(\sqrt{\ln n}\ )$, $A_1 = [1, nQ^{-1}]$, $A_2 = [1, Q^{1/a}]$ *и*

$$G(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2\,, \\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{x,y} 1\,,$$

$$G_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2\,, \\ p_1p_2^a - xy = 1\,, \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{1/c}\} < \frac{1}{2}}} \sum_{x,y} 1\,.$$

Тогда справедливо равенство:

$$G_1(n) = \frac{1}{2}G(n)(1 + O(Q^{-\eta}))\,, \qquad (2)$$

где

$$G(n) = c_0 \mathrm{Li}\left(\frac{n}{Q}\right)\pi\left(Q^{1/a}\right)\ln n\,\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\right),$$

$\eta > 0$ — *абсолютная постоянная,* $c_0 = \displaystyle\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Будем использовать следующие обозначения:

$c, c_1, c_2, \cdots$ — положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

a — произвольное натуральное число, $a \geqslant 2$; p, p_1, p_2 — простые числа;

$\binom{m}{n} = \frac{(m-n+1)\cdots m}{1\cdots n}$ — биномиальный коэффициент; $\mathrm{Li}\,x = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}$;

$\tau(n)$ — число различных натуральных делителей числа n;

$\varphi(n)$ — функция Эйлера (число натуральных чисел, непревосходящих n и взаимно простых с n);

$\mu(n)$ — функция Мебиуса, которая равна единице при $n = 1$, равна нулю, если $p^2|n$ и равна $(-1)^k$, если n равно произведению k различных простых сомножителей;

(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b; $[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b;

$\{x\}$ — дробная часть числа x;

запись $f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

В процессе доказательства мы будем использовать вспомогательные теоремы.

Лемма 1. [14, с. 50] *При* $N > 2$ *и целом положительном* l *для* $\tau(m)$

$$\sum_{0<m\leqslant N} (\tau(m))^l \ll N(\ln N)^{2l-1}\,.$$

Лемма 2. [15, с. 20] (теорема Бруна-Титчмарша) *Для натуральных чисел a и k, удовлетворяющих условиям $(a,k)=1$ и $k \leqslant x$ выполняется:*

$$\pi(x,a,k) = \sum_{p\leqslant x,\ p\equiv a \bmod k} 1 < \frac{(2+\eta)x}{\varphi(k)\ln(2x/k)},$$

где $\eta > 0$ и $x > x_0(\eta)$.

Лемма 3. [16, с. 476] (теорема Бомбьери-Виноградова) *Пусть* $\mathrm{Li}\,x = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}$ *и при* $a \leqslant k,\ (a,k)=1$

$$\pi(x,a,k) = \sum_{\substack{p\leqslant x,\\ p\equiv a \bmod k}} 1.$$

Тогда для всякого $A>0$ найдется такое B, что

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}(\ln x)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left|\pi(x,l,k) - \frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)}\right| = O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right).$$

Лемма 4. [3, с. 85] *Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — целые числа,*

$$J = J_{k,n}(P)) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n)}\right|^{2k} d\alpha_1\ldots d\alpha_n$$

— среднее значение модуля тригонометрической суммы и $J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_k-x_{k+1}-\cdots-x_{2k} &= \lambda_1\,, \\ x_1^n+\cdots+x_k^n-x_{k+1}^n-\cdots-x_{2k}^n &= \lambda_n\,, \end{cases}$$
$$1\leqslant x_1,\ldots,x_{2k}\leqslant P.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

a) $J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) =$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n)}\right|^{2k} e^{-2\pi i(\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_n\lambda_n)} d\alpha_1\ldots d\alpha_n\,;$$

b) $J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \leqslant J_{k,n}(0,\ldots,0) = J_{k,n}(P) = J\,;$

c) $\sum\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = P^{2k}\,;$

d) $|\lambda_1| < kP,\ \ldots,\ |\lambda_n| < kP^n\,;$

e) $J = J_{k,n}(P) > (2k)^{-n} P^{2k-\frac{n^2+n}{2}}$.

Лемма 5. ([3], с. 94) *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}\,,\ \ (a,q)=1\,,\ \ q \geqslant 1\,,\ \ |\theta| \leqslant 1\,.$$

Тогда при любом β, $U>0$, $P \geqslant 1$ *выполняется*

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha x+\beta\|}\right) \leq 6\left(\frac{P}{q}+1\right)(U+q\ln q)\,.$$

3. Доказательство теоремы. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Сначала получим асимптотическую формулу для $G(n)$.

Так как $Q=\exp(\sqrt{\ln n})$, то

$$A_1 = [1, nQ^{-1}]\,,\quad A_2 = [1, Q^{1/a}]\,.$$

Преобразуем

$$G(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}} 1\,.$$

Ограничим промежуток изменения переменной x положив

$$G(n) = 2G'(n) - G''(n)\,, \tag{3}$$

где

$$G'(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{x\leqslant\sqrt{n}} 1$$

и

$$G''(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1\,.$$

Сначала оценим сумму $G''(n)$, представив ее в виде суммы двух слагаемых:

$$G''(n) = G''_1(n) + G''_2(n)\,, \tag{4}$$

где

$$G''_1(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1$$

и

$$G''_2(n) = \sum_{p_1\in A_1} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{\substack{\sqrt{n}Q^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}\,,\\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1\,.$$

Заметим, что

$$G_1''(n) \le \sum_{m\leqslant nQ^{-1}+1} \tau(m-1)t_1(m)\,,$$

где

$$t_1(m) = \sum_{\substack{p_1p_2^a=m\,,\\ p_1\in A_1\,,\\ p_2\in A_2}} 1\,.$$

Очевидно, что $t_1(m)=1$, если $m=p^{a+1}$ или $m=p_1p_2^a$ и $t_1(m)=0$ во всех других случаях. Следовательно,

$$G_1''(n) \le \sum_{m\le nQ^{-1}+1} \tau(m-1)\,.$$

Применяя лемму 1, получим:

$$G_1''(n) \ll nQ^{-1}\ln n\,.$$

Оценим $G_2''(n)$. Так как в случае, когда $p_2\mid x$, уравнение $p_1p_2^a - xy = 1$ не имеет решений, то

$$G_2''(n) = \sum_{\sqrt{n}Q^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ (p_2,x)=1}} \sum_{\substack{p_1\in A_1\,,\\ p_1\equiv p_2^*\bmod x}} 1 =$$

$$= \sum_{\sqrt{n}PQ^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}} \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ (p_2,x)=1}} \pi(nQ^{-1},p_2^*,x)\,,$$

где p_2^* — решение сравнения $p_2^a t\equiv 1 \bmod x$.

Применяя теорему Бруна-Титчмарша, получаем:

$$G_2''(n) < \sum_{\sqrt{n}Q^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{p_2\in A_2} \frac{(2+\eta)nQ^{-1}}{\ln\frac{2n}{Qx}} \ll$$

$$\ll \frac{n}{Q\ln n} \sum_{p_2\in A_2} \sum_{\sqrt{n}Q^{-1}<x\le\sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)}\,.$$

Для оценки внутренней суммы используем формулу, доказательство которой можно найти в [18, с. 71]:

$$\sum_{1\le n\le X}\frac{1}{n} = \ln X + \gamma + O\left(\frac{1}{X}\right)\,,$$

где γ — постоянная Эйлера. С помощью этой оценки и формулы для вычисления значений функции Эйлера $\varphi(x)$ получаем:

$$\sum_{m\leqslant X}\frac{1}{\varphi(m)} = c_0\ln X + O(1)\,,\quad c_0=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}\,. \tag{5}$$

Используя (5), получаем

$$G_2''(n) \ll \frac{n}{Q}\,\pi(Q^{1/a})\frac{\ln Q}{\ln n}\,.$$

Подставляя оценки для $G_1''(n)$ и $G_2''(n)$ в (4), получим:

$$G''(n) \ll \frac{n}{Q}\,\pi(Q^{1/a})\frac{\ln Q}{\ln n}\,.$$

Теперь оценим сумму $G'(n)$, представив ее в виде суммы двух слагаемых:

$$G'(n) = G_1'(n) + G_2'(n)\,, \tag{6}$$

где

$$G_1'(n) = \sum_{p_1\in A_1}\ \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}}\ \sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} 1\,,$$

$$G_2'(n) = \sum_{p_1\in A_1}\ \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ p_1p_2^a - xy=1}}\ \sum_{\sqrt{n}Q^{-1}<x\leqslant\sqrt{n}} 1\,.$$

Заметим, что сумма $G_2'(n)$ оценивается так же, как и $G_2''(n)$. Поэтому

$$G_2'(n) \ll \frac{n}{Q}\,\pi(Q^{1/a})\frac{\ln Q}{\ln n}\,. \tag{7}$$

Рассмотрим сумму $G_1'(n)$ и получим для нее асимптотическую формулу. Имеем:

$$G_1'(n) = \sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\ \sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\ (p_2,\ x)=1}} \pi(nQ^{-1}, p_2^*, x) =$$

$$= \mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_{p_2\in A_2}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}\,,\\ (p_2,\ x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\Big(\sum_{p_2\in A_2}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}\,,\\ (x,\ p_2)=1}} \Big|\pi\left(\frac{n}{Q}, p_2^*, x\right) - \frac{\mathrm{Li}(\frac{n}{Q})}{\varphi(x)}\Big|\Big)\,,$$

где p_2^* — решение сравнения $p_2^a t \equiv 1 \pmod{x}$.

Отсюда, в силу теоремы Бомбьери-Виноградова, получим

$$G_1'(n) = \mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_{p_2\in A_2}\ \sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}\,,\\ (p_2,\ x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\Big(\frac{n}{Q}\,\pi\,(Q^{1/a})(\ln\,n)^{-1}\Big)\,.$$

Рассмотрим внутреннюю сумму

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}\,,\\ (p_2,\ x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)}\,.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\(p_2,\ x)=1}}\frac{1}{\varphi(x)}=\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\frac{1}{\varphi(x)}-\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}p_2^{-1}}\frac{1}{\varphi(x_1p_2)}\,.$$

Так как $\varphi(ab)\geqslant\varphi(a)\varphi(b)$, то, применяя оценку (5), получим:

$$\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}p_2^{-1}}\frac{1}{\varphi(x_1p_2)}\leqslant\frac{1}{p_2-1}\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\frac{1}{\varphi(x_1)}=O\Big(\frac{\ln n}{p_2}\Big).$$

Из (5) следует, что

$$\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\frac{1}{\varphi(x)}=c_0\ln(\sqrt{n}Q^{-1})+O(1)\,,$$

где

$$c_0=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}\,.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\(p_2,\ x)=1}}\frac{1}{\varphi(x)}=c_0\ln(\sqrt{n}Q^{-1})+O\Big(\frac{\ln n}{p_2}\Big).$$

Просуммируем обе части полученного равенства по $p_2\in A_2$. Получим:

$$\sum_{p_2\in A_2}\sum_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1},\\(p_2,\ x)=1}}\frac{1}{\varphi(x)}=c_0\ln(\sqrt{n}Q^{-1})\pi(Q^{1/a})+O(\ln n\,\ln\ln Q)\,.$$

Поэтому

$$G_1'(n)=c_0\mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\,\pi(Q^{1/a})\,\ln(\sqrt{n}Q^{-1})\,\Big(1+O\Big(\frac{\ln Q}{\ln n}\Big)\Big)\,.$$

Подставляя оценки для $G_1'(n)$ и $G_2''(n)$ в (6), получим:

$$G'(n)=\frac{c_0}{2}\,\mathrm{Li}\Big(\frac{n}{Q}\Big)\,\pi(Q^{1/a})\ln n\,\Big(1+O\Big(\frac{\ln Q}{\ln n}\Big)\Big)\,. \tag{8}$$

2. Рассмотрим сумму

$$G_1(n)=\sum_{p_1\in A_1}\sum_{\substack{p_2\in A_2\,,\\p_1p_2^a-xy=1\,,\\\{\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{1/c}\}<\frac{1}{2}}}\sum_{x,y}1\,.$$

Считаем далее, что $n\geqslant n_0>0$, где n_0 — достаточно большое число.
Введем функцию

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\le x<1/2\,,\\0, & \text{если } 1/2\le x<1\end{cases}$$

и продолжим ее периодически на всю числовую прямую.

Воспользуемся леммой о «стаканчиках» И.М. Виноградова ([19], с. 23) и выберем параметры r, $\triangle$, α, β двумя способами.

Сначала определим эти параметры так:

$$r = [\ln n], \Delta = \frac{1}{\ln^2 n}\,, \quad \alpha = \Delta\,, \quad \beta = \frac{1}{2} - \Delta\,.$$

Обозначим через $\chi_1(x)$ функцию, существование которой следует из леммы о «стаканчиках». Затем, при тех же r и Δ, положим $\alpha = -\Delta$, $\beta = \frac{1}{2} + \Delta$, а соответствующую функцию обозначим как $\chi_2(x)$.

Тогда из леммы о «стаканчиках» следует, что $\chi_1(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \chi_2(x)$, и, следовательно

$$G_{11}(n) \leqslant G_1(n) \leqslant G_{12}(n)\,, \tag{9}$$

где

$$G_{1i}(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\substack{x \leqslant \sqrt{n}\,, \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \chi_i\Big(\frac{1}{2}\,(p_1 p_2^a)^{1/c}\Big)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Заметим, что если будут получены асимптотические формулы для $G_{11}(n)$ и $G_{12}(n)$ с совпадающими главными и остаточными членами, то из неравенства (9) следует, что такая же формула будет верна и для $G_1(n)$.

3. Займемся подготовкой к выводу асимптотической формулы для $G_{11}(n)$.

Раскладывая функцию $\chi_1\Big(\frac{1}{2}(p_1 p_2^a)^{1/c}\Big)$ в ряд Фурье, получим

$$G_{11}(n) = (1/2 - 2\Delta)G(n) + R_1(n) + R_2(n)\,, \tag{10}$$

где

$$R_1(n) = \sum_{0 < |m| \leqslant \Delta^{-1} \ln n} |g_m||V_m(n)|\,,$$

$$R_2(n) = \sum_{|m| > \Delta^{-1} \ln n} |g_m||V_m(n)|\,,$$

$$V_m(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2\,, \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} t_2(p_1 p_2^a - 1) e^{\pi i m (p_1 p_2^a)^{1/c}}\,,$$

$$t_2(k) = \sum_{\substack{xy = k\,, \\ x \leqslant \sqrt{n} Q^{-1}}} 1\,,$$

g_m — коэффициент Фурье с номером m для функции χ_1.

Оценим $R_2(n)$. Из леммы о «стаканчиках» следует, что

$$|g_m| \leqslant \frac{1}{\pi |m|} \Big(\frac{r}{\pi \Delta |m|}\Big)^r.$$

Кроме того,

$$|V_m(n)| \leqslant G_1(n) \leqslant n\,.$$

Поэтому

$$R_2(n) = O\Big(n \sum_{|m|>\Delta^{-1}\ln n} \Big(\frac{r}{\Delta}\Big)^r m^{-r-1}\Big) = O(1)\,. \tag{11}$$

Оценим $R_1(n)$. Имеем

$$|R_1(n)| \leqslant \sum_{0<|m|<\Delta^{-1}\ln n} \frac{1}{\pi|m|}|V_m(n)|$$

и

$$|V_m(n)| \leqslant \sum_{n_1\leqslant n/Q} \Big|\sum_{p_2\in A_2} t_2(n_1p_2^a-1)e^{\pi i m(n_1p_2^a)^{1/c}}\Big|\,,$$

где n_1 пробегает множество натуральных чисел.

Применяя неравенство Коши [3, с. 87], получим

$$|V_m(n)|^2 \leqslant n/Q \sum_{n_1\leqslant n/Q} \Big|\sum_{p_2\in A_2} t_2(n_1p_2^a-1)e^{\pi i m(n_1p_2^a)^{1/c}}\Big|^2 =$$

$$= \frac{n}{Q}\sum_{p_2\in A_2}\sum_{p_2'\in A_2}\sum_{n_1\leqslant n/Q} t_2(n_1p_2^a-1)t_2(n_1(p_2')^a-1)e^{\pi i m(p_2^{a/c}-(p_2')^{a/c})n_1^{1/c}} =$$

$$= \frac{n}{Q}(V_0(n)+V_1(n))\,, \tag{12}$$

где сумма $V_0(n)$ соответствует слагаемым, в которых $p_2 = p_2'$, а в сумме $V_1(n)$ $p_2 \neq p_2'$.

Оценим $V_0(n)$. Заметим, что из мультипликативности функции $\tau(n)$ и формулы для вычисления ее значений следует, что $\tau(ab) \leqslant \tau(a)\tau(b)$. Кроме того воспользуемся леммой 1. В результате, получим

$$V_0(n) \leqslant \sum_{p_2\in A_2}\sum_{n_1\leq n/Q} \tau^2(n_1p_2^a-1) \leqslant$$

$$\leqslant (a+1)^2Q^{1/a}\sum_{n_1\leqslant nQ^{-1}} \tau^2(n_1) \ll nQ^{1/a-1}\ln^3 n\,. \tag{13}$$

Перейдем к оценке $V_1(n)$. Заметим, что

$$V_1(n) \leq \sum_{p_2\in A_2}\sum_{\substack{p_2'\in A_2,\\ p_2\neq p_2'}}\sum_{n_1\leqslant nQ^{-1}} t_2(n_1(p_2)^a-1)t_2(n_1(p_2')^a-1)e^{2\pi i(m/2)(p_2^{a/c}-(p_2')^{a/c})n_1^{1/c}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p_2\in A_2}\sum_{p_2'\in A_2} f(n)\,, \tag{14}$$

где

$$f(n) = \sum_{x_1 \leqslant \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{x_2 \leqslant \sqrt{n}Q^{-1}} s(m) \tag{15}$$

и

$$s(m) = \sum_{\substack{n_1 \leqslant nQ^{-1}, \\ n_1 p_2^a \equiv 1 \bmod x_1, \\ n_1 (p_2')^a \equiv 1 \bmod x_2}} e^{2\pi i (m/2)(p_2^{a/c} - (p_2')^{a/c}) n_1^{1/c}}.$$

Будем считать, без ограничения общности, что $(p_2, x_1) = 1$ и $(p_2', x_2) = 1$, так как в противном случае сумма будет пустой, то есть равной нулю.

Пусть $p_2 q_2 \equiv 1 \bmod x_1$ и $p_2' q_2' \equiv 1 \bmod x_2$. Решим систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv q_2^a \bmod x_1, \\ x \equiv (q_2')^a \bmod x_2. \end{cases}$$

Она разрешима тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2) | (q_2^a - (q_2')^a)$ и, в случае разрешимости, ее решение имеет вид:

$$x = z_2 + mD,$$

где $D = [x_1, x_2]$ (см. [3, с. 65, 145]).

Таким образом,

$$s(m) = \sum_{\xi + l \leqslant \frac{n}{DQ}} e^{2\pi i \varkappa (\xi + l)^{\frac{1}{c}}}, \tag{16}$$

где

$$\varkappa = \frac{m}{2} (p_2^{a/c} - (p_2')^{a/c}), \qquad \xi = \frac{z_2}{D}.$$

Очевидно, что $0 < \xi < 1$.

Чтобы вывести асимптотическую формулу для G_{11}, требуется оценить $s(m)$.

4. Займемся оценкой тригонометрической суммы $s(m)$ из (16).

Представим эту сумму в следующем виде:

$$s(m) = s_1(m) + s_2(m),$$

где

$$s_1(m) = \sum_{\frac{n}{DQ^{1,5}} < \xi + l \leqslant \frac{n}{DQ}} e^{2\pi i \varkappa (\xi + l)^{1/c}}, \qquad s_2(m) = \sum_{\xi + l \leqslant \frac{n}{DQ^{1,5}}} e^{2\pi i \varkappa (\xi + l)^{1/c}}.$$

Очевидно, что

$$| s_2(m) | \leqslant \sum_{\xi + l \leq \frac{n}{DQ^{1,5}}} 1 \leq \frac{n}{DQ^{1,5}}.$$

Поэтому

$$s(m) = s_1(m) + O\Big(\frac{n}{DQ^{1,5}}\Big). \tag{17}$$

Разобьем сумму $s_1(m)$ на $O(\ln n)$ сумм вида:

$$\bar{s_1}(M) = \sum_{M<\xi+l\leqslant M_1} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{1/c}},$$

где

$$\frac{n}{DQ^{1,5}} \leq M < M_1 \leqslant 2M\,, \qquad M_1 \leqslant \frac{n}{DQ}\,.$$

Заметим, что, так как $x_1 \leqslant \sqrt{n}Q^{-1}$ и $x_2 \leqslant \sqrt{n}Q^{-1}$, то

$$D = [x_1, x_2] \leqslant x_1x_2 \leqslant nQ^{-2}\,,$$

поэтому

$$M \geqslant \frac{n}{DQ^{1,5}} \geqslant Q^{0,5}$$

и, следовательно, сумма $\bar{s_1}(M)$ содержит «сравнительно много» слагаемых.

Будем оценивать $\bar{s_1}(M)$, считая, что

$$\frac{n}{DQ^{1,5}} \leqslant M \leqslant \frac{n}{DQ}\,.$$

Сначала рассмотрим случай, когда

$$1 \leqslant D \leqslant n^{0,99} \Leftrightarrow M \geq \frac{n^{0,01}}{Q^{1,5}}\,.$$

Если

$$\frac{|\varkappa|M^{1/c}}{M} \leqslant \frac{1}{10}\,,$$

то, применяя лемму о приближении суммы интегралом [3, с. 19], получим

$$\bar{s_1}(M) = \int_M^{M_1} e^{2\pi i\varkappa(\xi+l)^{1/c}}dl = O(1) = O(M^{1-1/c})\,.$$

В дальнейшем считаем, что $|\varkappa|M^{1/c}/M > 1/10$ и применим для оценки суммы $\bar{s_1}(M)$ метод ван дер Корнута [20, с. 85-94].

Определим натуральное число k из условия:

$$\frac{1}{M^2} < \frac{|\varkappa|M^{1/c}}{M^k} \leq \frac{1}{M}\,.$$

Если $k=2$, то

$$\frac{|\varkappa|M^{\frac{1}{c}}}{M^2} \asymp \frac{1}{M}\,.$$

Оценивая $\bar{s_1}(M)$ по второй производной, получаем, что при $k=2$

$$\bar{s_1}(M) = O(\sqrt{M})\,.$$

Рассмотрим случай $k \geqslant 3$ и оцепим $\bar{s_1}(M)$ по производной порядка k [3, с. 66-70]. Имеем

$$\bar{s_1}(M) \ll M^{1-\delta}\,,$$

где $\delta = \delta(k) > 0$. Случай $D \leq n^{0,99}$ полностью рассмотрен.

Пусть теперь

$$D > n^{0,99}\,, \qquad \frac{|\varkappa| M^{1/c}}{M} > \frac{1}{10}\,.$$

Оценку $\bar{s_1}(M)$ будем вести но схеме оценки дзетовой суммы, принадлежащей И.М. Виноградову [3, с. 66-70]. Пусть $a = [M^{5/11}]$. Тогда

$$|\bar{s_1}(M)| \leq \frac{1}{a^2} \sum_{M<m\leqslant M_1} |W(m)| + 2a^2\,,$$

где

$$W(m) = \sum_{u=1}^{a} \sum_{v=1}^{a} e^{2\pi i \varkappa(\xi+m+uv)^{1/c}}.$$

Применим формулу Тейлора:

$$(\xi + m + uv)^{1/c} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{1/c}{j} (\xi+m)^{1/c-j} (uv)^j + \theta_2 \binom{1/c}{r+1} (\xi+m)^{1/c-r-1} a^{2(r+1)}\,, \qquad |\theta_2| \leqslant 1\,.$$

Таким образом,

$$e^{2\pi i \varkappa(\xi+m+uv)^{1/c}} = e^{2\pi i F(uv)} + 2\pi\theta_3 |\varkappa| (\xi+m)^{1/c} \left(\frac{a^2}{\xi+m}\right)^{r+1}\,, \qquad |\theta_3| \leqslant 1\,,$$

где

$$F(uv) = \sum_{j=0}^{r} \binom{1/c}{j} (\xi+m)^{1/c-j} (uv)^j\,.$$

Введем обозначения:

$$x_j = \binom{1/c}{j}\,, \qquad T = |\varkappa|(\xi+m)^{1/c}\,, \qquad \alpha_j = \frac{\operatorname{sgn}(\varkappa)\, T}{x_j(\xi+m_j)}\,.$$

Тогда

$$W(m) = W_1 + 2\pi\theta_4 T \left(\frac{a^2}{M}\right)^r a^2 M^{-1/11}\,, \qquad |\theta_4| \leqslant 1\,,$$

$$W_1 = \sum_{u=1}^{a} \sum_{v=1}^{a} e^{2\pi i F(uv)} =$$

$$= \sum_{u=1}^{a} \sum_{v=1}^{a} e^{2\pi i(\alpha_1 uv + \alpha_2 u^2 v^2 + \dots + \alpha_r u^r v^r)}\,.$$

Выберем натуральное число r из условия

$$r-1<\frac{11\ln T}{\ln M}\leqslant r$$

и заметим, что, так как $D>0,99$, то $|\varkappa|\leqslant n^{0,99/c}$. Поэтому из неравенства $MD\leqslant nQ^{-1}$ заключаем, что $M<n^{0,01}$. Следовательно,

$$\frac{\ln T}{\ln M}>\frac{\ln\frac{1}{2}n^{0,99/c}}{\ln n^{0,01}}>\frac{99}{c}-1\geqslant\frac{97}{2}$$

и указанный выбор r возможен.

Следуя схеме Виноградова, получим:

$$|W_1|^{4k^2}\leqslant a^{8k^2-4k}J_{k,r}^2(0,...,0)\prod_{j=1}^{r}\sigma_j\,,$$

где $J_{k,r}(0,...,0)$ определяется в условии леммы 4 и

$$\sigma_j=\sum_{|\mu_j|<A_j}\min\left(2A_j,\frac{1}{||a_j\mu_j||}\right),$$

$$A_j=ka^j\,.$$

При

$$\frac{4\ln T}{\ln M}\leqslant j\leqslant\frac{8\ln T}{\ln M}$$

оценим σ_j по лемме 5, а при остальных j, тривиально, — величиной $(2A_j)^2$.

Итак, пусть

$$\frac{4\ln T}{\ln M}\leqslant j\leqslant\frac{8\ln T}{\ln M}\,.$$

В силу леммы 5, имеем

$$\sigma_j\leqslant 6\Big(\frac{2A_j}{q_j}+1\Big)\,(2A_j+q_j\ln q_j)\leqslant$$

$$\leqslant 6(2A_j)^2\Big(\frac{1}{q_j}+\frac{1}{A_j}+\frac{q_j}{4(A_j)^2}\Big)\,,$$

где

$$q_j=[\frac{x_j(\xi+m)^j}{T}]\,.$$

Оценим сверху сумму

$$\Big(\frac{1}{q_j}+\frac{1}{A_j}+\frac{q_j}{4(A_j)^2}\Big)\,.$$

Из определений A_j, q_j и выбора j следует, что

$$A_j \geqslant a^j \geqslant \left(\frac{1}{2}M^{5/11}\right)^j \geqslant \frac{1}{2^r}M^{\frac{5}{11}\frac{4\ln T}{\ln M}} = \frac{1}{2^r}T^{20/11};$$

$$q_j \leqslant \frac{M^j}{T} \leqslant \frac{M^{4\ln T/\ln M}}{T} = T^3;$$

$$\frac{q_j}{A_j^2} \leqslant \frac{x_j 4^r M^j}{a_j^2 T} \leqslant \frac{x_j 8^r M^{j/11}}{T} \leqslant x_j 8^r T^{-3/11}.$$

Оценим сверху x_j:

$$x_j = \left|\binom{1/c}{j}\right|^{-1} = \frac{c^2}{c-1}\cdot\frac{j!}{(2-1/c)(3-1/c)}\cdots(j-1/c-1) \leqslant \frac{c^2}{c-1}j^2 \leqslant \frac{c^2}{c-1}r^2.$$

Итак, при

$$\frac{4\ln T}{\ln M} \leqslant j \leqslant \frac{8\ln T}{\ln M}$$

$$\left(\frac{1}{q_j}+\frac{1}{A_j}+\frac{q_j}{4A_j^2}\right) \leqslant \left(\frac{1}{T^3}+2^r T^{-20/11}+\frac{1}{(c-1)}16^r T^{-3/11}\right) \leqslant \frac{48^r}{c-1}T^{-3/11}.$$

Оцепим $\ln q_j$ при этих же значениях j:

$$\ln q_j = \ln\frac{x_j(\xi+m)^j}{T} \leqslant \ln\left(\frac{c^2}{c-1}4^r\cdot 2^r\cdot\frac{M^j}{T}\right) \leqslant \ln\left(\frac{16^r}{c-1}T^7\right) \leqslant 7\frac{16^r}{c-1}\ln n.$$

В итоге получаем, что при

$$\frac{4\ln T}{\ln M} \leqslant j \leqslant \frac{8\ln T}{\ln M}$$

$$\sigma_j \leqslant \frac{42}{(c-1)^2}(1000)^r T^{-3/11}\ln n(2A_j)^2.$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{r}\sigma_j \leqslant \frac{(42)^r(1000)^{r^2}}{(c-1)^{2r}}(\ln n)^r T^{-\frac{12}{11}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}}\prod_{j=1}^{r}(2A_j)^2.$$

Окончательно получаем

$$\prod_{j=1}^{r}\sigma_j \leqslant \frac{(168k^2)^r}{(c-1)^{2r}}(\ln\, n)^r T^{-\frac{12}{11}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}}a^{r^2+r}.$$

Выберем натуральное число τ из условия $e^{\tau-1} < 10000^r \leqslant e^\tau$ и применим теорему о среднем И.М. Виноградова ([3], с. 89), положив в ней $k = r\tau$:

$$J_{k,r}(0,\ldots,0) \leqslant (r\tau)^{6r\tau}(2r)^{4r\tau(r+1)}a^{2k-r(r+1)/2}\left(1-\left(1-\frac{1}{r}\right)\right)^\tau .$$

Заметим, что

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)^\tau < e^{-\tau/r} < \frac{1}{10000} ,$$

так как $\tau/r \geqslant \ln 10000$. Поэтому

$$a^{(r^2+r)/2}\left(1-\frac{1}{r}\right)^\tau < a^{r^2/10000} .$$

Кроме того,

$$r < 1 + \frac{11\ln T}{\ln M} < \frac{22\ln T}{\ln M} .$$

Значит,

$$a^{r^2/10000} < M^{5/11\cdot\frac{484}{10000}\cdot\frac{\ln^2 T}{\ln^2 M}} < T^{\ln T/40\ln M} .$$

Отсюда получаем:

$$|W_1|^{4k^2} \leqslant k^{12k}(2r)^{8k(r+1)}\frac{(168k^2)^r}{(c-1)^{2r}}(\ln n)^r 10000^{r^2}T^{-\ln T/\ln M}a^{8k^2}$$

и, следовательно,

$$|W_1| \leqslant k^{3/k}T^{-\ln T/4k^2\ln M}a^2 \leqslant c_1 a^2(\ln n)^{r/4k^2}T^{-\ln T/4k} .$$

Заметим, что

$$4k^2 \geqslant 4(r^2\ln 10000)^2 \geqslant 484\left(\left(\frac{\ln T}{\ln M}\right)^2\ln\,10000\right)^2 \geqslant c_2\left(\frac{\ln T}{\ln M}\right)^4 ,$$

поэтому

$$|W_1| \leqslant c_1 a^2 e^{-\gamma\frac{\ln^3 M}{\ln^2 T}}(\ln n)^{r/4k^2} , \qquad (\gamma > 0) .$$

Далее, учитывая, что $M > Q(\ln n)^{-c}$, имеем

$$M > e^{\sqrt{\ln n}/2} , \qquad \ln^3 M > \frac{1}{8}\sqrt{\ln^3 n} .$$

Поэтому окончательно получаем, что

$$|W_1| \leqslant c_2 a^2 e^{-\gamma_1\sqrt{\ln n}} , \quad c_2 > 0 , \quad \gamma_1 > 0 .$$

Следовательно,

$$\bar{s}_1(M) \ll \frac{n}{QD}e^{-\gamma\sqrt{\ln n}}$$

и

$$s_1(m) \ll \frac{n \ln n}{QD} e^{-\gamma\sqrt{\ln n}}.$$

Используя полученные оценки, из (17) имеем:

$$s(m) \ll nQ^{-1}e^{-\gamma\sqrt{\ln n}}D^{-1}\ln n + nQ^{-1,5}D^{-1} \ll$$

$$\ll nQ^{-1}e^{-\gamma\sqrt{\ln n}/2}D^{-1}, \tag{18}$$

где $D = [x_, x_2]$.

5. Продолжим вывод асимптотической формулы для $G_{11}(n)$. Из формул (10) и (11) (см. п. 3) следует, что

$$G_{11}(n) = \Big(\frac{1}{2} - 2\Delta\Big)G_1(n) + O\left(\sum_{0<|m|<\Delta^{-1}\ln n} \frac{1}{\pi|m|} \mid V_m(n) \mid\right),$$

где $\Delta = (\ln^2 n)^{-1}$.

Из (12) и (13) получаем

$$\mid V_m(n) \mid^2 \leqslant \frac{n}{Q}V_1(n) + O\Big(n^2Q^{1/a-2}\ln^3 n\Big).$$

Поэтому, для получения асимптотической формулы нужна оценка $V_1(n)$.

Из (14) имеем

$$V_1(n) \ll \sum_{p_2\in A_2}\sum_{p_2'\in A_2} f(n),$$

где

$$f(n) = \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} s(m).$$

Подставив в эту формулу оценку (18), получим:

$$f(n) \ll nQ^{-1}e^{-\frac{\gamma}{2}\sqrt{\ln n}}\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} D^{-1}.$$

Оценим сумму в этом неравенстве:

$$\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} D^{-1} = \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} \frac{(x_1,x_2)}{x_1x_2} =$$

$$= \sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}}\sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}} \frac{1}{x_1x_2}\sum_{d|(x_1,x_2)}\varphi(d) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{d\leqslant\sqrt{n}P^{-1}} \frac{\varphi(d)}{d^2}\Big(\sum_{x\leqslant\sqrt{n}Q^{-1}d^{-1}} x^{-1}\Big)^2 \ll \ln^3 n.$$

Поэтому
$$f(n) \ll nQ^{-2}\ln^3 n\,.$$

Отсюда и из (14) следует, что
$$|V_1(n)| \ll n^2 Q^{1/a-3}\ln^3 n\,. \tag{19}$$

Используя оценки (13) и (19), из (12) получим:
$$|V_m(n)|^2 \ll n^2 Q^{-2+\frac{2}{a}} e^{-\frac{\gamma}{4}\sqrt{\ln n}} + n^2 Q^{-2+\frac{1}{a}}\ln^3 n \ll$$
$$\ll (nQ^{-1})^2 Q^{-2+\frac{2}{a}} e^{-\frac{\gamma}{4}\sqrt{\ln n}},$$
то есть
$$|V_m(n)| \ll nQ^{-1+\frac{1}{a}} e^{-\frac{\gamma}{8}\sqrt{\ln n}}\,.$$
Поэтому
$$|R_1(n)| \ll nQ^{-1+\frac{1}{a}} e^{-\frac{\gamma}{8}\sqrt{\ln n}}\ln^2 n\,. \tag{20}$$

Из (11), (20) и (10) следует, что для $G_{11}(n)$ получена асимптотическая формула:
$$G_{11}(n) = \frac{1}{2}G(n)(1 + O(Q^{-\eta})\,, \qquad \eta > 0\,.$$

Для $G_{12}(n)$ аналогичными рассуждениями выводится асимптотическая формула с такими же главным членом и остатком. Поэтому, из (9) следует, что для $G_1(n)$ верна асимптотическая формула:
$$G_1(n) = \frac{1}{2}G(n)(1 + O(Q^{-\eta})\,, \qquad \eta > 0\,,$$
то есть теорема доказана. ■

4. Заключение. Рассмотренная в статье аддитивная бинарная задача является аналогом проблемы Тичмарша. Подобная задача была решена в работе [10] для уравнения $p_1p_2 - 1 = xy$ при $a \geq 2$. Особенность задачи, решение которой представлено в данной работе, заключается в том, что, при $a \geq 2$ последовательность $p_1p_2^a$ является более редкой, чем последовательность p_1p_2 (при больших a она «близка» к последовательности простых чисел).

Литература

1. Titchmarsh E.C. A divisor problem // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1930. – 54. – P.414-429.
2. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 208 с.
3. Виноградов А.И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле // Известия АН СССР, серия Математическая. – 1965. – 29; 4. – С.903-934.
4. Bombieri E. On the large sieve // Mathematica. – 1965. – 12. – P.201-225.
5. Горяшин Д.В. Аналоги проблемы делителей Титчмарша // Чебышевский сборник. – 2007. – 8;2. – С.44–55.

6. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Математический сборник. – 1940. – 7. – С.365-372.
7. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // Успехи математических наук. – 1988. – 43; 4 (262). – С.203-204.
8. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Известия РАН, серия Математическая. – 1992. – 56;6. – С.1198-1216.
9. Balog A., Friedlander K.J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific Journal of Mathematics. – 1992. – 156. – P.45-62.
10. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. – 2005. – 4;2(14). – С.145-162.
11. Зинченко Н.А. Две бинарные аддитивные задачи // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – 3. – С.352-354.
12. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2007. – 1;7. – С.9-13.
13. Зинченко Н.А. Асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения с полупростыми числами из коротких промежутков //Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2014. – 7(183);35. – С.49-60.
14. Виноградов И.М. Основы теории чисел / СПб-М: Лань, 2004. – 240 с.
15. Хооли К. Применение методов решета в теории чисел/ М.: Наука, 1987. – 136 с.
16. Прахар К. Распределение простых чисел / М.: Мир, 1967. – 511 с.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
18. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Мир, 1974. – 187 с.
19. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1971. – 162 с.
20. Чанга М.Е. Методы аналитической теории чисел / Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. – 228 с.

ABOUT A VARIANT OF TITCHMARSH'S DIVISOR PROBLEM WITH SEMISIMPLE NUMBERS OF A SPECIAL TYPE

N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobeda St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of solution number of the equation $p_1p_2^a - xy = 1$ where p_1 и p_2 are primes and x and y are natural, $a \geqslant 2$ is under consideration. The problem is solved at the condition that numbers $p_1p_2^a$ are displayed in $[(2m)^c, (2m+1)^c)$ where $m \in \mathbb{N}, c \in (1, 2]$ and primes p_1, p_2 satisfy some additional conditions.

Keywords: Titchmarsh's divisor problem, binary additive problem, semisimple number, method of trigonometric sums, short Vinogradov intervals.