MSC 35J60

ГЛАДКОСТЬ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Н. Конёнков

Рязанский государственный университет,
ул. Свободы, 46, Рязань, 390000, Россия, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

Ключевые слова: потенциал простого слоя, параболические уравнения, эллиптические уравнения, анизотропное пространство Гельдера.

В слое $D = R^n \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv u_t - a_{ij}(x,t)u_{ij} - b_i(x,t)u_i - c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

вещественнозначные коэффициенты которого удовлетворяют условию равномерной параболичности

$$(\exists\, \delta_0 > 0)\ (\forall P \in \bar{D},\ \forall \xi \in R^n) \quad a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \tag{2}$$

и принадлежат анизотропным пространствам Гельдера:

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\bar{D}), \quad \alpha \in (0,1). \tag{3}$$

Для области $\Omega \subset D$ с компактной «боковой» границей $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ и функции ψ рассматриваем модифицированный потенциал простого слоя

$$\hat{U}\varphi(P) = \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} \Gamma(x,t,y,\tau)\psi(y,\tau)\varphi(y,\tau)\, ds d\tau, \quad \Sigma_\tau = \Sigma \cap \{t = \tau\}, \tag{4}$$

где $\Gamma(x,t,y,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1). При $\psi \equiv 1$ получается потенциал простого слоя $U\varphi$.

Обозначим через $\underset{\circ}{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ пространство с нормой

$$|f;\Omega|^{(k,\alpha)} = ||f;\Omega||^{(k,\alpha)} + \sup_{(x,t)\in\Omega} t^{-(k+\alpha)/2}|f(x,t)|,$$

где $||f;\Omega||^{(k,\alpha)}$ — норма в пространстве $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Если $\varphi \in \underset{\circ}{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\Sigma \in C^{1,\alpha}$, то потенциал простого слоя $U\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ [1]. При этом $U\varphi$ не будет, вообще говоря, принадлежать $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Исследуется вопрос о принадлежности потенциала (4) анизотропному пространству Гельдера $\underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ при условии, что «боковая» граница области принадлежит лишь классу $C^{1,\alpha}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ компактна. Тогда существует положительная функция*

$$\psi \in C^{0,\alpha}(\Sigma), \quad (\exists\, \delta > 0)\ \psi(P) \geq \delta > 0 \quad \forall\, P \in \Sigma,$$

такая, что модифицированный потенциал простого слоя является ограниченным оператором из $\underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma)$ в $\underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, т.е.

$$\hat{U}\varphi(P) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\ \forall\, \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

причем

$$(\exists\, C > 0) \quad \forall \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad |\hat{U}\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \leq C|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Функция ψ определяется неоднозначно (с точностью до множителя — не обращающейся в нуль функции из класса $C^{1,\alpha}(\Sigma)$). Если «боковая» граница области Ω более гладкая, то одну из таких функций ψ можно указать явно:

Теорема 2. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), область Ω — цилиндрическая, $\Sigma \in C^{2,\alpha}$ компактна. Тогда для $\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\nu_i\nu_j$, где $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — внутренняя единичная нормаль к сечению Σ_t,*

$$\hat{U}\varphi \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0) \quad \forall \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad C_1|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)} \leq |\hat{U}\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \leq C_2|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Если старшие коэффициенты параболического оператора L принадлежат $C^{1,\alpha}(\bar{D})$, то $a[\nu] \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ и для самого потенциала простого слоя мы получаем

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_{ij}|_\Sigma \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$, $i,j = 1, \ldots, n$. Тогда потенциал простого слоя*

$$U\varphi \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0) \quad \forall \varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad C_1|\varphi, \Sigma|^{(1,\alpha)} \leq |U\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \leq C_2|\varphi, \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Используя представление эллиптического потенциала простого слоя с помощью параболических потенциалов [2], получены аналогичные утверждения для потенциала простого слоя, ядром которого является главное фундаментальное решение [3] для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Литература

1. Бадерко Е.А. О гладкости 2m-параболического потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. – 1990. – 26, № 1. – С.3-10.

2. Конёнков А.Н. О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. – 2002. – 38, № 2. – С.247-256.

3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / М.: ИЛ, 1957.

FLEXIBILITY OF HIGHEST DERIVATIVES OF SIMPLE LAYER POTENTIAL OF PARABOLIC AND ELLIPTIC EQUATIONS OF SECOND ORDER

A.N. Konenkov

Ryazan State University,
Svobody Str., 46, Ryazan, 390000, Russia, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

Key words: simple layer potential, parabolic equations, elliptic equations, anisotropic Gőlder space.