MSC 11P32

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРОБЛЕМЫ ХУА ЛО-КЕНА

*С.А. Гриценко, **Н.Н. Мотькина

*Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, Россия, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе решается вариант задачи Хуа Ло-кена с простыми числами p, такими, что $a < \{\eta p^2\} < b$, где a и b — произвольные числа из интервала $[0,1]$, η — квадратичная иррациональность.

Ключевые слова: аддитивные задачи, простые числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

1. Введение. В 1938 г. Хуа Ло-Кен доказал [1], что достаточно большое натуральное N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N\,. \tag{1}$$

Задача Хуа Ло-Кена состоит в оценке числа $I_{5,2}(N)$ таких представлений. Хуа показал [2], что

$$I_{5,2}(N) = \frac{4\pi^2 N^{3/2}}{3\log^5 N}\sigma(N) + O\Big(\frac{N^{3/2}\log\log N}{\log^6 N}\Big)\,,$$

где

$$\sigma(N) = 24\prod_{\substack{p|N\\ p>3}}\Big(1 - \frac{5p^2 + 10(\frac{-1}{p})p + 1}{(p-1)^4}\Big)\times$$

$$\times\prod_{\substack{p\nmid N\\ p>3}}\Big(1 + \frac{5p^2 + 10(\frac{-1}{p})p + 1}{(p-1)^5} + p\Big(\frac{N}{p}\Big)\frac{p^2 + 10(\frac{-1}{p})p + 5}{(p-1)^5}\Big) > \frac{1}{4}$$

при $N \equiv 5 \pmod{24}$ и $\sigma(N) = 0$ в противном случае.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу Хуа Ло-Кена с простыми числами специального вида. Пусть η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные фиксированные действительные числа, $0 \le a < b \le 1$. Пусть $J_{5,2}(N)$ — число решений уравнения (1) с простыми числами p_i, $a < \{\eta p_i^2\} < b$, $i = 1,2,3,4,5$. Полученный нами результат представлен в следующей теореме.

Теорема. *Для достаточно большого натурального* N, $N \equiv 5 \mathrm{mod} 24$, *справедлива формула*

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N)s(N,a,b) + O(N^{3/2-0{,}00002})\,,$$

где

$$s(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N-2,5(a+b))}\frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}\,.$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([2], с. 22). *Пусть r — натуральное число, α и β — вещественные числа, $0<\Delta<1/4$, $\Delta\le\beta-\alpha\le 1-\Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$\psi(x)=1$ в промежутке $\alpha+\Delta/2\le x\le\beta-\Delta/2$,*
2. *$0<\psi(x)<1$ в промежутках $\alpha-\Delta/2<x<\alpha+\Delta/2$ и $\beta-\Delta/2<x<\beta+\Delta/2$,*
3. *$\psi(x)=0$ в промежутке $\beta+\Delta/2\le x\le 1+\alpha-\Delta/2$,*
4. *$\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x)=\beta-\alpha+\sum_{0<|m|<\infty} c(m)e^{2\pi i m x}\,,$$

где

$$|\,c(m)|\le\min\left(\beta-\alpha,\ \frac{1}{\pi|m|}\ ,\ \frac{1}{\pi|m|}\left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$$

Лемма 2 ([3], с. 158). *Пусть $\tau\ge 1$, α — вещественное число. Тогда существуют целые взаимно простые числа a и q, $1\le q\le\tau$, такие, что*

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q\tau}\,.$$

Лемма 3 ([4], с. 264). *Для любого действительного алгебраического числа α степени n можно подобрать положительное c, зависящее только от α, такое, что для всех рациональных чисел a/b $(a/b\ne\alpha)$ будет иметь место неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\ge\frac{c}{b^n}\,.$$

Лемма 4 ([3], с. 29). *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, c_n — произвольные комплексные числа,*

$$\mathbb{C}(x)=\sum_{a<n\le x} c_n\,.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathbb{C}(x)f'(x)dx + \mathbb{C}(b)f(b)\,.$$

Лемма 5 ([5], с. 62). *Пусть* $1 \leq U \leq N$, *где* N — *натуральное число. Тогда для любой комплекснозначной функции* $f(x)$ *справедливо тождество*

$$\sum_{U<n\leq N} \Lambda(n)f(n) = W_1 - W_2 - W_3\,,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{l\leq Nd^{-1}}(\log l)f(ld)\,,$$

$$W_2 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{n\leq U}\Lambda(n)\sum_{r\leq N(dn)^{-1}} f(ndr)\,,$$

$$W_3 = \sum_{U<m\leq NU^{-1}}\Big(\sum_{\substack{d|m\\ d\leq U}}\mu(d)\Big)\sum_{U<n\leq Nm^{-1}}\Lambda(n)f(nm)\,.$$

Лемма 6 ([3], с. 94). *При* $P \geq 1$ *имеет место оценка*

$$\Big|\sum_{x\leq P} e^{2\pi i\alpha x}\Big| \leq \min(P; 0,5\|\alpha\|^{-1}).$$

Лемма 7 ([3], с. 94). *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}\,,\ (a,q) = 1,\ q \geq 1\,,\quad |\theta| \leq 1\,.$$

Тогда при любом β, $U > 0$, $P \geq 1$ *имеем*

$$\sum_{x=1}^{P}\min(U, \|\alpha x + \beta\|^{-1}) \leq 6(Pq^{-1}+1)(U + q\log q)\,.$$

3. Доказательство теоремы. 1. Определим характеристическую функцию интервала (a,b):

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < x < b,\\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq a \text{ или } b \leq x \leq 1,\end{cases}$$

продолжим ее с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$J_{5,2}(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{p\leq\sqrt{N}}\psi_0(\eta p^2)e^{2\pi i x p^2}\Big)^5 e^{-2\pi i x N}dx.$$

В лемме 1 положим $r = [\log N]$, $\Delta = N^{-0,01}$. Обозначим через ψ_1 функцию ψ из леммы при $\alpha = a + \Delta/2$, $\beta = b - \Delta/2$ и через ψ_2 при $\alpha = a - \Delta/2$, $\beta = b + \Delta/2$. Соответственно α и β для функции ψ_1 обозначим через α_1 и β_1, для функции ψ_2 – через α_2 и β_2. Справедливо неравенство

$$J_1(N) \le J_{5,2}(N) \le J_2(N), \tag{2}$$

где

$$J_k(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{p \le \sqrt{N}} \psi_k(\eta p^2) e^{2\pi i x p^2} \Big)^5 e^{-2\pi i x N} dx, \quad k = 1, 2. \tag{3}$$

Далее покажем, что главные члены приближенных формул для $J_1(N)$ и $J_2(N)$ совпадают.

Разложим $\psi_k(\eta p^2)$ в ряд Фурье

$$\psi_k(\eta p^2) = \sum_{|m|<\infty} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p^2}.$$

Оценим сумму при $|m| > r\Delta^{-1}$, пользуясь неравенствами из леммы 1 о «стаканчиках» Виноградова:

$$\sum_{|m|>r\Delta^{-1}} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p^2} \ll \sum_{|m|>r\Delta^{-1}} \frac{1}{\pi|m|} \Big(\frac{r}{\pi|m|\Delta} \Big)^r \ll \frac{1}{\pi^{r+1}} < N^{-\log \pi}.$$

Имеем

$$\psi_k(\eta p^2) = \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p^2} + O(N^{-\log \pi}).$$

Полученное разложение для $\psi_k(\eta p^2)$ подставим в (3). Введем обозначение

$$S(x) = \sum_{p \le \sqrt{N}} e^{2\pi i x p^2}.$$

Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\int_0^1 |S(x+m_1\eta)||S(x+m_2\eta)||S(x+m_3\eta)||S(x+m_4\eta)| dx \ll$$

$$\ll \int_0^1 |S(x)|^4 dx \ll \sum_{\substack{p_1,p_2,p_3,p_4 \le \sqrt{N}, \\ p_1^2+p_2^2=p_3^2+p_4^2}} 1 \ll \sqrt{N} \sum_{\substack{l \le \sqrt{N}, \\ p_1^2+p_2^2=l}} 1 \ll$$

$$\ll \sqrt{N} \sum_{\substack{l \le \sqrt{N}, \\ x^2+y^2=l}} 1 \ll \sqrt{N} \sum_{l \le \sqrt{N}} \tau(l) \ll N \log N.$$

Тогда

$$J_k(N) = \sum_{|m_1|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_2)\times$$

$$\times \sum_{|m_3|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_3) \sum_{|m_4|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_4) \sum_{|m_5|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_5)\times$$

$$\times \int_0^1 S(x+m_1\eta)S(x+m_2\eta)S(x+m_3\eta)S(x+m_4\eta)S(x+m_5\eta)e^{-2\pi ixN}dx+$$

$$+O(N^{3/2-\log\pi}\log N).$$

2. При $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m$ рассмотрим

$$I_1(N) = \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N} \sum_{p_1\le\sqrt{N}}\sum_{p_2\le\sqrt{N}}\sum_{p_3\le\sqrt{N}}\sum_{p_4\le\sqrt{N}}\sum_{p_5\le\sqrt{N}} \times$$

$$\times \int_0^1 e^{2\pi i(x+m\eta)(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2-N)}dx.$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична по x с периодом 1, и получим

$$I_1(N) = I_{5,2}(N) \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N}.$$

Сумму по m разобьем на две: при $|m|<M$ и при $M\le|m|\le r\Delta^{-1}$, значение M выберем позже. Вторую сумму оценим с помощью леммы 1 тривиально как $O(M^{-4})$:

$$\sum_{M\le|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N} = O(M^{-4}).$$

Для коэффициентов Фурье при $m\ne 0$ известно представление ([3], с. 16)

$$c_k(m) = e^{-\pi im(\alpha_k+\beta_k)}\frac{\sin\pi m(\beta_k-\alpha_k)}{\pi m}\left(\frac{\sin\pi m\Delta/r}{\pi m\Delta/r}\right)^r.$$

При $0<|m|<M$ имеем

$$c_k^5(m) = e^{-5\pi im(a+b)}\frac{\sin^5\pi m(b-a)+O(M\Delta)}{\pi^5m^5}\Big(1+O(M\Delta)^2\Big) =$$

$$= e^{-5\pi im(a+b)}\frac{\sin^5\pi m(b-a)}{\pi^5m^5}\Big(1+O(M\Delta)\Big).$$

Далее,

$$\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^5(m)e^{2\pi im\eta N} =$$

$$= \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2,5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5} + O(M\Delta) + O(M^{-4}).$$

При выборе $M = \Delta^{-1/5}$ получим

$$I_1 = I_{5,2}(N)(s(N,a,b) + O(\Delta^{4/5})). \tag{4}$$

3. Рассмотрим наборы $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \neq (m, m, m, m, m)$ и интегралы

$$I(N, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) =$$

$$= \int_0^1 |S(x + m_1\eta)||S(x + m_2\eta)||S(x + m_3\eta)||S(x + m_4\eta)||S(x + m_5\eta)|dx\,.$$

Обозначим $x + m_1\eta$ за t. Без ограничения общности положим, что $m_1 < m_2$. Введем обозначения:

$$m_2' = m_2 - m_1, \quad \ldots, \quad m_5' = m_5 - m_1\,,$$

$$F(t) = |S(t)||S(t + m_2'\eta)||S(t + m_3'\eta)||S(t + m_4'\eta)||S(t + m_5'\eta)|\,.$$

Тогда

$$I(N, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = \int_0^1 F(t)dt\,.$$

Поскольку подынтегральная функция от переменной t имеет период 1, полагаем, что промежуток интегрирования имеет вид $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = N^{1-0,001}$.

К $t \in E$ применим лемму 2. Пусть $d, q \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau}, \quad (d,q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\theta_1| \leq 1. \tag{5}$$

Те значения t, для которых в представлении (5) $q \leq N^{0,001}$, отнесем к «большим» дугам E_1, остальные — к «малым» дугам E_2.

В соответствии с данным делением интервала интегрирования на большие и малые дуги интегралы $I(N, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ разобьем на сумму двух слагаемых:

$$\int_{E_1} F(t)dt + \int_{E_2} F(t)dt\,.$$

4. Оценим суммы вида $S(t + m_i'\eta)$ для значений t, принадлежащих большим дугам E_1. Примем, к примеру, $t + m_2'\eta$ за γ при $m_2' \neq 0$.

Рассмотрим рациональное приближение γ. Для этого вначале приблизим η рациональным числом (лемма 2)

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau_1}\,, \quad (A, Q) = 1\,, \quad |\theta| \leq 1, \quad 1 \leq Q \leq \tau_1\,.$$

Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — квадратичная иррациональность, то из лемм 2, 3 имеем $Q \asymp \tau_1$ и

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta_2}{Q^2}\,, \quad (A,Q) = 1\,, \quad |\theta_2| \le 1\,.$$

Тогда

$$\gamma = t + m_2'\eta = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_2 m_2'}{Q^2} = \frac{X}{Y} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta_2 m_2'}{Q^2}\,,$$
$$(A_1, Q_1) = 1\,, \quad (X,Y) = 1\,.$$

Из представления γ имеем $Y \le qQ$, то есть

$$\frac{1}{Q} \le \frac{q}{Y}\,.$$

Так как $Y \le qQ$ и $Q \asymp \tau_1$, то при выборе $\tau_1 = \sqrt{\tau/q}$ имеем $Y^2 \ll q\tau$. Тогда выполняется

$$\left|\frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta_2 m_2'}{Q^2}\right| = \frac{\theta_3}{Y^2}\,, \quad |\theta_3| \le 1 + |m_2'|q^2\,.$$

Обозначим $(dQ_1 + A_1 q, Q_1)$ через δ. Поскольку $(A_1, Q_1) = 1$, то $\delta | q$ и, следовательно, $\delta \le q$. Оцепим сверху $(dQ_1 + A_1 q, qQ_1)$:

$$(dQ_1 + A_1 q, qQ_1) \le q(dQ_1 + A_1 q, Q_1) \le q^2\,.$$

Тогда для

$$Y = \frac{qQ_1}{(dQ_1 + A_1 q, qQ_1)}$$

имеем

$$Y \ge \frac{Q_1}{q} \ge \frac{Q}{m_2' q}\,.$$

5. Перейдем к оценке суммы $S(\gamma)$:

$$S(\gamma) = \sum_{p \le \sqrt{N}} e^{2\pi i \gamma p^2}\,.$$

Положим $U = N^{0{,}05}$, имеем

$$S(\gamma) = \sum_{U < p \le \sqrt{N}} e^{2\pi i \gamma p^2} + O(U)\,.$$

Пусть

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = p, \\ 0, & \text{если } x \ne p. \end{cases}$$

Используя формулу частного суммирования (лемма 4), выбрав

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{U < n \le x} \alpha(n) e^{2\pi i \gamma n^2} \log n\,,$$

получим

$$\sum_{U<p\le\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2} \ll \int_U^{\sqrt{N}} |\mathbb{C}(x)| \frac{dx}{x\log^2 x} + \frac{|\mathbb{C}(\sqrt{N})|}{\log N} \ll$$

$$\ll \max_{U<x\le\sqrt{N}} \Big| \sum_{U<p\le x} e^{2\pi i\gamma p^2} \log p \Big| .$$

Поскольку

$$\sum_{U<n\le\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma n^2}\Lambda(n) = \sum_{U\le p\le\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2}\log p + \sum_{k=2}^{\log N} \sum_{U\le p^k\le\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2}\log p =$$

$$= \sum_{U\le p\le\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma p^2}\log p + O(N^{1/4}\log^2 N) .$$

Окончательно,

$$|S(\gamma)| = \max_{U<x\le\sqrt{N}} \Big| \sum_{U<n\le x} e^{2\pi i\gamma n^2}\Lambda(n) \Big| + O(N^{1/4}\log^2 N) .$$

6. В лемме 5 положим $f(n) = e^{2\pi i\gamma n^2}$. Тогда

$$\sum_{U<n\le\sqrt{N}} e^{2\pi i\gamma n^2}\Lambda(n) = A_1 - A_2 - A_3,$$

где

$$A_1 = \sum_{d\le U}\mu(d) \sum_{l\le\sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i\gamma(dl)^2}\log l,$$

$$A_2 = \sum_{d\le U}\mu(d) \sum_{n\le U}\Lambda(n) \sum_{r\le\sqrt{N}(dn)^{-1}} e^{2\pi i\gamma(dnr)^2},$$

$$A_3 = \sum_{U<m\le\sqrt{N}U^{-1}} a_m \sum_{U<n\le\sqrt{N}m^{-1}} \Lambda(n) e^{2\pi i\gamma(mn)^2},$$

$$a_m = \sum_{\substack{d|m,\\ d\le U}} \mu(d).$$

7. Во внутренней сумме A_1 проведем частное суммирование но l (лемма 4):

$$\sum_{l\le\sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i\gamma(dl)^2}\log l \ll$$

$$\ll \int_1^{\sqrt{N}d^{-1}} |\mathbb{C}(x)| d(\log x) + |\mathbb{C}(\sqrt{N}d^{-1})| \log(\sqrt{N}d^{-1}),$$

где

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{l\le x} e^{2\pi i\gamma d^2 l^2}.$$

Тогда

$$A_1 \ll \log N \sum_{d\le U} \Big| \sum_{l\le \sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i\gamma d^2 l^2} \Big|.$$

Промежутки суммирования по l, d разобьем на промежутки вида

$$D < d < D_1 \le 2D, \quad L < l < L_1 \le 2L,$$

получится $\ll \log^2 N$ промежутков:

$$A_1 \ll \log^3 N \sum_{d} |A_1(L)|, \tag{6}$$

где

$$A_1(L) = \sum_{l} e^{2\pi i\gamma d^2 l^2},$$

и модуль суммы в правой части неравенства (6) максимален. Рассмотрим

$$|A_1(L)|^2 = \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d^{-1}\\ 0<h\le L}} \Big| \sum_{\substack{L<l+h\le L_1\\ L<l\le L_1}} e^{2\pi i\gamma d^2(h^2+2hl)} \Big|.$$

По лемме 6

$$A_1(L)^2 \ll \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d^{-1}\\ 0<h\le L}} \min(L, \|\gamma d^2 h\|^{-1}) \ll \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d\\ 0<h\le Ld^2}} \min(L, \|\gamma h\|^{-1}).$$

Пусть $h = h_1 + Ys$, $0 \le h_1 < Y$. Воспользуемся, полученным выше, рациональным приближением γ:

$$\gamma = \frac{X}{Y} + \frac{\theta_3}{Y^2}, \quad (X,Y) = 1, \quad |\theta_3| \le 1 + |m_2'|q^2.$$

Обозначим $\gamma Y s$ через β_1, тогда

$$\gamma h = \gamma h_1 + \beta_1 = \frac{Xh_1 + [\beta_1 Y] + \theta_3 h_1 Y^{-1} + \{\beta_1 Y\}}{Y}.$$

Имеем

$$A_1(L)^2 \ll \left(\frac{Ld^2}{Y} + 1\right) \sum_{0\le h_1<Y} \min\left(L, \|\gamma h_1 + \beta_1\|^{-1}\right).$$

Обозначим Z_1 наименьший неотрицательный вычет числа $Xh_1 + [\beta_1 Y]$ по модулю Y. Полагая

$$Z = \begin{cases} Z_1, & \text{если } Z_1 \le Y/2, \\ Y - Z_1, & \text{если } Y/2 < Z_1 \le Y, \end{cases}$$

имеем

$$\sum_{0\le h_1<Y}\min(L,\|\gamma h_1+\beta_1\|^{-1})\ll\sum_{|Z|\le 0{,}5Y}\min\Big(L,\Big\|\frac{Z}{Y}+\frac{\theta_4(Z)}{Y}\Big\|^{-1}\Big),$$

где $|\theta_4(Z)|<2|m_2'|q^2$. Следовательно,

$$A_1(L)^2\ll\Big(\frac{Ld^2}{Y}+1\Big)\Big(L|m_2'|q^2+\sum_{2|m_2'|q^2\le|Z|\le 0{,}5Y}\frac{Y}{|Z|-2|m_2'|q^2}\Big).$$

Так как

$$L\le\sqrt{N}d^{-1},\quad d\le U,\quad |m_2'|\le\Delta^{-1}\log N\,,$$

имеем

$$A_1(L)^2\ll\Big(\frac{\sqrt{N}d}{Y}+1\Big)\Big(\frac{\sqrt{N}q^2}{d\Delta}+Y\Big)\log N\ll$$

$$\ll\Big(\frac{Nq^2}{Y\Delta}+\frac{\sqrt{N}q^2}{d\Delta}+\sqrt{N}U+Y\Big)\log N\,.$$

8. Проведем аналогичные рассуждения для A_2. В результате получаем

$$A_1,A_2\ll U^2\log^{3,5}N\left(\sqrt{N}\left(\frac{q}{\sqrt{Y\Delta}}+\frac{q}{\sqrt{d\Delta\sqrt[4]{N}}}+\frac{U}{\sqrt[4]{N}}\right)+\sqrt{Y}\right).$$

Параметры выбраны так, что

$$U=N^{0{,}05}\,,\quad q\le N^{0{,}001}\,,\quad \Delta=N^{-0{,}01}\,,$$

$$\frac{Q}{m_2'q}\le Y\le qQ\,,\quad |m_2'|\le\frac{\log N}{\Delta}\,,\quad Q\asymp\sqrt{\frac{N^{1-0{,}001}}{q}}\,,$$

что позволяет получить оценки

$$\frac{1}{Y}\ll\frac{\log N}{N^{0{,}488}}\,,\quad\frac{q}{\sqrt{Y\Delta}}\ll\frac{\sqrt{\log N}}{N^{0{,}238}}\,,\quad\frac{q}{\sqrt{d\Delta\sqrt[4]{N}}}\ll\frac{1}{N^{0{,}244}},\quad Y\ll\sqrt{N}\,.$$

Тогда

$$A_1,A_2\ll N^{0{,}4}\log^4 N.$$

9. Оценим сумму A_3.

$$A_3\ll|A_3(M,K)|\log^2 N\,,$$

где

$$A_3(M,K)=\sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}U^{-1},\\ M<m\le 2M}}a_m\sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}m^{-1},\\ K<n\le 2K}}\Lambda(n)e^{2\pi i\gamma m^2n^2}\,.$$

Если $MK\le N^{1/2-0{,}00002}\log^{-4}N$, то достаточно тривиальной оценки

$$A_3(M,K)\ll MK\log^2 N,$$

чтобы $A_3 \ll N^{1/2-0,00002}$. В дальнейшем полагаем, что

$$N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N < MK \le \sqrt{N}\,.$$

Возведем сумму $A_3(M,K)$ в квадрат, воспользуемся неравенством Коши:

$$A_3(M,K)^2 \ll \Big(\sum_m a_m^2\Big)\sum_m\Big|\sum_n \Lambda(n)e^{2\pi i\gamma m^2n^2}\Big|^2.$$

Так как

$$\sum_{m\le M} a_m^2 \ll \sum_{m\le M}\tau^2(m) \ll M\log^3 N,$$

тогда

$$A_3(M,K)^2 \ll M\log^5 N\Big(MK+$$

$$+\sum_{\substack{j\le\sqrt{N}U^{-1},\\ 0<j\le K}}\ \sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}U^{-1}\\ K<n\le 2K}}\Big|\sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}(n+j)^{-1},\\ M<m\le 2M}} e^{2\pi i\gamma m^2(2n+j)j}\Big|\Big).$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат и еще раз воспользуемся неравенством Коши:

$$A_3(M,K)^4 \ll M^2\log^{10} N(M^2K^3 + S(M,K)),$$

где

$$S(M,K) \ll K^2\Big(K^2M + \sum_j\sum_n\sum_m\Big|\sum_{0<l\le M} e^{2\pi i\gamma(2m+l)l(2n+j)j}\Big|\Big).$$

По лемме об оценке модуля линейной тригонометрической суммы (лемма 6), получим

$$S(M,K) \ll K^2(K^2M + \sum_{j\le K}\sum_{n\le 5K}\sum_{m\le 2M}\min(M,\|\gamma mnj\|^{-1})).$$

Далее

$$\sum_{m\le 2M}\min(M,\|\gamma mnj\|^{-1}) \ll \sum_{h\le 10MK^2}\tau_3(h)\min(M,\|\gamma h\|^{-1}) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon}\Big(\frac{MK^2}{Y}+1\Big)(M|m_2'|q^2 + Y\log Y) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon}\Big(M^2K^2\Big(\frac{|m_2'|q^2}{Y}+\frac{|m_2'|q^2}{MK^2}+\frac{\log N}{M}\Big)+Y\log N\Big).$$

При $|m_2'| < \Delta^{-1}\log N$ получаем

$$A_3(M,K)^4 \ll N^{2\varepsilon}\Big(M^4K^4\Big(\frac{1}{K}+\frac{q^2}{\Delta Y}+\frac{q^2}{\Delta MK^2}+\frac{1}{M}\Big)+M^2K^2Y\Big).$$

С учетом неравенств

$$U < M \leq \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad U < K \leq \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad \frac{N^{1/2-0,00002}}{\log^4 N} < MK \leq \sqrt{N}$$

имеем

$$A_3 \ll N^{\varepsilon}\Big(\sqrt{N}\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{U}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta Y}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta MKU}}\Big) + \sqrt[4]{NY}\Big).$$

Параметры выбраны так, что

$$U = N^{0,05}, \quad q \leq N^{0,001}, \quad \Delta = N^{-0,01},$$

$$\frac{Q}{m_2' q} \leq Y \leq qQ, \quad |m_2'| \leq \frac{\log N}{\Delta}, \quad Q \asymp \sqrt{\frac{N^{1-0,001}}{q}},$$

$$N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N < MK \leq \sqrt{N}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt[4]{U}} \ll \frac{1}{N^{0,0125}}, \quad \frac{1}{Y} \ll \frac{\log N}{N^{0,488}}, \quad \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta Y}} \ll \frac{\sqrt[4]{\log N}}{N^{0,119}},$$

$$\frac{\sqrt{q}}{\sqrt[4]{\Delta MKU}} \ll \frac{\log N}{N^{0,134}}, \quad Y \ll \sqrt{N}.$$

В результате при $\varepsilon < 0,001$ получаем оценку

$$A_3 \ll N^{0,49}.$$

Таким образом, для суммы $|S(t + m_2'\eta)|$ при $t \in E_1$ справедлива оценка

$$|S(t + m_2'\eta)| \ll N^{1/2-0,00002}.$$

10. Применив неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, оценим интеграл по множеству E_1 как

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll \max_{t\in E_1} |S(t + m_2'\eta)| \int_0^1 |S(t)|^4 dt.$$

Учитывая полученную при $t \in E_1$ оценку $|S(t + m_2'\eta)|$, имеем

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll N^{3/2-0,00002}. \tag{7}$$

11. При $t \in E_2$ рассмотрим сумму $S(t)$:

$$S(t) = \sum_{p\leq\sqrt{N}} e^{2\pi i t p^2}.$$

Пусть $U = N^{0,0002}$. Совершая преобразование Абеля, имеем

$$|S(t)| = \max_{U<x\le\sqrt{N}} \Big| \sum_{U<n\le x} e^{2\pi i t n^2} \Lambda(n) \Big| + O(N^{1/4}) .$$

12. В лемме 5 выберем $f(n) = e^{2\pi i t n^2}$. Тогда

$$\sum_{U<n\le\sqrt{N}} e^{2\pi i t n^2} \Lambda(n) = B_1 - B_2 - B_3,$$

где

$$B_1 = \sum_{d\le U} \mu(d) \sum_{l\le\sqrt{N}d^{-1}} e^{2\pi i t (dl)^2} \log l ,$$

$$B_2 = \sum_{d\le U} \mu(d) \sum_{n\le U} \Lambda(n) \sum_{r\le\sqrt{N}(dn)^{-1}} e^{2\pi i t (dnr)^2} ,$$

$$B_3 = \sum_{U<m\le\sqrt{N}U^{-1}} b_m \sum_{U<n\le\sqrt{N}m^{-1}} \Lambda(n) e^{2\pi i t (mn)^2} ,$$

$$b_m = \sum_{\substack{d|m,\\ d\le U}} \mu(d) .$$

13. Рассмотрим сумму B_1.

$$B_1 \ll \log^3 N \sum_{\substack{d\le U,\\ D<d\le 2D}} |B_1(L)| ,$$

где

$$B_1(L) = \sum_{\substack{l\le\sqrt{N}d^{-1},\\ L<l\le 2L}} e^{2\pi i t d^2 l^2}.$$

Возведем $|B_1(L)|$ в квадрат:

$$|B_1(L)|^2 = \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d^{-1},\\ 0<h\le L}} \Big| \sum_{\substack{L<l+h\le L_1,\\ L<l\le L_1}} e^{2\pi i t d^2 (h^2+2hl)} \Big| .$$

По лемме 6 имеем

$$B_1(L)^2 \ll \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d^{-1}\\ 0<h\le L}} \min(L, \|td^2h\|^{-1}) \ll \sum_{\substack{h\le\sqrt{N}d,\\ 0<h\le Ld^2}} \min(L, \|th\|^{-1}) .$$

По лемме об оценке суммы минимумов (лемма 7) получаем неравенство:

$$B_1(L)^2 \ll (\sqrt{N}dq^{-1} + 1)(L + q\log q) \ll$$

$$\ll (\sqrt{N}dLq^{-1} + \sqrt{N}d + q)\log q \ll (Nq^{-1} + \sqrt{N}d + q)\log N\,.$$

Проведя аналогичные рассуждения для суммы B_2, в результате имеем

$$B_1, B_2 \ll U^2 \log^{3,5} N(\sqrt{Nq^{-1}} + UN^{1/4} + \sqrt{q})\,.$$

При выборе параметров

$$U = N^{0,0002}, \quad N^{0,001} < q \le N^{1-0,001}$$

получаем

$$B_1, B_2 \ll N^{1/2-0,0001} \log^{3,5} N\,.$$

14. Получим оценку суммы B_3.

$$B_3 \ll |B_3(M,K)| \log^2 N\,,$$

где

$$B_3(M,K) = \sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}U^{-1},\\ M<m\le 2M}} b_m \sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}m^{-1},\\ K<n\le 2K}} \Lambda(n) e^{2\pi i t m^2 n^2}.$$

Оценку суммы $B_3(M,K)$ проведем для $\sqrt{N} \ge MK > N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N$. Для $MK \le N^{1/2-0,00002}\log^{-4} N$ достаточно тривиальной оценки $B_3(M,K)$.

Возведем $B_3(M,K)$ в квадрат, применим неравенство Коши:

$$B_3(M,K)^2 \ll M\log^5 N\Big(MK + \sum_{\substack{j\le\sqrt{N}U^{-1},\\ 0<j\le K}} \sum_{\substack{U<n\le\sqrt{N}U^{-1},\\ K<n\le 2K}} \times$$

$$\times \Big| \sum_{\substack{U<m\le\sqrt{N}(n+j)^{-1},\\ M<m\le 2M}} e^{2\pi i t m^2(2n+j)j} \Big|\Big).$$

Далее, Возведя обе части полученного равенства в квадрат, применим неравенство Коши и лемму 6:

$$B_3(M,K)^4 \ll M^2 \log^{10} N(M^2K^3 + K^4M + K^2 \sum_{h\le 10MK^2} \tau_3(h)\min(M, \|th\|^{-1}))\,.$$

Применяя лемму 7, имеем

$$\sum_{h\le 10MK^2} \min(M, \|th\|^{-1}) \ll \Big(\frac{MK^2}{q} + 1\Big)(M+q)\log N \ll$$

$$\ll \Big(M^2K^2\Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{M}\Big) + q\Big)\log N\,.$$

Тогда

$$B_3(M,K)^4 \ll \Big(M^4K^4\Big(\frac{1}{K} + \frac{1}{M} + \frac{1}{q}\Big) + M^2K^2q\Big)N^{2\varepsilon}\,.$$

При выборе параметров

$$U < K \le \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad U < M \le \frac{\sqrt{N}}{U}, \quad \frac{N^{1/2-0,00002}}{\log^4 N} < MK \le \sqrt{N}\,,$$

$$U = N^{0,0002}, \quad N^{0,001} < q \le N^{1-0,001}, \quad \varepsilon < 0,00001$$

выполняется неравенство

$$B_3 \ll N^{\varepsilon}(\sqrt{N}(U^{-1/4} + q^{-1/4}) + (qN)^{1/4}) \ll N^{1/2-0,00002}\,.$$

Таким образом, если $t \in E_2$, то справедлива оценка

$$|S(t)| \ll N^{1/2-0,00002}\,.$$

15. Поскольку

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll \max_{t\in E_2}|S(t)| \int_0^1 |S(t)|^4 dt\,,$$

имеем

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll N^{3/2-0,00002}\,. \tag{8}$$

Окончательно утверждение теоремы следует из (2), (4), (7), (8). ■

Литература

1. Hua L.-K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. – 1938. – 44. – P.335-346.
2. Хуа Л.-К. Аддитивная теория простых чисел / М.: Изд. АН СССР. – 1947. – 22.
3. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел / М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
6. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.

HUA LOO KENG'S PROBLEM FOR PRIMES OF A SPECIAL TYPE

***S.A. Gritsenko, **N.N. Motkina**

*Financial University of Russian Federation Government,
Leningradsky Av., 49, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, 1, Moscow, Russia, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Belgorod State University,
Pobeda St., 85, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

Abstract. Let η be a quadratic irrationality. A variant of Hua Loo Keng's problem on the basis of primes such that $a < \{\eta p^2\} < b$, where a and b are arbitrary real numbers of the interval $[0, 1]$ is solved.

Key words: additive problems, primes of special type, solutions number, asymptotic formula, quadratic irrationality.