MSC 11P32

# ТЕРНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

***С.А. Гриценко, **Н.Н. Мотькина**

*Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, Россия, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

**Аннотация.** В работе решается вариант тернарной проблемы Гольдбаха с простыми числами $p$, такими, что $a < \{\eta p\} < b$, где $a$ и $b$ — произвольные числа из интервала $[0,1]$, $\eta$ — квадратичная иррациональность.

**Ключевые слова:** аддитивные задачи, простые числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность.

**1. Введение.** Тернарная проблема Гольдбаха — это задача о числе решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \tag{1}$$

в простых числах $p_1, p_2, p_3$ для нечетного $N$, большего пяти. Обозначим количество решений задачи $I_{3,1}(N)$. В 1937 г. И.М. Виноградов получил асимптотическую формулу [1], а именно доказал, что:

$$I_{3,1}(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\Big(\frac{N^2}{(\log N)^4}\Big)\,,$$

$$\sigma(N) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\Big)\prod_{p|N}\Big(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\Big) > 1\,.$$

В настоящей работе решается вариант тернарной проблемы Гольдбаха с простыми числами, на которые наложены ограничения.

Пусть $N$ — достаточно большое нечетное натуральное число, $\eta$ — квадратичная иррациональность, $a$ и $b$ — произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0,1]$. Обозначим $J_{3,1}(N)$ число решений уравнения (1) в простых числах $p_i$, удовлетворяющих условию $a < \{\eta p_i\} < b$, $i = 1, 2, 3$. Для $J_{3,1}(N)$ нами получена приближенная формула. Результат работы содержится в следующем утвереждении.

**Теорема 1.** *Для любого фиксированного положительного $C$ справедливо равенство*

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma(N,a,b) + O(N^2 \log^{-C} N)\,,$$

где

$$\sigma(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N-1,5(a+b))}\frac{\sin^3\pi m(b-a)}{\pi^3m^3}.$$

Заметим, что полученная формула будет асимптотической при большом нечетном $N$ и $b-a>\sqrt[3]{2\zeta(3)}/\pi>0,42$. Если неравенство не выполняется, то мы не можем утверждать, что сумма ряда $\sigma(N,a,b)$ отлична от нуля.

**2. Вспомогательные утверждения.**

**Лемма 1** ( [2], с. 22). *Пусть $r$ — натуральное число, $\alpha$ и $\beta$— вещественные числа, $0<\Delta<1/4$, $\Delta\le\beta-\alpha\le 1-\Delta$. Тогда существует периодическая с периодом 1 функция $\psi(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$\psi(x)=1$ в промежутке $\alpha+\Delta/2\le x\le\beta-\Delta/2$,*
2. *$0<\psi(x)<1$ в промежутках $\alpha-\Delta/2<x<\alpha+\Delta/2$ и $\beta-\Delta/2<x<\beta+\Delta/2$,*
3. *$\psi(x)=0$ в промежутке $\beta+\Delta/2\le x\le 1+\alpha-\Delta/2$,*
4. *$\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x)=\beta-\alpha+\sum_{0<|m|<\infty}c(m)e^{2\pi i m x},$$

где

$$|c(m)|\le\min\left(\beta-\alpha,\frac{1}{\pi|m|}\ ,\quad \frac{1}{\pi|m|}\Big(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\Big)^r\right).$$

**Лемма 2** ( [3], с. 158). *Пусть $\tau\ge 1$, $\alpha$ — вещественное число. Тогда существуют целые взаимно простые числа $a$ и $q$, $1\le q\le\tau$, такие, что*

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q\tau}.$$

**Лемма 3** ( [4], с. 264). *Для любого действительного алгебраического числа $\alpha$ степени $n$ можно подобрать положительное $c$, зависящее только от $\alpha$, такое, что для всех рациональных чисел $a/b$ $(a/b\ne\alpha)$ будет иметь место неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\ge\frac{c}{b^n}.$$

**Лемма 4** ( [3], с. 29). *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, $c_n$ — произвольные комплексные числа,*

$$\mathbb{C}(x)=\sum_{a<n\le x}c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\le b} c_n f(n) = -\int_a^b \mathbb{C}(x)f'(x)dx + \mathbb{C}(b)f(b)\,.$$

**Лемма 5** ( [5], с. 62). *Пусть $1 \le U \le N$, где $N$ — натуральное число. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество*

$$\sum_{U<n\le N} \Lambda(n)f(n) = W_1 - W_2 - W_3\,,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{l\le Nd^{-1}}(\log l)f(ld)\,,$$

$$W_2 = \sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{n\le U}\Lambda(n)\sum_{r\le N(dn)^{-1}} f(ndr)\,,$$

$$W_3 = \sum_{U<m\le NU^{-1}}\Bigl(\sum_{\substack{d|m,\\ d\le U}}\mu(d)\Bigr)\sum_{U<n\le Nm^{-1}}\Lambda(n)f(nm)\,.$$

**Лемма 6** ( [3], с. 94). *При $P \ge 1$ имеет место оценка*

$$\Bigl|\sum_{x\le P} e^{2\pi i\alpha x}\Bigr| \le \min(P;\ 0.5\|\alpha\|^{-1})\,.$$

**Лемма 7** ( [3], с. 95). *Пусть $u_\nu, v_\nu \ge 0$. Тогда*

$$\Bigl(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu v_\nu\Bigr)^2 \le \Bigl(\sum_{\nu=1}^{P} u_\nu^2\Bigr)\Bigl(\sum_{\nu=1}^{P} v_\nu^2\Bigr)\,.$$

**Лемма 8** ( [6]). *При $N, k \ge 2$ и натуральном $l$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n\le N}(\tau_k(n))^l \le c(k,l)N(\log N + 1)^{k^l-1}\,.$$

**Лемма 9** ( [7], с. 35). *Предположим, что $(a,q)=1$, $q\le N$ и $|\alpha - a/q| \le q^{-2}$. Тогда*

$$\sum_{p\le N} e^{2\pi i\alpha p}\log p \ll (\log N)^4(Nq^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}q^{1/2})\,.$$

**3. Доказательство теоремы. 1.** Функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < x < b, \\ 0\,, & \text{если } 0 \le x \le a \text{ или } b \le x \le 1 \end{cases}$$

продолжим периодически на всю числовую ось с периодом 1. Пусть

$$S_0(x) = \sum_{p \le N} \psi_0(\eta p) e^{2\pi i x p}\,,$$

тогда число решений уравнения (1) в простых числах $p_i$, удовлетворяющих условию $a < \{\eta p_i\} < b$, $i = 1, 2, 3$, равно

$$J_{3,1}(N) = \int_0^1 S_0^3(x) e^{-2\pi i x N} dx\,.$$

В лемме о «стаканчиках» И.М. Виноградова (лемма 1) выберем $r = [\log N]$, $\Delta = \log^{-1,5C} N$. При выборе $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ функцию $\psi$ из леммы о «стаканчиках» обозначим как $\psi_1$, $\alpha$ и $\beta$ — как $\alpha_1$ и $\beta_1$, соответственно. Положив $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, соответствующую функцию $\psi$ обозначим $\psi_2$, $\alpha$ и $\beta$ — как $\alpha_2$ и $\beta_2$, соответственно.

Определим

$$J_k(N) = \int_0^1 \Big( \sum_{p \le N} \psi_k(\eta p) e^{2\pi i x p} \Big)^3 e^{-2\pi i x N} dx\,, \quad k = 1, 2\,. \tag{2}$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует:

$$J_1(N) \le J_{3,1}(N) \le J_2(N)\,.$$

Для $J_1(N)$ и $J_2(N)$ выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы.

В представлении функции $\psi_k(\eta p)$ рядом Фурье

$$\psi_k(\eta p) = \sum_{|m| < \infty} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p}$$

оценим сумму при $|m| > r\Delta^{-1}$. Из леммы 1 о «стаканчиках» Виноградова имеем

$$\sum_{|m| > r\Delta^{-1}} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p} \ll \sum_{|m| > r\Delta^{-1}} \frac{1}{\pi |m|} \Big( \frac{r}{\pi |m| \Delta} \Big)^r \ll \frac{1}{\pi^{r+1}} < N^{-\log \pi}\,.$$

Разложение в ряд Фурье функции $\psi_k(\eta p)$

$$\psi_k(\eta p) = \sum_{|m| \le r\Delta^{-1}} c_k(m) e^{2\pi i m \eta p} + O(N^{-\log \pi})$$

подставим в (2):

$$J_k(N) = \int_0^1 \Big( \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k(m) \sum_{p\le N} e^{2\pi i(x+m\eta)p} \Big)^3 e^{-2\pi i x N} dx + O(N^{2-\log\pi})$$

$$= \sum_{|m_1|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_2) \sum_{|m_3|\le r\Delta^{-1}} c_k(m_3) \int_0^1 \sum_{p_1\le N} e^{2\pi i(x+m_1\eta)p_1}$$

$$\times \sum_{p_2\le N} e^{2\pi i(x+m_2\eta)p_2} \sum_{p_3\le N} e^{2\pi i(x+m_3\eta)p_3} e^{-2\pi i x N} dx + O(N^{2-\log\pi}) .$$

**2.** При $m_1 = m_2 = m_3 = m$ рассмотрим

$$I_1(N) = \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m\eta N} \sum_{p_1\le N} \sum_{p_2\le N} \sum_{p_3\le N} \int_0^1 e^{2\pi i(x+m\eta)(p_1+p_2+p_3-N)} dx .$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична по $x$ с периодом 1, получим

$$I_1(N) = I_{3,1}(N) \sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m\eta N} .$$

Промежуток суммирования по $m$ разобьем на два промежутка: $|m| < M$ и $M \le |m| \le r\Delta^{-1}$. На втором промежутке сумму оценим тривиально, используя известные оценки для коэффициентов Фурье (лемма 1):

$$\sum_{M\le|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m\eta N} = O(M^{-2}) .$$

Поскольку при $m \ne 0$ ( [3], с. 16)

$$c_k(m) = i\, \frac{e^{-2\pi i m\beta_k} - e^{-2\pi i m\alpha_k}}{2\pi m} \Big( \frac{e^{\pi i m\Delta/r} - e^{-\pi i m\Delta/r}}{2\pi i m\Delta/r} \Big)^r$$

или после преобразования

$$c_k(m) = e^{-\pi i m(\alpha_k+\beta_k)} \frac{\sin \pi m(\beta_k - \alpha_k)}{\pi m} \Big( \frac{\sin \pi m\Delta/r}{\pi m\Delta/r} \Big)^r ,$$

то для $0 < |m| < M$

$$c_k^3(m) = e^{-3\pi i m(a+b)} \frac{\sin^3 \pi m(b-a) + O(M\Delta)}{\pi^3 m^3} \Big( 1 + O\Big(M\Delta\Big)^2 \Big) =$$

$$= e^{-3\pi i m(a+b)} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3} \Big( 1 + O(M\Delta) \Big) .$$

Тогда

$$\sum_{|m|\le r\Delta^{-1}} c_k^3(m) e^{2\pi i m\eta N} =$$

$$= \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1{,}5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3} + O(M\Delta) + O(M^{-2}) .$$

При выборе $M = \Delta^{-1/3}$ получим

$$I_1(N) = I_{3,1}(N)(\sigma(N,a,b) + O(\Delta^{2/3})) .$$

**3.** Если среди $m_1, m_2, m_3$ есть два не равных друг другу числа, то допустим, что $m_1 < m_2$. Рассмотрим

$$I(N, m_1, m_2, m_3) = \int_0^1 |S(x+m_1\eta)||S(x+m_2\eta)||S(x+m_3\eta)|dx ,$$

где

$$S(x) = \sum_{p\le N} e^{2\pi i x p} .$$

Сделаем замену $t = x + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по $t$ с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1-1/\tau)$, где $\tau = N\log^{-B} N$, $B > 2C+8$.

По теореме Дирихле (лемма 2) о приближении действительных чисел рациональными числами $t$ представимо в виде

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau}, \quad (d,q)=1, \quad 1 \le q \le \tau , \quad |\theta_1| \le 1 . \tag{3}$$

Промежуток интегрирования по $t$ разобьем на два непересекающихся множества: $E_1$ — «большие» дуги и $E_2$ — «малые» дуги. На «больших» дугах $E_1$ в разложении (3) выберем $q \le \log^A N$, где $A$ — фиксированное число, $A > 2C+8$. Тогда $E_2 = E \backslash E_1$.

Обозначим $m = m_2 - m_1$, $m' = m_3 - m_1$. Тогда

$$I(N, m_1, m_2, m_3) = \int_{E_1} F(t)dt + \int_{E_2} F(t)dt ,$$

где

$$F(t) = |S(t)||S(t+m\eta)||S(t+m'\eta)| .$$

**4.** Пользуясь неравенством Коши, оценим интеграл по множеству $E_1$, как

$$\int_{E_1} F(t)dt \ll \max_{t\in E_1} |S(t+m\eta)| \sqrt{\Big(\int_0^1 |S(t)|^2 dt\Big)^2} \ll \pi(N) \max_{t\in E_1} |S(t+m\eta)| .$$

Для интеграла по множеству $E_2$ получим оценку

$$\int_{E_2} F(t)dt \ll \pi(N) \max_{t\in E_2} |S(t)| .$$

**5.** Оцепим
$$\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)|$$
сверху. Для этого изучим рациональные приближения числа $t+m\eta$.

По теореме Дирихле (лемма 2)
$$\eta=\frac{A}{Q}+\frac{\theta}{Q\tau_1}\,,\quad (A,Q)=1,\quad |\theta|<1\,,\quad 1\le Q\le\tau_1\,. \tag{4}$$
Значение $\tau_1$ выберем позже.

Поскольку $\eta$ — квадратичная иррациональность, согласно теореме Лиувилля (лемма 3) имеем
$$\frac{c(\eta)}{Q^2}\le\left|\eta-\frac{A}{Q}\right|,\quad c(\eta)>0\,. \tag{5}$$
Из (4), (5) получаем
$$\frac{c(\eta)}{Q^2}\le\frac{1}{Q\tau_1}\,,$$
следовательно, $Q\asymp\tau_1$. Тогда
$$\eta=\frac{A}{Q}+\frac{\theta_2}{Q^2}\,,\quad |\theta_2|\le 1\,.$$

Для $t$, принадлежащих «большим» дугам $E_1$, рассмотрим $\gamma=t+m\eta$. Тогда
$$\gamma=\frac{d}{q}+\frac{A_1}{Q_1}+\frac{\theta_1}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}=\frac{X}{Y}+\frac{\theta_1}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}\,,$$
$$(A_1,Q_1)=1,\quad (X,Y)=1\,.$$
Поскольку
$$Y=\frac{qQ_1}{(dQ_1+A_1q,qQ_1)}\,, \tag{6}$$
то
$$Y\le qQ\,.$$
При выборе $\tau_1=\sqrt{\tau}$ выполняется
$$\frac{\theta_1}{q\tau}\ll\frac{1}{Q^2}\ll\left(\frac{q}{Y}\right)^2,$$
$$\left|\frac{\theta_1}{q\tau}+\frac{\theta_2 m}{Q^2}\right|=\frac{\theta_3}{Y^2},\quad |\theta_3|\le(1+|m|)q^2\,. \tag{7}$$

Обозначим $(dQ_1+A_1q,Q_1)$ как $\delta$, тогда $\delta|q$ и
$$(dQ_1+A_1q,qQ_1)\le q(dQ_1+A_1q,Q_1)=q\delta\le q^2\,. \tag{8}$$

Тогда из (6), (8) имеем

$$Y \geq \frac{Q_1}{q} \geq \frac{Q}{mq}\,. \tag{9}$$

**6.** К сумме $S(\gamma)$ применим интегральное преобразование Абеля (лемма 4):

$$S(\gamma) \ll |\mathbb{C}(N)|\frac{1}{\log N} + \int_2^N |\mathbb{C}(x)|\frac{dx}{x\log^2 x}\,,$$

где

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{p\leq N} e^{2\pi i\gamma p}\log p.$$

При выборе $U = N^{0,02}$ имеет место соотношение

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{U<n\leq N} e^{2\pi i\gamma n}\Lambda(n) + O(\sqrt{N})\,.$$

Действительно, оценивая тривиально разность этих сумм, имеем:

$$\sum_{\substack{p^k\leq N\\ k\geq 2}} \log p \leq \pi(\sqrt{N})\log N \ll \sqrt{N}$$

и

$$\sum_{n\leq U}\Lambda(n) = \psi(\sqrt{U}) \ll \sqrt{U}\,.$$

Для оценки тригонометрической суммы с функцией Мангольдта преобразуем ее согласно лемме 5:

$$\sum_{U<n\leq N} e^{2\pi i\gamma n}\Lambda(n) = W_1 - W_2 - W_3\,,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{l\leq Nd^{-1}}(\log l)e^{2\pi i\gamma dl}\,,$$

$$W_2 = \sum_{d\leq U}\mu(d)\sum_{n\leq U}\Lambda(n)\sum_{r\leq N(dn)^{-1}} e^{2\pi i\gamma dnr}\,,$$

$$W_3 = \sum_{U<m\leq NU^{-1}} a_m \sum_{U<n\leq Nm^{-1}}\Lambda(n)e^{2\pi i\gamma mn}\,,$$

$$a_m = \sum_{\substack{d|m,\\ d\leq U}}\mu(d)\,.$$

Из внутренней суммы $W_1$ с помощью формулы частного суммирования (лемма 4) вынесем множитель $\log l$. Учтем, что $|\mu(d)| \leq 1$, $\Lambda(n) \leq \log n$. Тогда

$$W_1, W_2 \ll \log N\sum_{d\leq U^2}\Big|\sum_{l\leq Nd^{-1}} e^{2\pi i\gamma dl}\Big|\,.$$

Пользуясь леммой об оценке модуля линейной тригонометрической суммы (лемма 6), получим

$$W_1, W_2 \ll \log N \sum_{d \le U^2} \min(Nd^{-1}, \|\gamma d\|^{-1}|) .$$

Согласно неравенствам (7), (9) для

$$\gamma d = \frac{Xd + \theta_3 d Y^{-1}}{Y}$$

имеем $|\theta_3 d Y^{-1}| < 0,5$. Полагая

$$r = \begin{cases} k, & \text{если } k \le Y/2, \\ Y - k, & \text{если } Y/2 < k \le Y, \end{cases}$$

где $k$ — наименьший неотрицательный вычет числа $Xd$ но модулю $Y$, имеем

$$W_1, W_2 \ll \log^2 N \sum_{0 < r \le Y/2} \frac{Y}{r - 0,5} \ll Y \log^3 N .$$

**7.** Перейдем к оценке суммы $W_3$. Суммы но $m$, $n$ разобьем каждую на $\ll \log N$ сумм с пределами, различающимися не более чем вдвое. Пусть

$$U < M \le NU^{-1}, \quad U < K \le NM^{-1}, \quad M_1 \le 2M, \quad K_1 \le 2K,$$

$$MK \le N .$$

Тогда

$$W_3 \ll |W_3(M,K)| \log^2 N ,$$

где

$$W_3(M,K) = \sum_{M < m \le M_1} a_m \sum_{K < n \le K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma m n} .$$

Возведем сумму $W_3(M,K)$ в квадрат, с помощью неравенства Коши (лемма 7) получим неравенство:

$$W_3(M,K)^2 \ll \Big( \sum_{M < m \le M_1} a_m^2 \Big) \sum_{M < m \le M_1} \Big| \sum_{K < n \le K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma m n} \Big|^2 .$$

Поскольку $a_m \le \tau(m)$, применяя лемму 8 к первой сумме, имеем

$$\sum_{M < m \le M_1} a_m^2 \ll M \log^3 N .$$

Для второй суммы

$$S(M,K) = \sum_{M < m \le M_1} \Big| \sum_{K < n \le K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma m n} \Big|^2 ,$$

раскрывая квадрат модуля, делая внутренним суммирование по $m$, получим

$$S(M,K) \ll \log^2 N \sum_{K<n_1,n_2\le K_1} \Big| \sum_{M<m\le M_2} e^{2\pi i\gamma m(n_1-n_2)} \Big| ,$$

где $M_2 = \min(M_1, N/n_1, N/n_2)$, и $n_1$ независимо от $n_2$ пробегает те же значения, что и $n_2$. При $n_1 = n_2$ внутренняя сумма равна $M_2 - M$, что даст оценку $\ll N\log^2 N$. В остальных случаях для оценки внутренней суммы применим лемму 6:

$$G(M,K) = \sum_{K<n_2<n_1\le K_1} \Big| \sum_{M<m\le M_2} e^{2\pi i\gamma m(n_1-n_2)} \Big| \ll$$

$$\ll \sum_{K<n_2<n_1\le K_1} \min(M, \|\gamma(n_1-n_2)\|^{-1}) \ll K \sum_{1\le h\le K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1}) .$$

Сумма по $h$ оценивается по аналогии, что и соответствующая сумма у И.М. Виноградова ( [3], с. 94). Поскольку условия леммы ( [3], с. 94, лемма VI.2.5) в рассматриваемом случае не выполняются, приводим все рассуждения. Пусть $h = h_1 + Ys$, $0 \le h_1 < Y$. Тогда

$$\gamma h = \gamma h_1 + \beta_1 = \frac{Xh_1 + [\beta_1 Y] + \theta_3 h_1 Y^{-1} + \{\beta_1 Y\}}{Y} ,$$

где $\beta_1 = \gamma Y s$.

$$\sum_{1\le h\le K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1} \ll \Big(\frac{K}{Y} + 1\Big) \sum_{0\le h_1<Y} \min\Big(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta_1\|}\Big) .$$

Делая замену $Z = Xh_1 + [\beta_1 Y]$, учитывая периодичность функции $\|x\|$ с периодом 1, имеем

$$\sum_{0\le h_1<Y} \min\Big(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta\|}\Big) \ll \sum_{|Z|\le 0{,}5Y} \min\Big(M, \frac{1}{\Big\|\frac{Z}{Y} + \frac{\theta_4(Z)}{Y}\Big\|}\Big) ,$$

где $|\theta_4(Z)| < 2|m|q^2$. Следовательно,

$$G(M,K) \ll$$

$$\ll K\Big(\frac{K}{Y} + 1\Big)\Big(M(4|m|q^2 + 2) + \sum_{2|m|q^2\le |Z|\le 0{,}5Y} \frac{Y}{|Z| - 2|m|q^2}\Big).$$

Учитывая, что $q \le \log^A N$, $|m| < \Delta^{-1}\log N$, имеем

$$G(M,K) \ll K\Big(\frac{K}{Y} + 1\Big)\Big(\frac{M}{\Delta} + Y\Big)\log^{1+2A} N \ll$$

$$\ll \Big(K^2 M\Big(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{M} + \frac{1}{K\Delta}\Big) + KY\Big)\log^{1+2A} N .$$

Тогда

$$W_3(M,K)^2 \ll M\log^3 N(N\log^2 N +$$

$$+K^2M\Big(\frac{1}{Y\Delta}+\frac{1}{M}+\frac{1}{K\Delta}\Big)+KY)\log^{3+2A}N).$$

Поскольку

$$U<M\le NU^{-1},\quad U<K\le NU^{-1},\quad MK\le N,$$

получаем

$$W_3(M,K)^2\ll\Big(N^2\Big(\frac{1}{Y\Delta}+\frac{1}{U}+\frac{1}{U\Delta}\Big)+NY\Big)\log^{6+2A}N.$$

Окончательно:

$$W_3\ll\Big(N\Big(\frac{1}{\sqrt{Y\Delta}}+\frac{1}{\sqrt{U}}+\frac{1}{\sqrt{U\Delta}}\Big)+\sqrt{NY}\Big)\log^{4+A}N.$$

При выборе параметров

$$U=N^{0,02},\quad \Delta=\log^{-1,5C}N,\quad \frac{Q}{mq}\le Y\le qQ,$$

$$1\le q\le\log^{A}N,\quad |m|<\log^{1+1,5C}N,\quad Q\asymp\sqrt{N\log^{-B}N}$$

убеждаемся, что для $|W_3|$ получена требуемая оценка.

**8.** По лемме 9 имеем

$$\max_{t\in E_2}|S(t)|\ll\log^4N(N\log^{-A/2}N+N^{4/5}+N^{1/2}\tau^{1/2}).$$

Собирая вместе полученные оценки, имеем утверждение теоремы.

## Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. –1937. –15. – С. 169-172.
2. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.
3. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983. – 240 с.
4. Бухштаб А.А. Теория чисел / М.: Просвещение, 1966. –384 с.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
6. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. – 1939. – 22;1. – С. 391-393.
7. Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда / М.: Мир, 1985. – 184 с.

## TERNARY GOLDBACH'S PROBLEM WITH PRIMES OF A SPECIAL TYPE

*S.A. Gritsenko, **N.N. Motkina

*Financial University of Russian Federation Government,
Leningradsky Av., 49, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, 1, Moscow, Russia, e-mail: s.gritsenko@gmail.com
**Belgorod State University,
Pobedy St., 85, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: motkina@bsu.edu.ru

**Abstract.** Let $\eta$ be a quadratic irrationality. The variant of ternary Goldbach's problem involving primes such that $a < \{\eta p\} < b$ where $a$ and $b$ are arbitrary numbers in the interval $[0, 1]$ is solved.

**Key words:** additive problems, primes of special type, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality.