MSC 81P20

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ. 1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Конструируется случайное поле, описывающее стохастическое электромагнитное поле в диэлектрической среде, которое порождается ее тепловыми флуктуациями. Это поле является гауссовским. Оно описывается стохастической динамической системой, эволюционными уравнениями которой являются уравнения Максвелла с аддитивным шумом. При этом шум определяется локальными флуктуациями заряда в среде, вызванными тепловыми колебаниями атомов диэлектрической среды.

Ключевые слова: стохастическое электромагнитное поле, гауссовское поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция.

1. Постановка задачи. Понятие о стохастическом электромагнитном ноле возникает естественным образом при описании электромагнитного ноля, имеющего тепловое происхождение. Происхождение такой точки зрения восходит к работам, связанным с построением статистической физики теплового излучения абсолютно черного тела (см., например, [1-2]). Однако, в то время авторы стохастической концепции относительно теплового электромагнитного ноля не могли последовательно использовать формализм теории вероятностей при построении его статистической теории. Это связано с тем, что соответствующего ее раздела – теории случайных процессов, в рамках которого можно было бы реализовать идею о статистическом описании теплового электромагнитного поля, еще не существовало. В более позднее время, когда математическая теория случайных процессов уже достигла того уровня зрелости и, пользуясь ее представлениями, стало допустимым конструирование вероятностных моделей случайных эволюционирующих во времени нолей, то есть появилась возможность, по-новому, подойти к задаче математического описания теплового электромагнитного ноля (см., например, монографии [3, 4]). Отметим в этой связи, что основным здесь является не тепловое излучение в вакууме, изучение которого более относится к вопросам *квантовой оптики*, в которой, в настоящее время, имеются хорошо разработанные физические представления и математические методы, а именно процессы излучения, поглощения и переноса электромагнитного излучения в среде (главным образом, твердотельной), тесно связанного с тепловыми колебаниями составляющих ее атомов (молекул). Изучение этих процессов с макроскопической точки зрения относится к разделу теоретической физики, которая называется *теорией переноса излучения*. Предметом же изучения статистической теории теплового излучения являются микроскопические процессы, которые лежат в основе такого переноса изучения, то есть, в конце концов, ее целью является обоснование основных положений, на которых покоится эта теория, и их уточнение. Это находится в полной аналогии с теми традиционными задачами статистической физики, решение которых, согласно основной идее статистического подхода, должно обеспечивать конкретной информацией о зависимостях между макроскопическими характеристиками сред при изучении в них макроскопических эволюционных процессов.

При исследовании процессов переноса теплового электромагнитного излучения в среде центральным является вопрос о физических микроскопических механизмах, посредством которых этот перенос осуществляется. Исходя из представления о том, что на микроскопическом уровне электромагнитные процессы, происходящие в твердом теле, носят квантовый характер и поэтому должны описываться в рамках представлений квантовой теории, следовало бы строить статистическую теорию переноса теплового излучения на основе таких представлений. Однако, в настоящее время мы еще далеки от создания такой последовательной теории. Более того, так как процессы переноса излучения в твердотельных средах играют заметную роль только при достаточно больших температурах, то можно было бы, на начальном этапе развития теории, ограничиться построениями, основанными на классической электродинамике процессов излучения и поглощения электромагнитного излучения. Но создание даже такой теории в рамках статистической физики сопряжено с большими трудностями, так как это требует последовательного описания кинетических процессов атомов твердого тела и электромагнитного излучения. В связи с этим, в уже цитировавшихся выше монографиях развивался иной полуфеноменологический подход, основанный на описании кинетики тепловых флуктуаций электромагнитного излучения в твердом теле. При этом случайные флуктуации излучения математически описывались посредством математического аппарата теории случайных процессов. Настоящая работа направлена на развитие такого подхода.

В рамках указанного полуфеноменологического подхода к изучению процессов переноса теплового излучения в среде центральным является вопрос о выборе модели стохастического электромагнитного поля, на основе которой возможно было бы вычисление потока энергии теплового электромагнитного излучения, описывающего локальный баланс тепла в каждой малой области среды. Именно дивергенция этого потока входит в качестве одного из слагаемых в уравнение переноса тепла в среде.

В более ранних публикациях [5-7] одного из авторов настоящего сообщения был исследован частный случай стохастического электромагнитного поля – т.н. *гауссовская модель* со статистически независимыми и эквивалентными электрической и магнитной составляющими, которая естественна в том случае, когда имеется физическая малость величины поля в среднем квадратичном. Существенным недостатком теории являлось то, что механизм генерации излучения в ней математически связывался со случайными флуктуациями электрической восприимчивости среды, что не могло объяснить, адекватным образом, поглощение излучения, и, следовательно, его перекачку в тепловую энергию колебаний атомов среды. В этой работе мы предлагаем другую модель, основанную на представлениях о флуктуациях заряда в среде, имеющих место, даже в диэлектриках, на масштабах порядка нескольких средних расстояний между атомами, и, соответственно, вызванных этими флуктуациями заряда флуктуациях электрического тока на тех же пространственных масштабах. В рамках такой модели, но нашему мнению, ввиду феноменологической связи между интенсивностью флуктуаций и их затуханием (т.н. флуктуационно-диссипационная теорема), естественным образом, возможно объяснение механизма переноса теплового электромагнитного излучения в среде.

Работа состоит из двух частей. В настоящей первой части мы строим математическую модель стохастического электромагнитного ноля в диэлектрической среде. В следующей второй части вычислены парные корреляционные функции стохастического электромагнитного поля, которые полностью определяют его распределение вероятностей и, тем самым, полностью определяют физические характеристики теплового электромагнитного излучения, моделью которого это поле служит.

2. Построение модели. Как известно, физические характеристики электромагнитного ноля в среде подчинены *уравнениям Максвелла*, которые представляют собой дифференциальные связи

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = [\nabla, \mathbf{H}]\,, \quad (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho\,, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -[\nabla, \mathbf{E}]\,, \qquad\quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

между, соответственно, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряженностями электрического и магнитного нолей и $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ – электрической и магнитной индукциями в среде и $\mathbf{j}$, ρ – плотности электрических тока и заряда.

Эта система является переопределенной. Для ее совместности, то есть для существования у нее решения, необходимо, чтобы величины ρ и $\mathbf{j}$ были связаны дифференциальной связью

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{j}) = 0\,, \tag{2}$$

которая называется *уравнением непрерывности заряда.*

Для того чтобы система (1) представляла собой систему дифференциальных уравнений, к ней должны быть добавлены функциональные связи между парами величин $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, понижающие число независимых полей. Эти связи называются *материальными уравнениями.* В рамках линейной электродинамики, без учета магнитоэлектрических эффектов, они имеют вид [2)]

$$D_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{t} \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) E_j(\mathbf{y}, s) ds\,, \tag{3}$$

$$B_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{t} \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) H_j(\mathbf{y}, s) ds\,, \tag{4}$$

[2]Мы используем общепринятые индексные обозначения и правила их использования для векторных и тензорных величин. Далее, все нижние индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Кроме того, должна быть задана связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ с нолями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так как эта плотность не является полностью независимым внешним источником в уравнениях (1). При тех же предположениях, что и выше, эта связь записывается следующим образом:

$$j_k(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{t} \hat{\sigma}_{kl}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s) E_l(\mathbf{y},s) ds + \tilde{j}_k(\mathbf{x},t)\,. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{j}}$ является источником электромагнитных волн. В рассматриваемом нами случае, этот источник имеет флуктуационное происхождение и, следовательно, носит стохастический характер. Среднее значение флуктуаций тока будем считать равным пулю $\langle\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)\rangle = 0$, где угловые скобки здесь и далее будут обозначать усреднение но распределению вероятностей тепловых флуктуаций.

Для диэлектрической среды, исследуемой в настоящей работе, мы будем считать, что эффекты пространственной и временной дисперсии среды носят несущественный характер. Поэтому, в указанных интегральных преобразованиях, ядра $\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x},t)$, $\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x},t)$, $\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},t)$ пропорциональны $\delta(t)\delta(\mathbf{x})$. Кроме того, среду полагаем локально пространственно-изотропной, то есть тензорная структура этих ядер имеет тривиальный характер. Таким образом,

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x},t) = \varepsilon\, \delta_{ij}\, \delta(\mathbf{x})\, \delta(t-0)\,, \quad \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x},t) = \mu\, \delta_{ij}\, \delta(\mathbf{x})\, \delta(t-0)\,, \quad \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},t) = \sigma\, \delta_{ij}\, \delta(\mathbf{x})\, \delta(t-0)\,. \tag{6}$$

В этих условиях материальные уравнения (3-5) принимают вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,,$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)\,, \tag{7}$$

где ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, соответственно, а σ – некоторая эффективная проводимость, которая определяется конструируемой нами моделью стохастического электромагнитного ноля, имеющего тепловое происхождение.

В дальнейшем, нам построение математической модели флуктуационного электромагнитного поля будут основаны на пространственных фурье-компонентах физических величин. В связи с этим, введем фурье-компоненты плотностей электрических заряда и тока

$$\bar{\rho}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,, \quad \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,,$$

его флуктуационной части

$$\bar{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,,$$

а также, – фурье-компоненты электрического и магнитного нолей

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,, \quad \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

и электрической и магнитной индукций

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,, \quad \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{B}(\mathbf{x},t) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,.$$

Тогда уравнения Максвелла (1-4), для фурье-компонент, принимают вид

$$\frac{\varepsilon}{c}\dot{\bar{\mathbf{E}}} + \frac{4\pi}{c}(\sigma\bar{\mathbf{E}} + \tilde{\bar{\mathbf{j}}}) = i[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}]\,, \quad (\mathbf{k},\bar{\mathbf{E}}) = -\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\,, \tag{8}$$

$$\frac{\mu}{c}\dot{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t) = -i[\mathbf{k},\bar{\mathbf{E}}]\,, \quad (\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}) = 0\,. \tag{9}$$

Кроме того, из уравнения непрерывности (2) электрического заряда следует

$$\dot{\bar{\rho}} + i(\mathbf{k},\bar{\mathbf{j}}) = 0$$

или, после подстановки выражения

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k},t) = \sigma\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) + \tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)\,, \tag{10}$$

следующего из (7), получаем

$$\dot{\tilde{\bar{\rho}}} + \gamma\tilde{\bar{\rho}} + i(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{j}}}) = 0\,, \tag{11}$$

где

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = \gamma > 0\,.$$

В силу вещественности всех пространственно-распределенных физических характеристик, их фурье-компоненты обладают свойствами

$$\tilde{\bar{E}}_l^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{E}}_l(-\mathbf{k},t)\,, \quad \tilde{\bar{H}}_l^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{H}}_l(-\mathbf{k},t)\,,$$

$$\tilde{\bar{D}}_l^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{D}}_l(-\mathbf{k},t)\,, \quad \tilde{\bar{B}}_l^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{B}}_l(-\mathbf{k},t)\,;$$

$$\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{\rho}}(-\mathbf{k},t)\,, \quad \tilde{\bar{j}}_l^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{j}}_l(-\mathbf{k},t)\,.$$

Построение математической модели стохастического электромагнитного поля завершается определением векторного случайного процесса $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ В настоящей работе мы принимаем простейшую модель. А именно, мы будем считать, что имеется случайное комплекснозначное гауссовское поле векторное поле $\tilde{\psi}_l(\mathbf{k})$, $l = 1,2,3$ на пространстве волновых векторов $\mathbf{k}$ с нулевым средним значением. Выбор в пользу модели гауссовского случайного поля связан с тем, что оно является хорошей (с точки зрения близости вычисляемых на ее основе значений средних физических величин) моделью при малости случайных флуктуаций.

Комплекснозначное гауссовское случайное поле с нулевым средним полностью характеризуется парой корреляционных функций

$$K_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \langle\tilde{\psi}_l(\mathbf{k})\tilde{\psi}_m^*(\mathbf{k}')\rangle\,, \qquad L_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \langle\tilde{\psi}_l(\mathbf{k})\tilde{\psi}_m(\mathbf{k}')\rangle\,.$$

Потребуем, чтобы фурье-преобразование этого поля было вещественным с вероятностью единица. Это означает, что с вероятностью единица для каждой реализации выполняется соотношение $\psi_l^*(\mathbf{k}) = \psi_l(-\mathbf{k})$ для любого волнового вектора $\mathbf{k}$. Это требование приводит к тому, что

$$K_{lm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = L_{lm}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}')\,,$$

и поэтому такое случайное комплекснозначное поле полностью определяется только одной корреляционной функцией, в качестве которой мы далее примем функцию $K_{lm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$.

Мы принимаем в этой работе модель случайного процесса $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k}, t)$, которая определяется формулой

$$\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k}, t) = \varphi(t)\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})\,, \tag{12}$$

где символом $\varphi(t)$ мы обозначаем обобщенный случайный процесс «белого шума», определяющего временну́ю зависимость. При таком определении, случайные зависимости от времени и от пространственных переменных (представленных волновыми векторами $\mathbf{k}$) статистически независимы. При этом, так как на случайное гауссовское поле $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$ с нулевым средним значением на пространстве волновых векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ не накладывается никаких ограничений, и поэтому, в общем случае, $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$ и $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$ – статистически зависимые гауссовские поля. В частном случае модель флуктуационного тока можно упростить, положив эти вещественные случайные поля статистически независимыми.

Независимость временно́й зависимости от пространственной в принятой модели для плотности флуктуационного электрического тока оправдывается тем, что при исследовании тепловых электромагнитных колебаний представляет интерес область малых длин волн, соответствующая видимым световым волнам и инфракрасной области спектра, где сосредоточены волны в интересующем нас диапазоне температур. Тогда типичные значения волновых векторов $\mathbf{k}$ для волн испускаемых флуктуационным источником таковы, что $|\mathbf{k}|^{-1}$ намного превосходят среднее расстояние между атомами, на котором формируются тепловые флуктуации заряда в среде. В этой ситуации за период колебаний теплового излучения, распространяемого внутри среды, совершается очень большое число тепловых колебаний атомов, формирующих временну́ю зависимость флуктуационного источника.

Подстановка выражения (12) в (11) дает стохастическое уравнение, определяющее случайный процесс флуктуаций заряда

$$\dot{\tilde{\tilde{\rho}}} + \gamma\tilde{\tilde{\rho}} + i\varphi(t)(\mathbf{k}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})) = 0\,,$$

которое показывает, что заряд представляет собой комплекснозначный элементарный гауссовский процесс по времени t (если $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})) \neq 0$ тождественно, т.е. не равен нулю продольный флуктуационный ток), реальная и мнимая части которого статистически зависимы или независимы, в зависимости от того, зависимы или независимы статистически реальная и мнимая части случайного поля $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$. Причем временна́я и пространственная зависимости статистически независимы. Временная зависимость определяется интегралом с дифференциалом $\varphi(t)dt = dw(t)$ по винеровскому процессу,

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k},t) = e^{-\gamma t}\tilde{\rho}(\mathbf{k},0) - i(\mathbf{k},\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}))\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}\varphi(s)ds\,.$$

При $t\to\infty$ случайный процесс $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$ приближается комплекснозначным стационарным марковским гауссовским процессом, аналогичным известному процессу Орнштейна-Уленбека.

Заметим, что динамическое уравнение для заряда согласуется с условием $\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k},t) = \tilde{\bar{\rho}}(-\mathbf{k},t)$.

Задание распределения вероятностей случайного процесса $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$, вместе с распределением вероятностей начальных состояний компонент электромагнитного поля полностью определяет стохастическое электромагнитное поле. Так как случайный процесс $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ является гауссовским, то, в силу линейности связей (8, 9, 10) между его компонентами и компонентами электромагнитного поля, стохастическое электромагнитное поле является также гауссовским. Наконец, так как процесс $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t)$ обладает нулевым средним значением, то стохастическое электромагнитное поле также обладает нулевыми средними значениями для электрической и магнитной составляющих $\langle \bar{E}_j(\mathbf{k},t)\rangle = 0$, $\langle \bar{H}_j(\mathbf{k},t)\rangle = 0$, $j = 1,2,3$, если их начальные состояния имеют нулевые средние значения. В дальнейшем, Нашей задачей является вычисление корреляционных функций $\langle \bar{E}_j(\mathbf{k},t)\bar{E}'_{j'}(\mathbf{k}',t)\rangle$, $\langle \bar{H}_j(\mathbf{k},t)\bar{H}'_{j'}(\mathbf{k}',t)\rangle$, $\langle \bar{E}_j(\mathbf{k},t)\bar{H}'_{j'}(\mathbf{k}',t)\rangle$, $j,j' = 1,2,3$ таким образом определенного стохастического электромагнитного поля, которые его полностью характеризуют.

3. Траектории случайного процесса $\langle \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t),\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)\rangle$. Вычисление корреляционных функций электромагнитного поля, подчиняющегося уравнениям (8),(9), в нашем случае, ввиду постоянства коэффициентов в системе уравнений (8),(9), наиболее просто выполнить, решив эволюционные уравнения для полей $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$. Здесь мы решим эту задачу, чтобы впоследствии завершить стохастического электромагнитного поля в диэлектрической среде. Неудобством при решении уравнений является наличие требования на поперечные составляющую поля $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$ (второе уравнение в (8)). С целью устранения этого положения, введем поле

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) + i\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)\,, \qquad (13)$$

которое уже будет поперечным,

$$(\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}) = (\mathbf{k},\bar{\mathbf{E}}) + \frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}} = 0\,. \qquad (14)$$

Так как из (8) следует, то

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} + \gamma\bar{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\tilde{\bar{\mathbf{j}}} = i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}]\,,$$

и, следовательно,

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \dot{\bar{\mathbf{E}}} + \frac{4\pi i}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\dot{\tilde{\bar{\rho}}} = -\gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + i\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}\right) + i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\mathbf{H}}] - \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp\,,$$

где введена функция $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k}, t)$, которая представляет фурье-компоненты плотности *поперечного флуктуационного тока*,

$$\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp = \tilde{\bar{\mathbf{j}}} - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}(\mathbf{k}, \tilde{\bar{\mathbf{j}}}). \tag{15}$$

Тогда система уравнений для пары полей $\bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\mathbf{H}}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \gamma\bar{\mathbf{F}} &= i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\mathbf{H}}] - \frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp\,, \\ \dot{\bar{\mathbf{H}}} &= -i\frac{c}{\mu}[\mathbf{k}, \bar{\mathbf{F}}]\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Она допускает уже решение в пространстве пар поперечных полей $\langle\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{H}}\rangle$, для которых имеют место $(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, t)) = 0$, $(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, t)) = 0$.

Запишем систему (16) в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{F}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{H}}} \end{pmatrix} = \mathsf{G}\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ \bar{\mathbf{H}} \end{pmatrix} - \frac{4\pi}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где 6×6-матрица G имеет следующий блочный вид

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} -\gamma\mathbf{1} & i\frac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k}, \cdot\,] \\ -i\frac{c}{\mu}[\,\mathbf{k}, \cdot\,] & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

($\mathbf{1}$ обозначает единичную 3×3-матрицу).

Введя матрицу $\mathsf{S}(t)$ эволюции системы

$$\mathsf{S}(t) = \exp\left(\mathsf{G}t\right),$$

которая имеет 3×3-блочную структуру

$$\mathsf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^{(E)}(t) & \mathsf{S}^{(EH)}(t) \\ \mathsf{S}^{(HE)}(t) & \mathsf{S}^{(H)}(t) \end{pmatrix},$$

запишем решение системы (17) в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t) \\ \bar{\mathbf{H}}(t) \end{pmatrix} = \mathsf{S}(t)\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_0 \\ \bar{\mathbf{H}}_0 \end{pmatrix} - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathsf{S}(t-s)\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k}, s) \\ 0 \end{pmatrix} ds\,.$$

Матрицу $\mathsf{S}(t)$ мы вычислим косвенным образом. Сначала получим из системы (16) эволюционное однородное уравнение только для поля $\mathbf{F}(\mathbf{k},t)$, затем найдем его общее решение и вычислим функцию $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ и, наконец, на основании этих двух функцию, определяющих общее решение однородной системы уравнений, которая получается из (17) обращением в нуль $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp$, найдем выражение для матрицы $\mathsf{S}(t)$.

Продифференцируем первое уравнение системы (17) по t. Воспользовавшись вторым уравнением (17) и условием поперечности поля $\bar{\mathbf{F}}$, получим уравнение второго порядка для $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)$,

$$\ddot{\bar{\mathbf{F}}} + \gamma\dot{\bar{\mathbf{F}}} + a^2\mathbf{k}^2\bar{\mathbf{F}} = 0\,, \quad a = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,. \tag{19}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) = \bar{\mathbf{F}}_+ \exp\left(r_+ t\right) + \bar{\mathbf{F}}_- \exp\left(r_- t\right), \tag{20}$$

в котором

$$r \equiv r(\mathbf{k}) = \left(\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - a^2\mathbf{k}^2\right)^{1/2}, \qquad r_\pm \equiv r_\pm(\mathbf{k}) = -\frac{\gamma}{2} \pm r\,.$$

В формуле (19) $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$ – произвольные поперечные векторы. Из условия $\left(\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}(t)\right) = 0$ при всех $t \geq 0$ следует, что эти векторы поперечные $\left(\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_\pm\right) = 0$.

Подставляя общее решение (19) в

$$i\frac{\varepsilon}{c\mathbf{k}^2}[\,\mathbf{k},\dot{\bar{\mathbf{F}}} + \gamma\bar{\mathbf{F}}] = \bar{\mathbf{H}}\,,$$

получим

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = i\frac{\varepsilon}{c\mathbf{k}^2}\left(r_-[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_+]e^{r_+ t} + r_+[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_-]e^{r_- t}\right), \tag{21}$$

где мы воспользовались тождествами $r_\pm + \gamma = r_\mp$.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выразить векторы $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$ через начальные данные $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},0) \equiv \bar{\mathbf{F}}_0$, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},0) \equiv \bar{\mathbf{H}}_0$. Полагая в (19) и (21) $t = 0$, получим систему уравнений для векторов $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$,

$$\bar{\mathbf{F}}_0 = \bar{\mathbf{F}}_+ + \bar{\mathbf{F}}_-\,, \qquad -i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0 = r_-[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_+] + r_+[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_-]\,.$$

Так как $[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0] = [\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_+] + [\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_-]$, то из этой системы находим

$$[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_\pm] = \pm\frac{1}{2r}\left[r_\pm[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0\right], \tag{22}$$

где мы воспользовались тождеством $r_+ - r_- = 2r$. Умножим векторно на $\mathbf{k}$ полученные выражения и воспользуемся поперечностью векторов $\bar{\mathbf{F}}_+$, $\bar{\mathbf{F}}_-$. В результате, получим

$$\bar{\mathbf{F}}_\pm = \pm\frac{1}{2r}\left[r_\pm\bar{\mathbf{F}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0]\right]. \tag{23}$$

Подстановка выражений (22) и (23) в (20) и (21) дает нам окончательные выражения для полей $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)$ и $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ в зависимости их от начальных данных,

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{2r}\Big((r_+\bar{\mathbf{F}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0])\exp\left(r_+t\right) - (r_-\bar{\mathbf{F}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0])\exp\left(r_-t\right)\Big), \tag{24}$$

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = -\frac{i\varepsilon}{2rc\mathbf{k}^2}\Big(r_-\left(r_+[\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0\right)\exp\left(r_+t\right) - r_+\left(r_-[\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\mathbf{H}}_0\right)\exp\left(r_-t\right)\Big). \tag{25}$$

Полученные выражения представим в пространстве пар векторов $\langle\bar{\mathbf{F}},\bar{\mathbf{H}}\rangle$,

$$\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)\\ \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)\end{pmatrix} = \frac{1}{2r}\left[\exp\left(r_+t\right)\begin{pmatrix} r_+\bar{\mathbf{F}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0] \\ r_-\bar{\mathbf{H}}_0 - i\frac{\varepsilon a^2}{c}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0]\end{pmatrix} - \exp\left(r_-t\right)\begin{pmatrix} r_-\bar{\mathbf{F}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{H}}_0] \\ r_+\bar{\mathbf{H}}_0 - i\frac{\varepsilon a^2}{c}[\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}}_0]\end{pmatrix}\right],$$

где мы воспользовались тождеством $r_+r_- = a^2\mathbf{k}^2$. Отсюда следует, что матрица эволюции $\mathsf{S}(t) = \exp(\mathsf{G}t)$ определяется следующие ее действием на вектор $\langle\bar{\mathbf{F}}_0,\bar{\mathbf{H}}_0\rangle$:

$$\exp\left(\mathsf{G}t\right)\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{F}}_0\\ \bar{\mathbf{H}}_0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2r}\left[\exp\left(r_+t\right)\begin{pmatrix} r_+\mathbf{1} & -i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\cdot] \\ -i\frac{\varepsilon a^2}{c}[\mathbf{k},\cdot] & r_-\mathbf{1}\end{pmatrix} + \exp\left(r_-t\right)\begin{pmatrix} -r_-\mathbf{1} & i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\cdot] \\ i\frac{\varepsilon a^2}{c}[\mathbf{k},\cdot] & -r_+\mathbf{1}\end{pmatrix}\right].$$

Выпишем теперь 3×3-блоки эволюционной матрицы $\mathsf{S}(t)$:

$$\mathsf{S}^{(E)}(t) = \frac{1}{2r}\Big(r_+\exp\left(r_+t\right) - r_-\exp\left(r_-t\right)\Big)\mathbf{1}, \tag{26}$$

$$\mathsf{S}^{(H)}(t) = \frac{1}{2r}\Big(r_-\exp\left(r_+t\right) - r_+\exp\left(r_-t\right)\Big)\mathbf{1}, \tag{27}$$

$$\mathsf{S}^{(EH)}(t) = -\frac{ic}{2r\varepsilon}\Big(\exp\left(r_+t\right) - \exp\left(r_-t\right)\Big)[\mathbf{k},\cdot\,], \quad \mathsf{S}^{(HE)}(t) = \left(\frac{a\varepsilon}{c}\right)^2\mathsf{S}^{(EH)}(t). \tag{28}$$

4. Выводы. Мы построили, по нашему мнению, простейшую стохастическую динамическую модель генерации стохастического электромагнитного поля, осуществляющего радиационно-кондуктивный перенос тепла в конденсированной среде. В этой части работы нами были вычислены в явном виде траектории случайного процесса, соответствующего этой модели. При этом мы не упрощали ситуацию заведомо, а проводили вычисления в наиболее общем виде, допускаемым моделью. Так, в простейшей ситуации, можно положить, что продольный флуктуационный ток равен нулю, так как его наличие не соответствует описанию реальной физической ситуации. В этом случае $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$. Кроме того, естественно с физической точки зрения положить, что реальная и мнимая части плотности флуктуационного тока статистически независимы. В следующей части работы мы вычислим корреляционные функции стохастического электромагнитного поля, в рамках построенной модели.

Литература

1. Борн М. Атомная физика/ М.: Мир, 1965 - 492с.
2. Планк М. О законе распределения энергии в нормальном спектре // Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.259-267.
3. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.- М.: Изд. АН СССР, 1953.
4. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля/ С.М. Рытов.- М.: Наука, 1978.- 464с.
5. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2009. - 5(60);16. – С.47-67.
6. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Построение гауссовской флуктуационной модели равновесного теплового излучения // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.144-156.
7. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Доповіді НАНУ. – 2010. – 12. – С.63-69.

STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELDS IN DIELECTRIC MEDIUM. 1. MODEL CONSTRUCTION

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The stochastic model that describes random electromagnetic field in dielectrics caused by heat fluctuations in them is built. This field is gaussian. Evolutions equations of the system are Maxwell's ones with additive noise. The noise is determined by charge fluctuations in the medium. They are caused by thermal oscillations of dielectric medium atoms.

Key words: stochastic electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell's equations, stochastic model, correlation function.