MSC 05A18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА РАЗЛОЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

Ю.П. Вирченко, Л.П. Остапенко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается комбинаторная задача о числе разложений M_n произвольного конечного множества из n элементов. Вычисляется производящая функция числа M_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: разложения конечного множества, производящая функция, симметричные функции, бесконечномерная алгебра.

1. Разложения конечного множества. Пусть $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ – стандартное n-элементное множество. Разложением множества I_n называется неупорядоченный набор непустых множеств ω_j, $j = 1 \div s$, которые называются *компонентами* этого разложения и которые составляют диъюнктивное разложение множества I_n:

$$\bigcup_{l=1}^{s} \omega_l = I_n \,, \quad \omega_j \cap \omega_k \neq \varnothing \,, \quad j \neq k \,, \quad j, k = 1 \div s \,.$$

Число s компонент разложения называется его *мощностью*.

Обозначим посредством M_n значения функции от $n \in \mathbb{N}$, равные числу всех возможных разложений множества I_n для фиксированного значения $n \in \mathbb{N}$. Следующий пример поясняет смысл введенных понятий.

Пример:

1. $n = 1$, $I_1 = \{1\}$. Имеется только одно разложение с $s = 1$, $\omega_1 = I_1 = \{1\}$. $M_1 = 1$.

2. $n = 2$, $I_2 = \{1, 2\}$. Имеется два разложения с $s = 1$, $\omega_1 = I_2$ и с $s = 2$, $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$. $M_2 = 2$.

3. $n = 3$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$. Имеется пять разложений с $s = 1$, $\omega_1 = I_3$ и с $s = 2$: $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2, 3\}$; $\omega_1 = \{1, 2\}$, $\omega_2 = \{3\}$; $\omega_1 = \{1, 3\}$, $\omega_2 = \{2\}$; с $s = 3$, $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$, $\omega_3 = \{3\}$. $M_3 = 5$.

В связи с понятием разложения, естественным образом, возникает комбинаторная задача о вычислении числа разложений M_n для каждого значения $n \in \mathbb{N}$. Эта задача тесно связана с некоторыми вопросами статистической механики (см. [1]). Настоящее сообщение посвящено решению этой задачи, которое понимается как вычисление производящей функции (см., например, [2])

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} M_n \,, \qquad M_n = \left(\frac{d^n G(z)}{dz^n} \right)_{z=0} \,, \tag{1}$$

соответствующей комбинаторной функции M_n, где, по определению, $M_0 = 1$.

2. Алгебра последовательностей симметричных функций. Вычисление функции $G(z)$ будет выполнено на основе специальной алгебраической техники, используемой в статистической механике (см., например, [1]), возникновение которой было связано с преобразованиями статистических сумм [3].

Рассмотрим линейное пространство бесконечных последовательностей $\Phi = \langle \varphi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$, в которых каждая компонента φ_m при любом $m \in \mathbb{N}_+$ является симметричной измеримой функцией на $[0,1]^m$ со значениями в $\mathbb{R}$, $\varphi_m(X_m) \equiv \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_m)$, $X_m = \langle x_1, x_2, ..., x_m \rangle$. При этом для значения $m = 0$ такие функции, полагаются константами. Это линейное пространство превращается в коммутативную алгебру $\mathbb{A}$ при определении на нем следующей бинарной операции $*$. Для каждой пары $\Phi = \langle \varphi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ и $\Psi = \langle \psi_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ последовательностей из $\mathbb{A}$ построим последовательность $\Phi * \Psi$, компоненты которой определяются формулой (см. [1])

$$(\Phi * \Psi)_n(X(I_n)) = \sum_{\omega \subset I_n} \varphi_{|\omega|}(X(\omega))\psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)) \,, \tag{1}$$

в которой использованы следующие обозначения: $X(\omega) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s} \rangle$ для каждого $\omega = \{i_1, i_2, ..., i_s\} \subset I_n$ и $|\omega| = s$ – число элементов в ω.

Очевидно, что функции $(\Phi * \Psi)_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ симметричны при любом $n \in \mathbb{N}$ и, таким образом, результатом применения операции $*$ к двум последовательностям Φ и Ψ снова является последовательность симметричных функций. Очевидным образом операция $*$ является коммутативным умножением, так как удовлетворяет всем свойствам, предъявляемым к умножению в общеалгебраическом смысле. Таким образом, линейное пространство $\mathbb{A}$, снабженное операцией $*$ является бесконечномерной коммутативной алгеброй. Единицей алгебры $\mathbb{A}$ является последовательность $\mathbf{1} = \langle 1, 0, 0, ... \rangle$.

В алгебре $\mathbb{A}$ имеется идеал $\mathbb{A}_0$, который состоит из последовательностей Φ функций с $\varphi_0 = 0$. Для элементов Φ этого идеала рассмотрим степень Φ_*^m с любым $m \in \mathbb{N}$. Тогда компоненты $(\Phi_*^m)_n$ этой последовательности равны нулю при $n > m$. Если же $n \leq m$, то эти компоненты даются формулой

$$\left(\Phi_*^m\right)_n(X(I_n)) = m! \sum_{\substack{\omega_1,...,\omega_m: \\ \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_m = I_n, \\ \omega_j \neq \varnothing,\ \omega_j \cap \omega_k = \varnothing}} \varphi_{|\omega_1|}(X(\omega_1))\varphi_{|\omega_2|}(X(\omega_2))...\varphi_{|\omega_m|}(X(\omega_m)) \,,$$

то есть суммирование в правой части формулы производится по разложениям множества I_n, содержащим ровно m компонент. Тогда для элементов Φ из идеала $\mathbb{A}_0$ имеет место формула

$$\left(\exp_* \Phi\right)_n(X(I_n)) = (\mathbf{1})_n(X(I_n)) + \left(\Phi\right)_n(X(I_n)) + \frac{1}{2!}\left(\Phi_*^2\right)_n(X(I_n)) + \frac{1}{3!}\left(\Phi_*^3\right)_n(X(I_n)) + ... =$$

$$= \sum_{\substack{\omega_1,...,\omega_s: \\ \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_s = I_n, \\ \omega_j \neq \varnothing,\ \omega_j \cap \omega_k = \varnothing}} \varphi_{|\omega_1|}(X(\omega_1))\varphi_{|\omega_2|}(X(\omega_2))...\varphi_{|\omega_s|}(X(\omega_s)) \,, \tag{2}$$

где суммирование производится по всем разложениям множества I_n с любым допустимым числом $s = 1, ..., n$ компонент.

Так как

$$M_n = \sum_{\substack{\omega_1, ..., \omega_s : \\ \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_s = I_n , \\ \omega_j \neq \varnothing, \ \omega_j \cap \omega_k = \varnothing}} 1 ,$$

то из (2) следует, что

$$M_n = \Big(\exp_* \Psi\Big)_n (X(I_n)) , \qquad \chi = \langle 0, 1, 1, ...\rangle = 1 - \delta_{0,n} , \quad n \in \mathbb{N}_+$$

для любой точки $X_n \in [0,1]^n$. Эта формула является основой для вычисления производящей функции $G(z)$.

Введем линейную форму $L(z; \cdot)$ на алгебре $\mathbb{A}$, зависящую от параметра $z \in \mathbb{C}$. Для каждого элемента Φ алгебры $\mathbb{A}$ значение $L(z; \Phi)$ этой формы определяется формулой

$$L(z; \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_n(X_n) dX_n , \tag{3}$$

где $dX_n = dx_1 dx_2 ... dx_n$ – мера Лебега на $[0,1]^n$. Эти значения заведомо конечны в том случае, когда последовательность функций Φ равномерно ограничена.

Теорема 1. *Форма L мультипликативна, то есть для каждой пары элементов $\langle \Phi, \Psi \rangle$ с равномерно ограниченными элементами имеет место равенство*

$$L(z; \Phi * \Psi) = L(z; \Phi) L(z; \Psi) . \tag{4}$$

□ Доказательство проводится приводимым ниже прямым вычислением, в котором все ряды равномерно сходятся, ввиду предполагаемой равномерной ограниченности. Согласно определению (1),

$$L(z; \Phi * \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} (\Phi * \Psi)_n (X(I_n)) dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{\omega \subset I_n} \varphi_{|\omega|}(X(\omega)) \psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)) dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\omega \subset I_n} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_{|\omega|}(X(\omega)) \psi_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega)) dX_n .$$

После замены переменных интегрирования $X(\omega)$, $|\omega| = m$ на $X(I_m)$ и $X(I_n \setminus \omega)$ на $X(I_n \setminus I_m)$ в каждом из слагаемых и используя правило перестройки суммирований

$\sum\limits_{\omega \in I_n} \ldots = \sum\limits_{m=0}^{n} \sum\limits_{\omega \in I_n : |\omega|=m} \ldots, \sum\limits_{\omega \in I_n : |\omega|=m} 1 = \binom{n}{m}$, получаем

$$L(z;\Phi * \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\omega \subset I_n} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_m(X_m)\psi_{n-m}(X(I_n \setminus I_m))dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_m(X_m)\psi_{n-m}(X(I_n \setminus I_m))dX_n =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \int\limits_{[0,1]^m} \varphi_m(X_m)dX(I_m) \int\limits_{[0,1]^{n-m}} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{z^{n-m}}{(n-m)!} \psi_{n-m}(X(I_n \setminus I_m))dX(I_{n-m}) =$$

$$= \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \int\limits_{[0,1]^m} \varphi_m(X_m)dX(I_m) \Big) \Big(\int\limits_{[0,1]^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \psi_n(X(I_n))dX(I_n) \Big) = L(z;\Phi)L(z;\Psi) . \blacksquare$$

Следствие. *Если* $\Phi \in \mathbb{A}_0$, *то*

$$L\big(z; \exp_* \Phi\big) = \exp\big(L(z;\Phi)\big) . \tag{5}$$

3. Вычисление производящей функции $G(z)$**.** Положим $\Phi = \chi \in \mathbb{A}_0$. Тогда

$$L(z;\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$$

и, на основании формулы (5),

$$L(z; \exp_* \chi) = \exp\left(e^z - 1\right) . \tag{6}$$

С другой стороны, как было сказано выше $(\exp_* \Phi) = M_n$, $n \in \mathbb{N}$, и поэтому, согласно (6),

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} M_n = L(z; \exp_* \chi) = \exp\left(e^z - 1\right) .$$

Таким образом, производящая функция $G(z)$ числа разложений определяется формулой

$$G(z) = \exp\left(e^z - 1\right) . \tag{7}$$

Пример. Произведем расчет первых пяти значений M_n на основе формулы (7).

$$M_n = G^{(n)}(0) .$$

Заметим, что $G^{(n)} = G(z)Q_n(e^z)$, где $Q_n(x)$ – полипом n-й степени, где $Q_1(x) = x$. При этом полиномы Q_n вычисляются рекуррентно по формуле

$$Q_{n+1}(x) = x\big(Q_n'(x) + Q_n(x)\big)\,.$$

Это положение проверяется непосредственным дифференцированием

$$G^{(n+1)} = G'(z)Q_n(e^z) + G(z)Q_n'(e^z)e^z = G(z)\big(Q_n(e^z) + Q_n'(e^z)\big)e^z\,.$$

Так как $G(0) = 1$ и $M_n = G^{(n)}(0) = G(0)Q_n(1)$, $Q_{n+1}(1) = Q_n(1) + Q_n'(1)$, то

$$\begin{aligned}
&Q_1(x) = x && M_1 = 1\,;\\
&Q_2(x) = x + x^2 && M_2 = 2\,;\\
&Q_3(x) = x + 3x^2 + x^3 && M_3 = 5\,;\\
&Q_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4\,, && M_4 = 15\,;\\
&Q_5(x) = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5\,, && M_5 = 52\,;
\end{aligned}$$

то есть эти значения совпадают со значениями M_1, M_2, M_3, вычисленными выше напрямую.

Литература

1. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971. – 368 с.
2. Холл М. Комбинаторный анализ / М.: Иностр.лит., 1963. – 98 с.
3. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика / М.: Мир, 1980. –546 с.

CALCULATION OF PARTITION NUMBER OF FINITE SET

Yu.P. Virchenko, L.P. Ostapenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. Combinatorial problem about the partition number M_n of arbitrary finite set of n elements is studied. The generation function of the number M_n, $n \in \mathbb{N}$ is calculated.

Key words: partition of finite set, generation function, symmetric functions, infinite dimensional algebra.