MSC 74F10

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ АКУСТИКА: СЛУЧАЙ ЖИДКОСТЬ – ПОРОУПРУГАЯ СРЕДА

А.А. Герус, С.А. Гриценко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: artur-gerus@mail.ru; sgritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются процессы изотермической акустики в композитной среде с двумя различными компонентами: жидкая область и упругое тело, пронизанное системой пор, заполненных жидкостью. Исследуется разрешимость начально-краевой задачи и выводятся усредненные модели для различных случаев.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Стокса, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабпая сходимость.

1. Введение и постановка задачи. В работе исследуется математическая модель акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Одна из компонент является некоторой жидкой областью $\Omega^{(f)}$, другая – пороупругой средой Ω. Пороупругая среда представляет собой твердый скелет и поровое пространство, заполненное той же жидкостью. Дифференциальные уравнения модели, описывающие движение жидкости в области $\Omega^{(f)}$ и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды. При выводе усредненных уравнений применяется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [1] и результаты А.М. Мейрманова [2]- [6].

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб: $Q = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,a)$, $0 < a < 1$, а область $\Omega^{(f)}$, занятая жидкостью, есть открытое дополнение области Ω:

$$Q = \Omega \cup \Omega^{(f)} \cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(f)}.$$

Движение жидкости в пороупругой области Ω описывается системой уравнений

$$\Big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\Big) p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{1}$$

$$\big(\varrho_f \chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbb{I}, \tag{3}$$

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда №14-17-00556 «Математическое моделирование флюидопотоков в нефтяных резервуарах с учётом разномасштабных свойств пласта-коллектора».

где $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства $\Omega^\varepsilon_f \in \Omega$, $\bar{c}_s$ и $\bar{c}_f$ – скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, ρ – плотность среды, $\mathbf{F}$ – заданный вектор распределенных массовых сил.

Пусть

$$\int_{Q_T}\Big(|\mathbf{F}(\mathbf{x},t)|^2 + \Big|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2\Big)dxdt = F^2 < \infty\,,$$

и выполнены предположения о периодичности порового пространства и о существовании пределов при $\varepsilon \to 0$ коэффициентов α_μ, α_λ,..., описанные в работе [7].

При выполнении предположения о периодичности порового пространства

$$\chi_0(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\chi\Big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\Big)\,,$$

где $\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω.

Движение жидкости в области $\Omega^{(f)}$ при $t > 0$ описывается системой уравнений Стокса

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\,p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0\,, \tag{4}$$

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot\, \mathbb{P}^{(f)} + \varrho_f \mathbf{F}\,, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}^{(f)} = \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I}\,. \tag{6}$$

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности для перемещений:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t)\,, \tag{7}$$

и для нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} \mathbb{P}^{(f)}(\mathbf{x},t)\cdot \boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x},t)\cdot \boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0)\,. \tag{8}$$

Завершают задачу однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = 0,\;\; (\mathbf{x},t) \in S_T = S \times (0,T)\,, \tag{9}$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0\,, \quad \mathbf{x} \in Q\,. \tag{10}$$

Пусть

$$\varrho^\varepsilon_{(f)} = (1-\zeta)\varrho_f + \zeta\big(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)\,.$$

Определение 1. *Пара функций* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$ *таких, что*

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)\,,\ p^{\,\varepsilon} \in L_2(Q_T)\,,$$

называется обобщенным решением задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10), если эти функции удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\Big((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2} + \zeta\,\big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\big)\Big)\,p^{\,\varepsilon} + \nabla\cdot\mathbf{w}^{\,\varepsilon} = 0\,, \tag{11}$$

почти всюду в Q_T, *и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T}\varrho^\varepsilon_{(f)}\big(\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)dxdt = \int_{Q_T}\big(\zeta\mathbb{P} + (1-\zeta)\mathbb{P}^{(f)}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt \tag{12}$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}$ *таких, что* $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ *и* $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T) = 0$ *для* $\mathbf{x}\in Q$.

Теорема 1. *Для всех* $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщенное решение* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$ *задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10) и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(|p^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + \Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2\Big)dx + \\
&+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(f)}}\Big(|p^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + \Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2\Big)dx + \int_0^T\int_{\Omega^{(f)}}\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})\Big|^2dxdt + \\
&+\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(\Big|\frac{\partial p^{\,\varepsilon}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)dx + \\
&+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(f)}}\Big(\Big|\frac{\partial p^{\,\varepsilon}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)\Big|^2\Big)dx + \int_0^T\int_{\Omega^{(f)}}\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big)\Big|^2dxdt + \\
&+\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\Big(\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2 + \Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big)\Big|^2\Big)dxdt \leqslant C_0F^2\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

где постоянная C_0 *не зависит от малого параметра* ε *и коэффициентов* $\bar{\alpha}_\lambda$, $\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}$, $\bar{\alpha}_\mu$.

□ Доказательство теоремы основано на энергетических тождествах

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\varrho^\varepsilon\Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon}|p^\varepsilon|^2\Big)dx + \\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(s)}}\Big(\varrho_s\Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\big(\bar{c}_s^{(0)}\big)^2}|p^\varepsilon|^2\Big)dx + \\
&+\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big(\bar{\alpha}_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) : \mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big)dx = \int_Q\tilde{\varrho}^{\,\varepsilon}\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}dx\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\Big(\varrho^{\varepsilon}\Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big|^2+(1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+\frac{1}{\bar{\alpha}_p^{\varepsilon}}\Big|\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2\Big)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(s)}}\Big(\varrho_s\Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big|^2+(1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+\frac{1}{\big(\bar{c}_s^{(0)}\big)^2}\Big|\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2\Big)dx+$$
$$+\int_{\Omega}\chi^{\varepsilon}\Big(\bar{\alpha}_{\mu}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big)\Big)dx=\int_{Q}\tilde{\varrho}^{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}dx\,.$$

Эти тождества получаются подстановкой в уравнение (2) явного выражения для тензора $\mathbb{P}$ из уравнения состояния (3), умножением (2) на $\dfrac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$ и интегрированием по частям по области Q.

Для вывода априорных оценок применяется следующее неравенство Корна для периодических структур.

Пусть $\mathbf{w}\in\mathbf{W}_2^1(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\nabla\mathbf{w}|^2dx\leqslant C\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|D(x,(\mathbf{w})|^2dx \tag{14}$$

для связного множества Ω_f^{ε}, и

$$\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\nabla\mathbf{w}|^2dx\leqslant C\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|D(x,(\mathbf{w})|^2dx\,, \tag{15}$$

для связного множества Ω_s^{ε}. Константа C не зависит от ε.

Используя это неравенство, а также неравенства Гёльдера и Фридрихса-Пуанкаре, получаем требуемые априорные оценки. Далее существование обобщенного решения доказывается методом Галеркина.

2. Усредненные модели.

Теорема 2. *Пусть $\{\mathbf{w}^{\varepsilon},p^{\varepsilon}\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10) и*

$$\mu_1=\lambda_1=\infty\,.$$

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$ and $\{p^{\varepsilon}\}$ удовлетворяют системе уравнений акустики

$$\varrho_f\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla p=\varrho_f\mathbf{F}\,, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{17}$$

в области $\Omega^{(f)}$ при $t>0$, и системе уравнений акустики в области Ω при $t>0$:

$$\hat{\varrho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla p=\hat{\varrho}\mathbf{F}\,, \tag{18}$$

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\,\mathbf{v}=0\,, \tag{19}$$

где

$$m=\int_Y \chi(y)dy\,.$$

Соотношения (16)-(19) замыкаются однородным граничным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0\,, \tag{20}$$

на границе S_T, однородными начальными условиями

$$p(\mathbf{x},0)=0,\ \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=0\,,\quad \mathbf{x}\in Q\,, \tag{21}$$

и условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)\,, \tag{22}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\ p(\mathbf{x},t)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\ p(\mathbf{x},t) \tag{23}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$.

Здесь

$$\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s\,,$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *есть нормальный вектор к S в точке $\mathbf{x}\in S$, и $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ – нормальный вектор к $S^{(0)}$ в точке $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$.*

Теорема 3. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10) и*

$$0\leqslant\mu_1\,,\quad \lambda_1<\infty\,.$$

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ системе уравнений акустики (16), (17), и системе уравнений акустики в области Ω_T, состоящей из уравнения баланса моментов в форме

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\int_0^t\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla\,p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau+\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\,, \tag{24}$$

и уравнения неразрывности (19).

Дифференциальные уравнения замыкаются граничным и начальным условиями (20), (21), и условиями непрерывности (22), (23).

Матрица $\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t)$ и функция $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ задаются формулами (61), (62).

Теорема 4. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$\mu_1=\infty\,,\quad 0\leqslant\lambda_1<\infty\,,$$

и $\mathbf{w}^{\varepsilon}_{f}=\mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_{f}}\big(\mathbf{w}^{\varepsilon}\big)$ *– продолжение из* Ω^{ε}_{f} *в* Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$, *где*

$$\mathbf{v}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\, m\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}+\zeta\,\frac{\partial\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\, m\,\mathbf{v}_f+\zeta\,\mathbf{v}^{(s)}\,, \qquad (25)$$

и $\mathbf{w}^{(s)}$ *и* $\mathbf{w}_f$ *– пределы последовательностей* $\{(1-\chi^{\varepsilon})\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}_{f}\}$, *удовлетворяют в области* $\Omega^{(f)}_{T}$ *системе уравнений акустики (16), (17), и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения баланса моментов*

$$m\varrho_f\,\mathbf{v}_f+\varrho_s\,\mathbf{v}^{(s)}+\int_0^t\big(-\hat{\varrho}\mathbf{F}+\nabla p\big)(\mathbf{x},\tau)d\tau=0\,, \qquad (26)$$

для жидкой компоненты, уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(s)}-(1-m)\mathbf{v}_f=-\int_0^t\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\Big(\nabla p+\varrho_s\Big(\frac{\partial\mathbf{v}_f}{\partial\tau}-\mathbf{F}\Big)\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau \qquad (27)$$

для твердой компоненты, и уравнения неразрывности

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}^2_f}+\frac{(1-m)}{\bar{c}^2_s}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\Big(m\,\mathbf{v}_f+\mathbf{v}^{(s)}\Big)=0\,. \qquad (28)$$

Задача замыкается граничным и начальными условиями (20), (21), и условиями непрерывности (22), (23).

В (26)-(27)

$$\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s\,,$$

и матрица $\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$ *задается формулой (72).*

В теореме используется обозначение:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_{f}=\mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_{f}}\Big(\mathbf{w}^{\varepsilon}\Big)\,,$$

где

$$\mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_{f}}:\mathbf{W}^1_2(\Omega^{\varepsilon}_{f})\to\mathbf{W}^1_2(\Omega)$$

– оператор продолжения из Ω^{ε}_{f} в Ω, такой, что $\mathbf{w}^{\varepsilon}_{f}=\mathbf{w}^{\varepsilon}$ в $\Omega^{\varepsilon}_{f}\times(0,T)$, и

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}^{\varepsilon}_{f}|^2dx\ \leqslant\ C_0\int_{\Omega^{\varepsilon}_{f}}|\mathbf{w}^{\varepsilon}|^2dx\,,\quad \int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon}_{f})|^2dx\ \leqslant\ C_0\int_{Q^{\varepsilon}_{f}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx\,. \qquad (29)$$

Корректность такого продолжения обоснована в работе C.Conca [8].

Теорема 5. *Пусть* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\}$ – *обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$\lambda_1 = \infty\,, \quad 0 \leqslant \mu_1 < \infty\,,$$

и $\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_s^{\varepsilon}}\big(\mathbf{w}^{\varepsilon}\big)$ – *продолжение из* Ω_s^{ε} *в* Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$ *и* $\{p^{\varepsilon}\}$, где

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + \zeta\,(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\mathbf{v}^{(f)} + \zeta\,\mathbf{v}_s\,, \tag{30}$$

и $\mathbf{w}^{(f)}$ *и* $\mathbf{w}_s$ *являются пределами последовательностей* $\{\chi^{\varepsilon}\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ *и* $\{\mathbf{w}_s^{\varepsilon}\}$, *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики (16), (17), и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения неразрывности*

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{(1-m)}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial\, p}{\partial t} + \nabla\cdot\big(\mathbf{v}^{(f)} + \mathbf{v}_s\big) = 0\,, \tag{31}$$

уравнения баланса моментов

$$\varrho_f\,\mathbf{v}^{(f)} + (1-m)\varrho_s\,\mathbf{v}_s = \int_0^t \Big(\hat{\varrho}\mathbf{F} - \nabla\, p\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau\,, \tag{32}$$

для твердой компоненты и и уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(f)} - m\,\mathbf{v}_s = -\int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla\, p + \varrho_f\Big(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \tau} - \mathbf{F}\Big)\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{33}$$

для жидкой компоненты.

Задача замыкается граничным и начальными условиями (20), (21), и условиями непрерывности (22), (23).

В (32)-(33)

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s\,,$$

и матрица $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t)$ *задается формулой (81).*

Здесь как и в предыдущей теореме $\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_s^{\varepsilon}}\big(\mathbf{w}^{\varepsilon}\big)$, где

$$\mathbb{E}_{\Omega_s^{\varepsilon}} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_s^{\varepsilon}) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$$

– оператор продолжения из Ω_s^{ε} в Ω, такой что $\mathbf{w}_s^{\varepsilon} = \mathbf{w}^{\varepsilon}$ в $\Omega_s^{\varepsilon}\times(0,T)$, и

$$\int_{\Omega}|\mathbf{w}_s^{\varepsilon}|^2dx \quad\leqslant\quad C_0\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbf{w}^{\varepsilon}|^2dx\,,\quad \int_{\Omega}|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon})|^2dx \quad\leqslant\quad C_0\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{\varepsilon})|^2dx\,. \tag{34}$$

Теорема 6. *Пусть* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon},\, p^{\,\varepsilon}\}$ – *обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$\mu_1=\infty\,,\quad 0<\lambda_0<\infty\,,$$

и $\boldsymbol{w}_s^{\varepsilon}=\mathbb{E}_{\Omega_s^{\varepsilon}}\big(\mathbf{w}^{\varepsilon}\big)$.

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости),* p *(давление), и* $\mathbf{w}_s$ *(перемещение твердой части) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$, $\{p^{\,\varepsilon}\}$, *и* $\{\mathbf{w}_s^{\varepsilon}\}$, *где*

$$\mathbf{v}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\,\mathbf{v}_s\,, \tag{35}$$

удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики (16), (17), и уравнению Ламе*

$$\hat{\varrho}\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}=\nabla\cdot\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_3^s:\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)\big)+\hat{\rho}\mathbf{F} \tag{36}$$

в области Ω_T, *с однородным граничным условием*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0\,, \tag{37}$$

на границе $\partial\Omega^{(f)}\backslash S^{(0)}$ *при* $t>0$, *с однородными начальными условиями*

$$p(\mathbf{x},0)=0,\;\; \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=0 \tag{38}$$

для скорости жидкости и давления в области $\Omega^{(f)}$, *с однородным граничным условием*

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)=0\,, \tag{39}$$

на границе $\partial\Omega\backslash S^{(0)}$ *при* $t>0$, *и однородными начальными условиями*

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{x},0)=\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},0)=0 \tag{40}$$

для перемещения твердой части в Ω.

На общей границе $S_T^{(0)}$ *выполняются условия непрерывности*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega^{(f)}}}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega}}\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{41}$$

и

$$-\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega^{(f)}}}p\,(\mathbf{x},t)\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega}}\Big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_3^s:\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}_s(\mathbf{x},t)\big)\Big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)\,. \tag{42}$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ – *нормаль к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$.

В (36)

$$\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s\,,$$

и симметричный положительно определенный постоянный тензор 4 ранга $\mathfrak{N}^s_3$ задается формулой (98).

Теорема 7. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1) – (3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$0<\mu_1<\infty\,,\quad 0<\lambda_0<\infty\,,$$

и $\mathbf{w}^\varepsilon_s=\mathbb{E}_{\Omega^\varepsilon_s}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$.

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ и $\{p^\varepsilon\}$, где

$$\mathbf{v}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\,\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+\zeta\,(1-m)\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t}=(1-\zeta)\mathbf{v}+\zeta\,\mathbf{v}^{(f)}+\zeta\,\mathbf{v}_s\,, \tag{43}$$

удовлетворяют системе уравнений акустики (16), (17) в области $\Omega^{(f)}_T$, граничному и начальным условиям(37)-(38).

В области Ω_T предельные функции p_f (давление жидкости), $\mathbf{w}^f$ (перемещение жидкости), и $\mathbf{w}_s$ (перемещение твердой части) последовательностей $\{\zeta\,\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$, $\{\zeta\,\chi^\varepsilon\,\mathbf{w}^\varepsilon\}$, и $\{\zeta\,\mathbf{w}^\varepsilon_s\}$ удовлетворяют системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{c_f^2}p_f+\nabla\cdot\,\mathbf{w}^{(f)}=\mathbb{C}^s_0:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\frac{c^s_0}{\lambda_0}p_f\,, \tag{44}$$

уравнения баланса моментов

$$\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t^2}+\varrho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial t^2}=\nabla\cdot\,\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}^s_2:\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)-p_f\,\mathbb{C}^s_1\big)+\hat{\varrho}\mathbf{F}\,, \tag{45}$$

для твердой компоненты, и уравнению баланса моментов

$$-\int_0^t\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla\,p_f+\varrho_f(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s}{\partial\tau^2}-\mathbf{F})\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau=\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}-m\,\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t} \tag{46}$$

для жидкой компоненты.

Эти дифференциальные уравнения замыкаются условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\ \big(\mathbf{v}^{(f)}(\mathbf{x},t)+(1-m)\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)\,, \tag{47}$$

и

$$-\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\ p\,(\mathbf{x},t)\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\ \Big(\lambda_0\,\mathfrak{N}^s_2:\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)-p_f\,\mathbb{C}^s_1\big)\Big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{48}$$

на общей границе $S^{(0)}_T$, однородными граничными и начальными условиями (39) и (40) для перемещения твердой части, и однородными граничными и начальными условиями

$$\mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0\,,\quad\mathbf{x}\in\partial\Omega\backslash S^{(0)}\,,\quad t\in(0,T)\,, \tag{49}$$

$$\mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x},0)=0\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{50}$$

для перемещения жидкости.

В (44)-(49) $\mathbf{n}(\boldsymbol{x}^0)$ *– нормальный вектор к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *– нормальный вектор к* $\partial\Omega$ *в точке* $\mathbf{x}\in\partial\Omega$,

$$\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s\,,$$

симметричный положительно определенный постоянный тензор 4 ранга $\mathfrak{N}_2^s$, *матрицы* $\mathbb{C}_0^s$ *и* $\mathbb{C}_1^s$, *постоянная* c_0^s *заданы формулами (90), (91) и (92), а матрица* $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t)$ *описана формулой (81).*

3. Доказательство теорем 2-5. Главная проблема в доказательстве этих теорем состоит в условиях непрерывности на общей границе $S^{(0)}$ между областями $\Omega^{(f)}$ и Ω. Эти условия следуют из предельного интегрального тождества

$$-\int_{Q_T}p\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\,dxdt=\int_{Q_T}\int_Y\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big(\mathbf{F}-\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Big)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)dy\,dx\,dt\,, \tag{51}$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, и интегрального тождества

$$\int_{Q_T}\Big(\Big((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2}+\zeta\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\Big)\frac{\partial p}{\partial t}\,\psi-\nabla\,\psi\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Big)dxdt=0 \tag{52}$$

для любой гладкой функции $\psi\in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ – двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, и

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f+\zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f\,\chi(\mathbf{y})+\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,\varrho_s)\big)\,.$$

Для всех случаев (51) и (52) влекут систему уравнений акустики (16) и (17) в области $\Omega_T^{(f)}$, условия непрерывности (22) и (23) на общей границе $S^{(0)}$, и уравнение неразрывности

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}=0 \tag{53}$$

в области Ω_T.

Все различия сконцентрированы в уравнении динамики в области Ω_T и в представлении скорости смеси $\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$.

Доказательство теоремы 2. Для этого случая $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ и интегральное тождество (51) влечет уравнение динамики

$$\hat{\varrho}\,\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=-\nabla\,p+\hat{\varrho}\,\mathbf{F} \tag{54}$$

в области Ω_T.

Доказательство теоремы 3. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\Big(\frac{1}{\bar{c}_f^2}+\frac{1}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}=0\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\ t>0\,,$$

Используя вложение $\nabla\,p\in\mathbf{L}_2(\Omega_T\times Y)$, то есть $\nabla p\in\mathbf{L}_2(\Omega_T)$, $\nabla\,(\dfrac{\partial p}{\partial t})\in\mathbf{L}_2(\Omega_T)$, выводим микроскопическое уравнение моментов баланса:

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2}=\nabla_y\cdot\Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\mathbb{D}\big(y,\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}\big)+\lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbb{D}(y,\mathbf{W})-\Pi\,\mathbb{I}\Big)-$$
$$-\nabla\,p+\varrho(\mathbf{y})\mathbf{F}\,,\quad \mathbf{y}\in Y\,,\quad t>0\,,\quad (55)$$

где

$$\varrho(\mathbf{y})=\varrho_f\,\chi(\mathbf{y})+\varrho_s\,\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,,$$

и микроскопическое уравнение неразрывности

$$\nabla_y\cdot\mathbf{W}=0\,,\quad \mathbf{y}\in Y\,.\quad (56)$$

Эти уравнения замыкаются однородными начальными условиями

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)=\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)=0\,,\quad \mathbf{y}\in Y\,.$$

Мы рассматриваем периодическое решение задачи как сумму

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,,$$

$$\Pi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\Pi^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\Pi_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,,$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t)=\big(F_1(\mathbf{x},t)\,F_2(\mathbf{x},t),F_3(\mathbf{x},t)\big)\,.$$

В свою очередь, пары $\{\mathbf{W}^{(i)},\Pi^{(i)}\}$, и $\{\mathbf{W}_F^{(i)},\Pi_F^{(i)}\}$ для $i=1,2,3$ есть решения периодических начально-краевых задач в области Y для $t>0$

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t^2}=\nabla_y\cdot\Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\nabla_y\big(\frac{\partial\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\big)+$$
$$+\lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\nabla_y\mathbf{W}^{(i)}-\Pi^{(i)}\,\mathbb{I}\Big),\ \nabla_y\cdot\mathbf{W}^{(i)}=0\,,\quad (57)$$

$$\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},0)=0\,,\quad \varrho(\mathbf{y})\frac{\partial\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},0)=-\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{y}\in Y\,,\quad (58)$$

и

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\nabla_y(\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}) + \\ + \lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\nabla_y \mathbf{W}_F^{(i)} - \Pi_F^{(i)}\,\mathbb{I}\Big), \ \nabla_y \cdot \mathbf{W}_F^{(i)} = 0\,, \quad (59)$$

$$\mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},0) = 0\,, \quad \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y \quad (60)$$

соответственно.

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,,$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Big\langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y(t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \\ + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Big\langle\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau = \\ = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\,,$$

где

$$\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t) = \sum_{i=1}^{3}\Big\langle\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y(t)\otimes\mathbf{e}_i\,, \quad (61)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Big\langle\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,. \quad (62)$$

Полученные соотношения дают следующее представление для скорости смеси:

$$\frac{\partial\,\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \quad (63)$$

Доказательство теоремы 4. Для этого случая скорость смеси задана формулой:

$$\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,,$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{w}}{\partial t} = m\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}\,, \quad \mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x},t) = \int_Y \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy\,.$$

Интегральное тождество (51) влечет уравнение динамики (26) для жидкой компоненты.

Получим представление (27).

Если $\mathbf{W}^{(s)} = \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}$, то пара $\{\mathbf{W}^{(s)},\, \Pi^{(s)}\}$ удовлетворяет микроскопическому уравнению динамики для твердой компоненты

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\Delta_y \mathbf{W}^{(s)} - \nabla_y \Pi^{(s)} - \nabla\, p\,, \tag{64}$$

микроскопическому уравнению неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{W}^{(s)} = 0$$

в области Y_s, и начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},0,\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},0,\mathbf{y}) = 0\,, \quad \mathbf{y}\in Y_s\,. \tag{65}$$

В силу теоремы Нгуетсенга $\mathbf{W}^{(s)}, \partial^2\mathbf{W}^{(s)}/\partial t^2\, \nabla_y \mathbf{W}^{(s)} \in L_2(Q_T\times Y_s)$. Эти условия вместе с формулой (58) обеспечивают граничное условие

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t)\,, \quad (\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T) \tag{66}$$

Решения $\{\mathbf{W}^{(s)},\, \Pi^{(s)}\}$ периодических начально-краевых задач (64)-(66) имеют вид

$$\mathbf{W}^{(s)} = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

$$\Pi^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(s)},\, \Pi_i^{(s)}\}$, $i = 1,2,3$, в свою очередь являются решениями периодических начально-краевых задач

$$\varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\triangle_y \mathbf{W}_i^{(s)} - \nabla_y \Pi_i^{(s)}\,, \quad (\mathbf{y},t)\in Y_s\times(0,T)\,, \tag{67}$$

$$\nabla_y\cdot\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0\,, \quad (\mathbf{y},t)\in Y_s\times(0,T)\,, \tag{68}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},0) = 0\,, \quad \varrho_s\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i,\ \mathbf{y}\in Y_s\,, \tag{69}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0\,, \quad (\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T)\,, \tag{70}$$

Однозначная разрешимость задач (67)-(70) следует из энергетического тождества

$$\int_{Y_s}\Big(\varrho_s\Big|\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)\Big|^2 + \frac{\lambda_1}{2}\Big|\nabla \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t)\Big|^2\Big)dy = \frac{(1-m)}{\varrho_s}\,.$$

Задача (67)-(70) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_s^{(i)}$, равных нулю на $S^{(0)}$ и при $t = 0$, понимается как интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{Y_s} \Big(\varrho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \lambda_1 \nabla \mathbf{W}_i^{(s)} : \nabla \boldsymbol{\varphi}\Big) dy dt = \int_{Y_s} \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, 0) dy$$

для любой соленоидальной 1-периодической гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, равной нулю на $S^{(0)}$ и при $t = T$. По определению

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy =$$

$$= (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^3 \Big(\int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t-\tau) dy\Big) \otimes \mathbf{e}_i\Big) \cdot \Big(\nabla p\,(\mathbf{x}, \tau) +$$

$$+ \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau)\Big) d\tau = (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} -$$

$$- \int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t-\tau) \cdot \Big(\nabla p\,(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau)\Big) d\tau\,, \quad (71)$$

где

$$\mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t) = \sum_{i=1}^3 \Big(\int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) dy\Big) \otimes \mathbf{e}_i\,. \quad (72)$$

Доказательство теоремы 5. Здесь скорость смеси задана формулой

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \big(1 - \chi(\mathbf{y})\big)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}\,, \quad \mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x}, t) = \int_Y \chi(\mathbf{y})\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy\,.$$

Интегральное тождество (51) влечет уравнение динамики (32) для твердой компоненты. Докажем представление (33)

Если мы положим $\mathbf{W}^{(f)} = \chi(\mathbf{y})\mathbf{W}$, то предельное интегральное тождество для пары $\{\mathbf{W}^{(f)}, \Pi^{(f)}\}$ эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2}\Delta_y\Big(\frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}\Big) - \nabla_y \Pi^{(f)} - \nabla\, p \quad (73)$$

в области $Y_f \times (0, T)$, начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(f)}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = 0\,, \quad \mathbf{y} \in Y_f \quad (74)$$

и граничному условию

$$\mathbf{W}^{(f)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \boldsymbol{w}_s(\mathbf{x}, t)\,, \quad (\mathbf{y}, t) \in S^{(0)} \times (0, T)\,. \quad (75)$$

Таким образом, решение $\{\mathbf{W}^{(f)}, \Pi^{(f)}\}$ периодической начально-краевой задачи (73)-(75) имеет вид

$$\mathbf{W}^{(f)} = \mathbf{w}_s(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

$$\Pi^{(f)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(f)}, \Pi_i^{(f)}\}$, $i = 1,2,3$, в свою очередь, есть решения следующих периодических начально-краевых задач:

$$\varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2}\triangle_y\Big(\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}\Big) - \nabla_y\Pi_i^{(f)},\ \ (\mathbf{y},t)\in Y_f\times(0,T)\,, \tag{76}$$

$$\nabla_y\cdot\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t) = 0\,,\ \ (\mathbf{y},t)\in Y_f\times(0,T)\,, \tag{77}$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},0) = 0\,,\ \ \varrho_f\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i\,,\ \ \mathbf{y}\in Y_f\,, \tag{78}$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t) = 0\,,\ \ (\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T)\,. \tag{79}$$

По определению

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= \int_{Y_f}\frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy = \\ &= m\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} - \int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\int_{Y_f}\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)dy\Big)\otimes\mathbf{e}_i\Big)\cdot\big(\nabla p(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau = \\ &= m\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} - \int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla p(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,\end{aligned} \tag{80}$$

где

$$\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t) = \sum_{i=1}^{3}\Big(\int_{Y_f}\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)dy\Big)\otimes\mathbf{e}_i. \tag{81}$$

Доказательство теорем 6 и 7. Для этих случаев двухмасштабный предел $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ последовательности $\{p^\varepsilon\}$ задается формулой

$$(1-\zeta)\,p + \frac{\zeta}{m}\chi(\mathbf{y})\,p_f(\mathbf{x},t) + \zeta\,\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,P_s(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,.$$

Для $\mu_1 = \infty$ двухмасштабный предел $\mathbf{W}$ последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ есть

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,,$$

и для $\mu_1 < \infty$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,.$$

Двухмасштабный предел $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ равен $\{\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\}$, и двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$ есть

$$\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\big) + \mathbb{D}\big(y,\mathbf{U}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\big)\,.$$

Интегральное тождество (51) заменяется на

$$\int_{Q_T}\big(\zeta\,\lambda_0\big(m\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) + \langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big) - p\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt =$$
$$\int_{Q_T}\int_Y \varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big(\mathbf{F} - \frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Big)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)dy\,dx\,dt \quad (82)$$

с любыми гладкими функциями $\boldsymbol{\varphi}$, равными нулю на границе ∂Q, а интегральное тождество (52) заменяется на

$$\int_{Q_T}\Big(\eta\int_Y\Big(\frac{1-\zeta}{\bar c_f^2} + \Big(\frac{\chi}{\bar c_f^2} + \frac{1-\chi}{\bar c_s^2}\Big)\,\zeta\,\Big)\frac{\partial P}{\partial t}dy - \nabla\eta\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Big)dxdt = 0 \qquad (83)$$

с любыми гладкими η.

В (82)

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f + \zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f\chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\varrho_s\big)\,.$$

Для $\mu_1 = \infty$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,,$$

и для $\mu_1 < \infty$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,.$$

Соотношения (82) и (83) дают систему уравнений акустики (16), (17) в $\Omega_T^{(f)}$, усредненные уравнения баланса моментов (36) и (44), уравнение неразрывности (45) в Ω_T, условия непрерывности (41), (42), (47), и (48) на общей границе $S_T^{(0)}$, и граничные условия (37) и (49).

Предельные функции $\mathbf{w}_s$ и p_f удовлетворяют в области Ω_T макроскопическому уравнению неразрывности для жидкой компоненты

$$\frac{m}{c_f^2}p_f + m\nabla\cdot\mathbf{w}_s = \langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}\rangle_{Y_s}\,. \qquad (84)$$

Действительно, мы можем записать уравнение неразрывности в виде

$$\int_{\Omega_T}\big(\frac{1}{c_f^2}\chi^\varepsilon p^\varepsilon\xi(\mathbf{x},t) - \mathbf{w}^\varepsilon\cdot\nabla\xi(\mathbf{x},t)\big)dxdt = \int_{\Omega_T}(1-\chi^\varepsilon)\xi(\mathbf{x},t)\nabla\cdot\mathbf{w}_s^\varepsilon dxdt\,.$$

Переход к пределу при $\varepsilon\to 0$ дает

$$\int_{\Omega_T}\Big(\frac{1}{c_f^2}\chi^\varepsilon p^\varepsilon\xi(\mathbf{x},t) - \mathbf{w}^\varepsilon\cdot\nabla\xi(\mathbf{x},t)\Big)dxdt \to \int_{\Omega_T}\Big(\xi\frac{m}{c_f^2}p_f - \mathbf{w}_s\cdot\nabla\xi\Big)dxdt =$$

$$= \int_{\Omega_T} \xi\Big(\frac{m}{c_f^2}p_f + \nabla\cdot\mathbf{w}_s\Big)dxdt\,,$$

$$\int_{\Omega_T}(1-\chi^\varepsilon)\nabla\cdot\mathbf{w}_s^\varepsilon\xi(\mathbf{x},t)dxdt \to \int_{\Omega_T}\xi\big((1-m)\nabla\cdot\mathbf{w}_s + \langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}\rangle_{Y_s}\big)dxdt\,.$$

Используя теорему Нгуетсенга, получаем требуемое уравнение (84).

Запишем теперь уравнение неразрывности в области Ω_s^ε в следующей форме

$$(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon = -c_s^2(1-\chi^\varepsilon)\nabla\cdot\mathbf{w}_s^\varepsilon\,,$$

и интегральное тождество в следующей форме

$$I_f^\varepsilon + I_s^\varepsilon = \int_{\Omega_T}\varrho^\varepsilon\mathbf{F}\cdot\varphi\,dxdt\,, \tag{85}$$

где

$$I_f^\varepsilon = \int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^\varepsilon):\mathbb{D}(x,\varphi)dxdt + \int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon p^\varepsilon\nabla\cdot\varphi dxdt\,,$$

$$I_s^\varepsilon = \int_{\Omega_T}(1-\chi^\varepsilon)\big(\lambda_0\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon):\mathbb{D}(x,\varphi) + c_s^2(\nabla\cdot\mathbf{w}_s^\varepsilon)(\nabla\cdot\varphi)\big)dxdt =$$

$$= \lambda_0\int_{\Omega_T}(1-\chi^\varepsilon)\big(\mathfrak{N}^{(0)}:\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon)\big):\mathbb{D}(x,\varphi)dxdt\,,$$

и

$$\mathfrak{N}^{(0)} = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\,.$$

Здесь использовано обозначение:

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(e_i\otimes e_j + e_j\otimes e_i)\,,$$

тензор четвертого ранга $A\otimes B$ определяется следующим образом:

$$(A\otimes B):C = A(B:C)$$

для любого тензора второго ранга C.

Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (85) с двумя различными типами пробных функций. Вначале используем пробную функцию $\varphi=\varphi(\mathbf{x},t)$, а затем пробную функцию $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x},t)\varphi_0(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$. Получим макроскопическое уравнение баланса моментов

$$\nabla\cdot\Big(\lambda_0\,\mathfrak{N}^{(0)}:\big((1-m)\,\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + \langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big)\Big) - m\,\nabla p + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0\,, \tag{86}$$

и микроскопическое уравнение баланса моментов

$$\nabla_y\cdot\Big((1-\chi)\big(\mathfrak{N}^{(0)}:\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\big) + \frac{1}{\lambda_0}p\,\mathbb{I}\big)\Big) = 0\,. \tag{87}$$

Чтобы вычислить $\mathfrak{N}_2^s$ и $\mathbb{C}_1^s$ мы должны решить (87) и найти $\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}$ как оператор от $\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)$ и p.

Пусть $\mathbf{U}_2^{(ij)}(\mathbf{y})$ и $\mathbf{U}_2^{(0)}(\mathbf{y})$ есть решения периодических задач

$$\nabla_y\cdot\Big((1-\chi)\Big(\mathfrak{N}^{(0)}:\big(\mathbb{J}^{(ij)}+\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\big)\Big)\Big)=0\,, \tag{88}$$

и

$$\nabla_y\cdot\Big((1-\chi)\big(\mathfrak{N}^{(0)}:\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})+\mathbb{I}\big)\Big)=0 \tag{89}$$

в Y.

Разрешимость задач (88) и (89) следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_s}\Big(\mathfrak{N}^{(0)}:\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\Big):\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})dy=-\int_{Y_s}\Big(\mathfrak{N}^{(0)}:\mathbb{J}^{(ij)}\Big):\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})dy,$$
$$\int_{Y_s}\Big(\mathfrak{N}^{(0)}:\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\Big):\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})dy=-\int_{Y_s}\mathbb{I}:\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})dy(=-\langle\nabla\cdot\mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s})\,,$$

и соответствующих энергетических оценок.

Таким образом,решение $\mathbf{U}$ задачи (87) имеет вид

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_2^{(ij)}(\mathbf{y})D_{ij}(\mathbf{x},t)+\frac{1}{\lambda_0}p(\mathbf{x},t)\,\mathbf{U}_2^{(0)}(\mathbf{y})\,.$$

Поэтому

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}=\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s}D_{ij}+\frac{1}{\lambda_0}p\,\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s}=$$
$$=\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)+\frac{1}{\lambda_0}p\,\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s},$$

и

$$\mathfrak{N}_2^s=\mathfrak{N}^{(0)}:\Big((1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij}+\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big) \tag{90}$$

$$\mathbb{C}_1^s=m\,\mathbb{I}-\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s}\,. \tag{91}$$

Выразим правую часть (84) используя (90):

$$\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}\rangle_{Y_s}=\sum_{i,j=1}^{3}\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s}D_{ij}+\frac{1}{\lambda_0}q\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s}=$$
$$=\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{J}^{ij}\Big):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)+\Big(\frac{1}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s}\Big)\,p\,.$$

Таким образом,

$$\mathbb{C}_0^s = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_2^{(ij)} \rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij}\,, \quad c_0^s = \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_2^{(0)} \rangle_{Y_s}\,. \tag{92}$$

Очевидно, $c_0^s < 0$.

Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{w}_s = \mathbf{w}$, и

$$p_f = \frac{1}{\beta}\big(\mathbb{I} + \mathbb{C}_0^s\big) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) = \widetilde{\mathbb{C}} : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\,,$$

$$\nabla \cdot \big(\lambda_0\, \mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - p_f\, \mathbb{C}_1^s\big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0\,,$$

где

$$\beta = \frac{m}{c_f^2} - \frac{c_0^s}{\lambda_0} > 0\,.$$

Два последних уравнения можно привести к виду

$$\nabla \cdot \Big(\big(\lambda_0\, \mathfrak{N}_2^s + \mathbb{C}_1^s \otimes \widetilde{\mathbb{C}}\big) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\Big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0\,. \tag{93}$$

Теперь необходимо показать, что тензор $\mathfrak{N}_3^s$ записанный в форме

$$\mathfrak{N}_3^s = \lambda_0\, \mathfrak{N}_2^s + \mathbb{C}_1^s \otimes \widetilde{\mathbb{C}}$$

является симметричным и положительно определенным.

Используя макроскопическое уравнение неразрывности (84) для жидкой компоненты, перепишем микро- и макроскопические уравнения баланса моментов (86) и (87) как

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathbb{D}(y, \mathbf{U}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\,(\nabla_y \cdot \mathbf{U})\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U} \rangle_{Y_s}\mathbb{I} + \\ + \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)(\nabla \cdot \mathbf{w}_s)\,\mathbb{I}\Big)\Big) = 0\,. \tag{94}$$

$$\nabla \cdot \Big(\Big((1-m)\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U} \rangle_{Y_s})\Big) + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U} \rangle_{Y_s}\mathbb{I} + \\ + \Big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big)\Big)(\nabla \cdot \mathbf{w}_s)\,\mathbb{I}\Big) + \frac{1}{\lambda_0}\,\hat{\rho}\mathbf{F} = 0\,. \tag{95}$$

Подставляя в (94)

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_3^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij} + \mathbf{U}_3^{(0)}(\mathbf{y})(\nabla \cdot \mathbf{w}_s)\,,$$

мы приходим к следующим периодическим краевым задачам в Y_s:

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\Big)\Big) = 0\,, \quad (96)$$

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)}) + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\mathbb{I} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\Big)\Big) = 0\,. \quad (97)$$

Однозначная разрешимость этих задач при условиях

$$\langle\mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s} = \langle\mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} = 0$$

следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_s}\Big(\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij}\big) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}(\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)})^2\Big)dy + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(\int_{Y_s}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}dy\Big)^2 = 0\,,$$

$$\int_{Y_s}\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}(\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)})^2\Big)dy +$$
$$\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(\int_{Y_s}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}dy\Big)^2 + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\int_{Y_s}\nabla_y \cdot \widetilde{\mathbf{U}}^0 dy = 0\,.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{N}_3^s = (1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \Big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big)\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} +$$
$$\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\sum_{i,j=1}^{3}\langle\nabla \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\otimes\mathbb{J}^{ij} +$$
$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{I} + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\,. \quad (98)$$

Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$ – произвольные симметричные матрицы

$$\boldsymbol{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_3^{(ij)}\zeta_{ij}\,, \quad \boldsymbol{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_3^{(ij)}\eta_{ij}\,, \quad \boldsymbol{Y}_\zeta^0 = \mathbf{U}_3^{(0)}\operatorname{tr}\zeta\,, \quad \boldsymbol{Y}_\eta^0 = \mathbf{U}_3^{(0)}\operatorname{tr}\eta\,.$$

Тогда

$$(\mathfrak{N}_3^s : \zeta) : \eta = (1-m)\zeta : \eta + \Big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big)\operatorname{tr}\zeta\operatorname{tr}\eta +$$
$$+ \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\eta + \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s} : \eta +$$
$$+ \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta^0)\rangle_{Y_s} : \eta + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla \cdot \boldsymbol{Y}_\eta^0\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta\,. \quad (99)$$

Симметричность тензора $\mathfrak{N}_3^s$ в форме

$$\big(\mathfrak{N}_3^s : \zeta\big) : \eta = \big(\mathfrak{N}_3^s : \eta\big) : \zeta$$

следует из равенств

$$\big(\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{ij}\big) + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \\ \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (100)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle (\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)})^2\rangle_{Y_s} + \\ \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\big)^2 = 0\,, \quad (101)$$

$$\big(\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{ij}\big) + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (102)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s}\,, \quad (103)$$

которые получаются умножением (96) и (97) на $\mathbf{U}_3^{(kl)}$ и $\mathbf{U}^{(0)}$, и интегрированием по частям.

Действительно, перепишем эти соотношения в форме

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} : \zeta + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (104)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta^0) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta^0)\rangle_{Y_s} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta^0\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta^0\rangle_{Y_s} + \\ + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta^0\rangle_{Y_s}\, \mathrm{tr}\,\eta + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta^0\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta^0\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (105)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s} : \zeta + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta \, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s} \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (106)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\zeta + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta \, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s} \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\,, \quad (107)$$

и просуммируем равенства (99) и (104)-(107):

$$\big(\mathfrak{N}^s_3 : \zeta\big) : \eta = (1-m)\zeta : \eta + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s} : \eta + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} : \zeta + \\ + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s} : \zeta + \\ + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\zeta)\rangle_{Y_s} : \eta + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}^0_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\Big((1-m)\operatorname{tr}\zeta \operatorname{tr}\eta + \langle \nabla \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\eta + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\zeta + \\ + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta \, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta \, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s} + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\eta + \\ + \langle \nabla \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\zeta + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta \, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta \, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\Big) + \\ + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(m^2 \operatorname{tr}\zeta \operatorname{tr}\eta - m\,\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\eta - m\,\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\zeta + \\ \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s} \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s} \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} - m\,\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\eta - \\ - m\,\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} \operatorname{tr}\zeta + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s} \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s} + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s} \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\Big)\,.$$

Таким образом,

$$\big(\mathfrak{N}^s_3 : \zeta\big) : \eta = \langle \big(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_\zeta) + \zeta\big) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_\eta) + \eta\big)\rangle_{Y_s} + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle (\nabla_y \cdot \boldsymbol{Z}_\zeta + \operatorname{tr}\zeta)(\nabla_y \cdot \boldsymbol{Z}_\eta + \operatorname{tr}\eta)\rangle_{Y_s} + \\ + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Z}_\zeta\rangle_{Y_s} - m \operatorname{tr}\zeta\big)\big(\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Z}_\eta\rangle_{Y_s} - m \operatorname{tr}\eta\big)\,, \quad (108)$$

где $\boldsymbol{Z}_\zeta = \boldsymbol{Y}_\zeta + \boldsymbol{Y}^0_\zeta$.

Последнее соотношение показывает симметричность тензора $\mathfrak{N}^s_3$ и положительную определенность. В частности, для $\zeta = \eta$

$$(\mathfrak{N}^s_3 : \zeta) : \zeta = \langle \big(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_\zeta) + \zeta\big) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_\zeta) + \zeta\big)\rangle_{Y_s} + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle (\nabla_y \cdot \boldsymbol{Z}_\zeta + \operatorname{tr}\zeta)^2\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Z}_\zeta\rangle_{Y_s} - m \operatorname{tr}\zeta\big)^2\,. \quad (109)$$

Поэтому,

$$\left(\mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)\right) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) \geqslant a_0\,\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s), \;\; a_0 = \mathrm{const} > 0\,.$$

Литература

1. Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. Two-scale convergence // Int. J. Pure and Appl. Math. – 2002. – 2, №1. – С.35-86.
2. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – С.519-538.
3. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – С.259-284.
4. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40. – №3. – С.1272-1289.
5. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20, №4. – С.635-659.
6. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163, №2. – С.111-172.
7. Герус А.А., Гриценко С.А. Модель акустики в конфигурации упругое тело - пороупругая среда // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2014. – №25 (196); Вып.37. – С.68-75.
8. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – С.31-75.

THE ISOTHERMAL ACOUSTICS: CASE LIQUID – POROELASTIC MEDIUM

A.A. Gerus, S.A. Gritsenko

Belgorod State University,

Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: artur-gerus@mail.ru; sgritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. Processes of isothermal acoustics in composite medium with two different components are under consideration. Composite medium consists of liquid and poroelastic medium. Poroelastic medium is filled with a fluid. Solvability of initial-boundary problem in generalized form is investigated. Homogenized models are derived in various cases.

Key words: composite medium, periodic structure, Stokes' equations, Lame's equations, acoustics equations, poroelastic, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.