MSC 76N15, 76M45

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ С МАЛОЙ СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ

Н.Н. Самойлова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Предлагается конструкция асимптотических разложений общего решения стационарного уравнения Навье-Стокса при нулевой вязкости, слабо отличающихся от потенциальных течений.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, стационарные задачи, разложение Гельмгольца, потенциальное течение, асимптотические разложения.

1. Введение. Система дифференциальных уравнений газодинамики без учета теплопереноса состоит из уравнения Навье-Стокса [1]

$$\dot{u}_j + (\mathbf{u}, \nabla)u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta\nabla)u_j \,, \quad j = 1, 2, 3\,; \qquad (1)$$

и уравнения непрерывности ‡)

$$\dot{\rho} + (\nabla, \rho\mathbf{u}) = 0\,, \qquad (2)$$

в которых коэффициенты вязкости μ, η и давление P, в общем случае, являются функциями плотности ρ. Забегая вперед укажем, что мы будем в настоящем сообщении полагать μ и η равными нулю, что допустимо, как приближение, если газ обладает достаточно малой плотностью. Функцию $P(\rho)$, для целей решаемой задачи, мы не будем конкретизировать и вместо нее будем использовать функцию $g(\rho)$ такую, что $dP/\rho = dg$.

Известно, что даже для такой упрощенной формы системы уравнении (1), (2), в настоящее время, не имеется математических утверждений о разрешимости задачи Коши. В этой ситуации особую ценность приобретают асимптотические методы, в рамках которых удается контролировать точность приближенных решений [2]. Это положение имеет место и в частном случае, когда изучаются стационарные, не зависящие от времени t решения системы (1), (2). Следует признать, что для этого случая известна теорема существования решений, удовлетворяющих определенному типу граничных условий (см. [3]). Однако, по нашему мнению, математическая задача, анализируемая в ней, относится к гидродинамике несжимаемой жидкости и не совсем отвечает, по своей постановке, потребностям газодинамики с точки зрения приложения к исследованию конкретных физических ситуаций. Поэтому, даже относительно стационарных течений,

‡Далее везде жирными буквами мы обозначаем векторы в $\mathbb{R}^3$.

описываемых системой уравнений, которые получаются из (1), (2) обращением в нуль производных по времени

$$\nabla_j g + (\mathbf{u}, \nabla) u_j = (\mu + \eta)\Delta u_j + \frac{\mu}{3}\nabla_j(\nabla, \mathbf{u}), \quad j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

$$(\nabla g, \mathbf{u}) + (\nabla, \mathbf{u}) = 0, \tag{4}$$

в настоящее время, не имеется результатов о разрешимости соответствующих краевых задач в классическом смысле. В этом случае при решении конкретных газодинамических задач методы построения асимптотических разложений играют важную роль, так как позволяют находить аналитическую форму решений.

Наряду с отсутствием утверждений о разрешимости, укажем другую особенность проблемы изучения решений системы (3), (4). Исследование решений этой системы, даже в смысле построения асимптотических разложений ее решений, серьезно упрощается, если использовать предположение о потенциальности течений. В этом случае поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ищется в форме $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla\psi(\mathbf{x})$, что допустимо, физически, в том случае, когда течения оказываются очень медленными и применимо приближение с постоянными (независящими от ρ) коэффициентами вязкости μ и η. Очень часто предположение о потенциальности используется в практических расчетах. Однако, в условиях, когда в течениях газа появляется вихревая составляющая, даже построение асимптотических разложений решений системы (3), (4) вызывает затруднения. Это связано с тем, что, в соответствии со структурой уравнения (3), при наличии вихревой составляющей у поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, оно должно подчиняться условию градиентности:

$$\epsilon_{ijk}\nabla_j\Big[(\mathbf{u}, \nabla)u_k - (\mu + \eta)\Delta u_k\Big] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где ϵ_{ijk} – символ Леви-Чивитта.

Уравнение (5) мы будем называть *уравнением конвекции* и его исследованию при условии $\mu = \eta = 0$ посвящено настоящее сообщение. Мы укажем метод построения асимптотического разложения общего решения (безотносительно к граничным условиям) этого уравнения, когда поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

где $\mathbf{w}$ – постоянный вектор, а поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ является малым по сравнению с $|\mathbf{w}|$. Асимптотическое разложение будет строится по этому малому параметру.

2. Постановка задачи. Мы будем анализировать уравнение (5) при $\eta = \mu = 0$, которое в векторной форме имеет вид

$$[\nabla, (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}] = 0 \tag{6}$$

и, соответственно, в тензорной форме,

$$\epsilon_{ijk}\nabla_j u_l \nabla_l u_k = 0.$$

Уравнение второго порядка (6) эквивалентно уравнению первого порядка

$$(\nabla, \mathbf{u})\mathbf{u} = \nabla\varphi \tag{7}$$

с произвольной функцией $\varphi(\mathbf{x})$. Таким образом, общее решение уравнения (6) строится на основе общего решения уравнения (7) для каждой фиксированной функции $\varphi(\mathbf{x})$, которая, таким образом, является дополнительным «параметром» общего решение уравнения (6).

Для каждого решения уравнения (7) справедливо разложение Гельмгольца $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\psi$, в котором $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$, каждое слагаемое в котором определено с точностью до градиента гармонической функции. В случае $\mathbf{v} = 0$, на основе известных фактов теории уравнений с частными производными, строится общее уравнения (7), так как имеет место

$$(\nabla\psi, \nabla)\nabla\psi = \frac{1}{2}\nabla\Big(\nabla\psi\Big)^2.$$

В этом случае общее решение уравнения (7) сводится к решению уравнения эйконала следующего вида

$$\frac{1}{2}\Big(\nabla\psi\Big)^2 = \varphi\,,$$

из которого усматривается условие на существование потенциальных решений в виде условия неотрицательности функции $\varphi(\mathbf{x})$. Общее решение уравнения эйконала анализируется, например, в [4].

По указанной причине, имеет смысл исследовать общее решение уравнения конвекции (6) подстановкой в (7) разложения Гельмгольца с произвольной функцией $\psi(\mathbf{x})$, которая сводит его к уравнению

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + (\nabla\psi, \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla)\nabla\psi = \nabla\Big(\varphi - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\Big)\,. \tag{8}$$

для поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Физический смысл такой постановки задачи состоит в том, что ее решения описывают течения газа, существующие довольно продолжительное время без заметного изменения стационарности, длительность которого велика в меру малости коэффициентов вязкости. Более того, при таком подходе, вихревые изменения внутри потенциального течения можно считать вызванными внешним условием в виде потенциала $\psi(\mathbf{x})$.

Уравнение (8) можно исследовать на основе разложений по малому параметру, в качестве которого нужно принять малость поля $\mathbf{v}$ по сравнению с полем $\nabla\psi$ в подходящей метрике, то есть изучать, с физической точки зрения течения со слабой завихренностью. Однако, уже в линейном приближении, при пренебрежении квадратичным по $\mathbf{v}$ слагаемом в (8), и когда градиент разности в правой части является малой функцией, получается в общем случае, довольно сложное линейное уравнение относительно векторного поля $\mathbf{v}$ с переменными коэффициентами. Поэтому в настоящем сообщении мы ограничиваемся исследованием уравнения (8), в котором $\psi(\mathbf{x})$ является линейной формой $\psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}, \mathbf{x})$, где $\mathbf{w}$ – заданный постоянный вектор. В этом случае, мы предлагаем алгоритм последовательного построения членов асимптотического разложения по степеням малого параметра, который регулирует величину $|\mathbf{v}|$.

3. Общее решение уравнения первого приближения. Общее решение мы будем строить на основе исходного уравнения конвекции, которое, после подстановки разложения $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, в первом приближении по $\mathbf{v}$, дает уравнение

$$[\nabla, (\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{v}] = 0 \,. \tag{9}$$

С целью анализа этого уравнения, рассмотрим, сначала, линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка и постоянными коэффициентами относительно функции $f(\mathbf{x})$, имеющее следующий вид:

$$(\mathbf{w}, \nabla) f = 0 \,. \tag{10}$$

Используя метод характеристик (см., например, [5]), построим общее решение этого уравнения в виде

$$f(\mathbf{x}) = g([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) \,, \tag{11}$$

где $g(\mathbf{x})$ – произвольное гладкое скалярное поле на $\mathbb{R}^3$. Это связано с тем, что общее решение линейного уравнения первого порядка для функции f от трех переменных должно определяться двумя интегралами характеристической системы, которая в данном случае имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{w} \,,$$

что приводит к прямолинейным характеристикам $\mathbf{X}(s) = \mathbf{w}s + \mathbf{X}_0$. Откуда следует, что два интеграла характеристической системы имеют вид $[\mathbf{w}, \mathbf{X}(s)] = [\mathbf{w}, \mathbf{X}_0]$. Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. [5]), получаем формулу (11) для общего решения уравнения (10).

Замечание. Несмотря на то, что поле $g(\mathbf{x})$ произвольно, его зависимость от третьей координаты, параллельной $\mathbf{w}$, как это видно из (11), несущественна. Тот факт, что представленная формула дает нам решения уравнения (11) проверяется непосредственно. Полагая $\xi_j = [\mathbf{w}, \mathbf{x}]_j$, $j = 1, 2, 3$, имеем $\nabla_k \xi_j = \epsilon_{jlk} w_l$. Тогда подстановка (11) в (10) дает

$$w_k \nabla_k g = w_k (\partial g / \partial \xi_j) \nabla_k \xi_j = (\partial g / \partial \xi_j) \epsilon_{jlk} w_k w_l = 0 \,.$$

Из проделанного анализа следует, что общее решение системы линейных уравнений первого порядка относительно векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ следующего вида

$$(\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{f} = 0 \tag{12}$$

описывается формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) \,, \tag{13}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – произвольное гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^3$. Оно получается применением формулы (11) для каждой декартовой проекции уравнения (12).

Построим, теперь, общее решение уравнения первого приближения (9), которое, очевидным образом, записывается в эквивалентном виде

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = 0 \,,$$

и которое имеет форму (12) при $\mathbf{f} = [\nabla, \mathbf{v}]$. Тогда, из (13) следует

$$[\nabla, \mathbf{v}] = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])\,, \tag{14}$$

где для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие соленоидальности поля $\mathbf{g}$, $(\nabla, \mathbf{g}) = 0$. В свою очередь, для выполнимости условия соленоидальности, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до градиента гармонической функции поле $\mathbf{g}$ было представимо в виде $\mathbf{g} = [\nabla, \mathbf{h}]$, где $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемое векторное поле. Подстановка этого представления в (14) приводит к уравнению

$$[\nabla, \mathbf{v} - \mathbf{h}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])] = 0\,,$$

общее решение которого выражается в условии потенциальности векторного поля на которое действует дифференциальный оператор $[\nabla, \cdot]$. Поэтому, вводя потенциал $\Phi(\mathbf{x})$, в результате, получаем общее решение уравнения (9) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \nabla\Phi\,, \tag{15}$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые скалярное и векторное поля.

4. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотри общее решение неоднородного уравнения первого порядка

$$(\mathbf{w}, \nabla) f(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})\,, \tag{16}$$

где $q(\mathbf{x})$ – заданное непрерывное скалярное поле. Общее решение этого уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (10) и его частного решения. Таким образом, для построения общего решения нам достаточно найти какое-либо частное решение уравнения (16). Построим это частное решение в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} q(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}) ds\,, \tag{17}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$. Проверим, что эта функция, действительно, удовлетворяет уравнению (16). Во первых, так как $\nabla_k(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}))_j = \delta_{jk} - n_j n_k$, то при $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}$ имеем

$$n_k \nabla_k q(\mathbf{y}(s)) = n_k(\partial q/\partial y_j)\nabla_k y_j = n_k(\delta_{jk} - n_j n_k) = 0\,.$$

Во- вторых, дифференцирование по верхнему пределу интеграла дает $q(\mathbf{x})$. Тогда

$$n_k \nabla_k f(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) n_k \nabla_k (\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} n_k \nabla_k q(\mathbf{y}(s)) ds = q(\mathbf{x})\,.$$

Следовательно, учитывая, что общее решение однородного уравнения определяется формулой (13), заключаем, что общее решение уравнения (16) имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = g([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} q(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds \tag{18}$$

с произвольным гладким полем $g(\mathbf{x})$.

Построенное общее решение позволяет нам утверждать, что общее решение системы уравнений относительно векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$(\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \tag{19}$$

с заданной правой частью – векторным полем $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ описывается формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds \tag{20}$$

с произвольным гладким векторным полем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, так как уравнение (19) для каждой из компонент имеет вид (16). Таким образом нами доказана следующая

Теорема 1. *Общее решение уравнения*

$$(\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x})$$

при заданном непрерывном поле $\mathbf{q}(x)$ *имеет вид*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds$$

с произвольным гладким полем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

С целью вычисления членов асимптотического разложения общего дважды непрерывно дифференцируемого решения конвективного уравнения найдем общее решение неоднородного уравнения

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \tag{21}$$

при непрерывной правой части. Сразу же заметим, что это уравнение разрешимо только в том случае, если непрерывное поле $\mathbf{q}$ соленоидально (хотя бы в слабом смысле), то есть $(\nabla, \mathbf{q}) = 0$.

Полагая в (19), что $\mathbf{f} = [\nabla, \mathbf{v}]$, имеем на основании (20)

$$[\nabla, \mathbf{v}](\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds \equiv \mathbf{G}(\mathbf{x}) \tag{22}$$

с произвольным гладким векторным полем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Для разрешимости же полученного уравнения (22) необходимо и достаточно, чтобы дивергенция поля в правой части (22) была равна нулю. Это дает условие

$$(\nabla, \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])) = -(\nabla, \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}) ds) \equiv Q(\mathbf{x}), \tag{23}$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно поля $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Преобразуем левую часть (23). Так как

$$(\nabla, \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])) = \frac{\partial g_l(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \epsilon_{jml} w_m = |\mathbf{w}| (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{g}])([\mathbf{w}, \mathbf{x}]),$$

то условие разрешимости уравнения (23) принимает вид

$$|\mathbf{w}| (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{g}])([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) = Q(\mathbf{x}). \tag{24}$$

Так как

$$\nabla_k q_j(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}) = \Big(\frac{\partial q_j(\mathbf{y}(s))}{\partial y_l(s)} \Big) (\delta_{lk} - n_l n_k),$$

то, применяя оператор $(\nabla, \cdot)$ в правой части (23), получим

$$Q(\mathbf{x}) = -(\mathbf{n}, \mathbf{q}(\mathbf{x})) - 2 \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} (\nabla, \mathbf{q})(\mathbf{y}(s)) ds.$$

Учитывая же, что $(\nabla, \mathbf{q}) = 0$, находим, что условие разрешимости уравнения (22) формулируется следующим образом:

$$|\mathbf{w}| (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{g}])([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) = -(\mathbf{n}, \mathbf{q}(\mathbf{x})). \tag{25}$$

При заданном поле $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, его можно рассматривать как уравнение относительно поля $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, относительно которого также возникает вопрос о его разрешимости. Очевидно, что разрешимость уравнения (25) возможна только в случае, когда $(\mathbf{n}, \mathbf{q}(\mathbf{x})) \equiv q([\mathbf{w}, \mathbf{x}])$, то есть эта функция зависит только от $[\mathbf{w}, \mathbf{x}]$. При выполнении этого условия, уравнение (25) в координатах $\langle x_1, x_2 \rangle$ в плоскости, ортогональной $\mathbf{w}$ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = -|\mathbf{w}|^{-1} q(x_1, x_2).$$

Его общим решением является $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle = \mathbf{g}$, где функция g_3 – произвольная и

$$g_1 = \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(x_1, x_2), \quad g_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi(x_1, x_2) \tag{26}$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми на плоскости функциями h и Ψ, причем функция Ψ – произвольная, а h удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = -|\mathbf{w}|^{-1} q(x_1, x_2)\,. \tag{27}$$

В случае, если условия на разрешимость уравнения (22) выполнены, поле $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ представимо в виде $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})]$, где $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле, и из (22) находим, что его общее решение записывается в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})] + \nabla\Phi(\mathbf{x})\,, \tag{28}$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ – произвольное дважды дифференцируемые скалярное поле. На выбор поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, в силу выполнимости для него разложения Гельмгольца $\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}] + \nabla\chi$, можно наложить дополнительное условие $(\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0$. Подчинение поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ этому условию сведется только лишь к переопределению потенциала $\Phi(\mathbf{x})$. Поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, при выполнимости условия $(\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0$, является решением векторного уравнения Пуассона

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\,,$$

в чем можно убедиться подействовав оператором $[\nabla, \cdot]$ на обе части уравнения (22).

Сформулируем полученный результат в виде отдельной теоремы, так как он представляет собой самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Для разрешимости уравнения*

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = \mathbf{q}(\mathbf{x})$$

относительно $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ при заданном поле $\mathbf{q}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $(\nabla, \mathbf{q}(\mathbf{x})) = 0$ и компонента $(\mathbf{n}, \mathbf{q})(\mathbf{x})$ зависела только от $[\mathbf{n}, \mathbf{x}]$. Его общее решение имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})] + \nabla\Phi(\mathbf{x})\,,$$

где поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x})$ – дважды непрерывно дифференцируемые, поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – соленоидальное, $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\,,$$

в котором

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{y}(s))ds\,,$$

$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{n}s$, $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – гладкое поле. При этом должно выполняться условие $(\nabla, \mathbf{G}) = 0$, для выполнимости которого необходимо и достаточно, чтобы компоненты поля $\mathbf{g}$, ортогональные $\mathbf{n}$, имели следующий вид:

$$g_1 = \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi(x_1, x_2)\,, \quad g_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\Psi(x_1, x_2)\,,$$

где функции h и Ψ – дважды непрерывно дифференцируемые на плоскости, в Ψ – произвольная, h удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = -|\mathbf{w}|^{-1} q(x_1, x_2)\,.$$

При этом компонента g_3 – произвольна.

5. Асимптотические разложения стационарных течений с малой завихренностью. Построим асимптотическое разложение

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}) \tag{29}$$

с некоторым малым параметром ε решения уравнения конвекции (6), в рассматриваемом нами случае, когда $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,

$$[\nabla, (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}] + (\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = 0\,. \tag{30}$$

Подставляя (29) в (30) и производя баланс коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε, получаем систему уравнений для последовательности функций $\langle \mathbf{v}^{(n)};\ n \in \mathbb{N}\rangle$,

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}^{(1)}] = 0\,, \tag{31}$$

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}^{(n)}] = -\sum_{m=1}^{n-1} [\nabla, (\mathbf{v}^{(m)}, \nabla)\mathbf{v}^{(n-m)}] \equiv \mathbf{q}^{(n)}\,, \quad n > 1\,, \tag{32}$$

где в правой части (32) отсутствует функция $\mathbf{v}^{(n)}$. Следовательно, все уравнения этой системы относятся к уравнению типа (22). Поэтому все коэффициенты $\mathbf{v}^{(n)}$ асимптотического разложения существуют в том случае, когда для каждого $n = 2, 3, ...$ будут выполнены условия разрешимости $(\nabla, \mathbf{q}^{(m)}) = 0$ и $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(m)})$ зависят только от $[\mathbf{n}, \mathbf{x}]$, $m = 2, 3, ...$.

Решение уравнение (31) запишем в виде

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \nabla \Phi^{(1)}\,, \tag{33}$$

где $\mathbf{h}^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые поля. Для возможности построения асимптотического разложения нам нужно удостовериться, что выполнено условие разрешимости уравнения (32) при любом $n > 1$. Условие бездивергентности поля $\mathbf{q}^{(n)}$ выполнено тривиальным образом, так как оно представляет собой ротор некоторого другого поля.

Далее, последовательно, могут быть построены посредством выбора функций $\mathbf{g}^{(n)}$, $\Phi^{(n)}$ все приближения $\mathbf{v}^{(n)}$ при $n = 2, ..., m$.

$$\mathbf{v}^{(n)} = [\nabla, \mathbf{H}^{(n)}] + \nabla \Phi^{(n)}\,, \quad (\nabla, \mathbf{H}^{(n)}) = 0\,, \quad \Delta \mathbf{H}^{(n)} = \mathbf{G}^{(n)}\,, \tag{34}$$

$$\mathbf{G}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{(n)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{y}(s))ds\,. \tag{35}$$

Условие разрешимости уравнения для $\mathbf{H}^{(n)}$ – независимость $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(n)})$ от продольной координаты обеспечивается подходящим выбором всех градиентов $\nabla\Phi^{(n)}$, $n = 2, 3, ..., m$. Индукцией по $m = 2, 3, ...$ доказывается, что все поля $\mathbf{q}^{(n)}$, $n = 2, 3, ...$ удовлетворяют условиям независимости компонент $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(n)})$ от продольной координаты и при этом все поля $\mathbf{G}^{(n)}$ не зависят от продольной координаты, что позволяет выбрать все поля $\mathbf{H}^{(n)}$ также независящими от этой координаты. Это обеспечивается таким выбором градиентов $\nabla\Phi^{(n)}$, чтобы их поперечные части $\nabla\Phi^{(n)} - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \nabla\Phi^{(n)})$ не зависели от продольной координаты при произвольной зависимости продольных компонент. В свою очередь, это приводит к тому, что все приближения $\mathbf{v}^{(n)}$ также имеют поперечную часть, независящую от продольной координаты.

Рассмотрим случай $m = 2$. В этом случае

$$\mathbf{q}^{(2)} = -[\nabla, (\mathbf{v}^{(1)}, \nabla)\mathbf{v}^{(1)}]\,.$$

Потребуем, чтобы $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(2)})$ не зависела от продольной координаты. Ввиду того, что от продольной координаты не зависит поле $\mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])$, то подстановка (33) в выражение для $\mathbf{q}^{(2)}$ сводит это требование к тому, чтобы от этой координаты не зависело выражение

$$(\mathbf{n}, [\nabla, (\nabla\Phi^{(1)}, \nabla)[\nabla, \mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])]]) + (\mathbf{n}, [\nabla, ([\nabla, \mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])], \nabla)\nabla\Phi^{(1)}])\,, \tag{36}$$

которое применением к нему дифференциального оператора $(\mathbf{n}, \nabla)$ приводится к линейному уравнению для $\Phi^{(1)}$. Оно, в свою очередь, обладает обширным множеством решений. Условие (36) может быть, в частности, удовлетворено, если поперечная часть $\nabla\Phi^{(1)} - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \nabla\Phi^{(1)})$ градиента зависит только от $[\mathbf{w}, \mathbf{x}]$ и при этом продольная часть $\mathbf{n}(\mathbf{n}, \nabla\Phi^{(1)})$ может быть произвольной. Последнее связано с тем, что в (36) эта продольная часть не входит. В самом деле, в первом слагаемом, при подстановке продольной части $\nabla\Phi^{(1)}$, действие дифференциального оператора $(\nabla\Phi^{(1)}, \nabla)(\cdot)$ на $\mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])$ осуществляется дифференцированием по продольной координате этого поля, от которой оно не зависит. Во втором слагаемом, после подстановки вместо градиента $\nabla\Phi^{(1)}$ его продольной части $\mathbf{n}(\mathbf{n}, \nabla\Phi^{(1)})$ действие внешнего дифференциального оператора $(\mathbf{n}, [\nabla, \cdot])$ заменяется на действие дифференциального оператора $(\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{n}])(\cdot)$, который тождественно равен нулю.

Покажем, что в общем случае указанный выше выбор всех полей обеспечивает разрешимость задачи вычисления приближений $\mathbf{v}^{(m)}$ при любом значении m. Это достигается применением к выражению для поля $\mathbf{q}^{(n)}$, определенному формулой (32), рассуждений, аналогичных тем, что были использованы в случае $m = 2$. С этой целью подставим в это выражение разложения $\mathbf{v}^{(n)} = [\nabla, \mathbf{H}^{(n)}] + \nabla\Phi^{(n)}$. Тогда требование независимости продольной компоненты от продольной координаты сводится к требованию независимости от этой координаты выражения, аналогичного (36)

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Big\{(\mathbf{n}, [\nabla, (\nabla\Phi^{(m)}, \nabla)[\nabla, \mathbf{H}^{(n-m)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])]]) + (\mathbf{n}, [\nabla, ([\nabla, \mathbf{H}^{(m)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])], \nabla)\nabla\Phi^{(n-m)}])\Big\}\,.$$

Точно такими же рассуждениями как и при анализе случая с $m = 2$ доказывается, то продольные составляющие градиентов $\nabla\Phi^{(m)}$, $m = 1, ..., n-1$ не содержатся в этом выражении, а так как, по предположению, их поперечные составляющие не зависят от продольной координаты, то этот факт доказывает, что выписанное выражение не зависит от продольной координаты и поэтому от этой координаты не зависит $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(m)})$.

Сформулируем доказанное утверждение.

Теорема 3. *Если при построении последовательных приближений* $\mathbf{v}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ *решений уравнения конвекции, определяемых разложением (29), на основе списка определяющих их уравнений (35), (36), все градиенты* $\nabla\Phi^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ *обладают поперечными компонентами, не зависящими от продольной координаты* $(\mathbf{n}, \mathbf{x})$, *то тем самым удовлетворены все условия разрешимости* $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(n)}) = (\mathbf{n}, \mathbf{g}^{(n)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]))$, $n \in \mathbb{N}$ *и поэтому все приближения* $\mathbf{v}^{(n)}$ *существуют.*

Замечание. Заметим, что при выборе $\Psi^{(n)} = 0$, $\Phi^{(n)} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, индукцией по $n \in \mathbb{N}$ доказывается, что все поля $\mathbf{q}^{(n)}$ и, следовательно, $\mathbf{G}^{(n)}$, $\mathbf{H}^{(n)}$ зависят только от $[\mathbf{w}, \mathbf{x}]$. В этом случае для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $(\nabla, \mathbf{v}^{(n)}) = 0$, и ряд (29) дает нам бездивергентное решение уравнения конвекции.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
2. Хаппель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976.
3. Ладыженская О.А. Исследование уравнения Навье—Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / Успехи математических наук. – 1959. – XIV. – 3(87). – С.75-97.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными // М.: Мир, 1964. – 830 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики т.4, II // М.: Наука, 1981. – 550 с.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF STATIONARY CONVECTION EQUATION WITH SMALL SOLENOIDAL PART

N.N. Samoilova, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.com

Abstract. It is proposed the construction of asymptotic expansions of Navier-Stokes' stationary equation general solution at zero viscosity which are weakly distinguished from potential flows. и, слабо отличающихся от потенциальных течений.

Key words: Navier-Stokes' equation, stationary problems, continuity equation, potential flow, asymptotic expansion.