MSC 65D05

МЕТОД КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

С.М. Ситник, А.С. Тимашов, С.Н. Ушаков

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru; aleksandrtim@rambler.ru
Воронежский государственный университет,
Университетская пл. 1, Воронеж, 394036, Россия, e-mail: ushakowww@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются задачи интерполяции функций при помощи целочисленных сдвигов квадратичной экспоненты — функции Гаусса. Различные известные подходы к численному решению этого класса задач сталкиваются со значительными трудностями. Поэтому рассматривается подход, основанный на конечномерных приближениях при помощи линейных систем. Доказана однозначная разрешимость возникающих систем, исследованы предельные свойства решений, их связь с тета-функциями Якоби. Отдельно рассмотрены случаи систем с равным числом уравнений и неизвестных, а также переопределённых систем.

Ключевые слова: целочисленные сдвиги, гауссиан, линейные системы, тета-функции, переопределённые системы.

1. Введение. Интерполяционная задача. В течение длительного времени основным инструментом приближений были разложения по полным ортогональным системам. Однако, за последние годы в различных разделах математики и прикладных областях оформился весьма широкий круг задач, решение которых требует использования разложений функций по неполным, переполненным или неортогональным системам. Такие задачи возникают, например, при изучении электрических или оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, при моделировании процессов в томографии и медицине. Примерами переполненных систем являются фреймы, а неортогональных — всплески, системы Габора (когерентные состояния), функции Рвачёвых и другие.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Известно, что эта система неполна в стандартных пространствах, тем не менее она часто и с успехом используется. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1]- [5].

Более точно, будет исследована следующая основная

Интерполяционная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в вероятностных приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, также определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}\,(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f\,(m) = \tilde{f}\,(m)\ , \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Известны несколько подходов к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета–функций Якоби [1]- [2]. Однако, как показано в [3]- [4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [3]- [4], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой усложнения алгоритма, при этом вычисления эффективны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Чтобы преодолеть указанные трудности, в работах [6]- [9] был предложен прямой метод решения поставленной задачи интерполяции, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ. Рассмотрены также случаи переполненных систем линейных уравнений, а также предельные свойства решений конечномерных систем.

Для дальнейшего изложения введём удобное обозначение для квадратичной экспоненты

$$e\,(\sigma, x, k) = e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению последовательности неизвестных коэффициентов f_k из (1). Для этого, следуя стандартной схеме решения задач интерполяции, необходимо построить узловые функции для каждого узла интерполяции $x = m,\ m \in \mathbb{Z}$. В нашем случае достаточно построить одну *базисную узловую функцию* для узла при $x = 0$, которую мы будем искать в виде

$$G\,(\sigma, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\ e(\sigma, x, k)\,. \tag{4}$$

Вывод определяющих соотношений и бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции известен, для полноты изложения мы кратко повторим эти выкладки, следуя [3]- [4].

Из (2) следует, что эта базисная узловая функция должна удовлетворять основному условию при всех $m \in \mathbb{Z}$:

$$G(\sigma, m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \, e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}\,, \tag{5}$$

где σ_{m0} есть символ Кронекера

$$\sigma_{m0} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Предположим, что такая функция $G(\sigma, x)$, удовлетворяющая условию (5), уже найдена. Тогда нетрудно выписать формальное решение поставленной задачи. Действительно, функция

$$G_l(\sigma, x) = G(\sigma, x - l)$$

является узловой функцией для узла при $x = l$, так как при всех значениях m

$$G_l(\sigma, m) = G(\sigma, m - l) = \sigma_{ml}\,.$$

Тогда одним из решений поставленной интерполяционной задачи будет, очевидно, функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G_l(\sigma, x)\ , \tag{6}$$

так как при $x = m$ от суммы (6) остаётся только одно слагаемое:

$$f(m)\, G_m(\sigma, m) = f(m) \cdot 1 = f(m)\,.$$

Чтобы перейти от представления решения в виде (6) к искомому представлению в виде (1), выполним необходимую подстановку. В результате получим с учётом (4):

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G_l(\sigma, x) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G(\sigma, x - l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_k\, e(\sigma, x - l, k)\ .$$

Введём новый индекс суммирования $j = l + k$ вместо $l = j - k$ и формально поменяем порядок суммирования. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(j-k) g_k\, e(\sigma, x - j, k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(j-k)\, g_k \right\} e(\sigma, x - j, k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, e(\sigma, x, j)\ , \end{aligned} \tag{7}$$

где искомые коэффициенты разложения представляются в виде (после замены индексов $j \rightleftarrows k$, чтобы согласовать результат с (1)),

$$f_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(k-j\right) g_j \,, \tag{8}$$

где $f(m)$ — значения заданной функции в целых точках, а g_j — коэффициенты разложения базисной узловой функции (4).

Преобразуем систему уравнений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e\left(\sigma, m, k\right) = \sigma_{m0} \,, \quad m \in \mathbb{Z} \,.$$

Для этого введём новую переменную $q = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$. Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k q^{(m-k)^2} = \sigma_{m0} \,, \quad m \in \mathbb{Z} \,. \tag{9}$$

Для численного решения необходимо рассмотреть конечномерные усечения полученной бесконечной системы уравнений (9).

2. Переход к конечномерным аппроксимациям интерполяционной задачи. Как было показано выше, при решении задач интерполяции ключевым моментом является построение узловой функции. Перейдём теперь к рассмотрению конечномерных приближений первоначальной интерполяционной задачи, которые получаются в результате перехода от бесконечномерной системы к её конечномерным «усечениям». Этот естественный подход, основанный на приближении решений изучаемой интерполяционной задачи решениями конечномерных систем, рассматривался в работах [6]- [9]. Разумеется, такой подход имеет свои ограничения, но вместе с тем он позволяет обойти некоторые сложности, возникающие при перечисленных выше других подходах, и расширяет возможности эффективного численного решения интерполяционной задачи.

Итак, будем искать приближения для узловой функции (4) $G\left(\sigma, x\right)$ в виде приближающей её функции $H\left(\sigma, x\right)$ в виде конечных сумм

$$H\left(n, x, \sigma\right) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \cdot q^{(x-k)^2}, \;\; q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \,, \quad 0 < q < 1 \,, \tag{10}$$

при этом бесконечная система (9) заменяется конечной, причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$H(n, m, j, \sigma) = \delta_{0j} \,, \quad j = -m, \ldots, 0, \ldots m \,, \quad m \geq n \,. \tag{11}$$

В системе линейных уравнений, которая получается из условий (10)-(10), всего $2m+1$ уравнений и $2n+1$ неизвестных d_k, $-n \leq k \leq n$.

Перепишем систему уравнений, вытекающую из (10)-(11) в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{12}$$

где соответствующие элементы матрицы и вектора правой части представляются в виде

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2}, \; y_j = \delta_{0j}, \quad i = -n, \ldots, 0, \ldots, n, \quad j = -m, \ldots, 0, \ldots, m.$$

Для полученных при $m = n$ коэффициентов d_k приближённую узловую функцию будем обозначать как $H(n, x, \sigma)$, а при $m > n$, — как $H(n, m, x, \sigma)$.

Введём некоторые обозначения. Определитель Вандермонда размера n обозначим через $W x_1, \ldots, x_n$, определитель Вандермонда без l–ой строки и k–ого столбца — $W_{l,k} x_1, \ldots, x_n$. Для наглядности общие выкладки далее с определителями и матрицами произвольных порядков будем иллюстрировать объектами размером 5×5 и получающимися из них, например,

$$W x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix},$$

$$W_{3,2} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Как известно [10, стр. 273],

$$W_{l,k} x_1, \ldots, x_n = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_{n-k}} \cdot \prod_{n \geq i > j \geq 1,\; i \neq l, j \neq l} x_i - x_j, \tag{13}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $n - k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ из набора $1, 2, \ldots, n$.

Нам также потребуется третья тета-функция Якоби [11]

$$\vartheta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} \cos(2kz),$$

и формула тета-преобразования Якоби-Пуассона [11]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+\pi k)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{a}} e^{i2kt}. \tag{14}$$

3. Случай равного числа уравнений и неизвестных. Теперь основным объектом нашего изучения становится система линейных уравнений (12) с квадратной или прямоугольной матрицами. Далее используются обозначения, введённые в соотношениях (10)–(12).

Докажем корректность системы (12) в случае равенства числа неизвестных и уравнений. Напомним, что это означает, что в случае квадратной матрицы система всегда имеет, притом единственное, решение.

Теорема 1. *Матрица A при $m = n$ — невырождена, а её определитель равен*

$$|A| = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W q^{-2n}, \dots 1, \dots, q^{2n} . \tag{15}$$

□

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & q & q^4 & q^9 & q^{16} \\ q & 1 & q & q^4 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 1 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & q & 1 \end{vmatrix}$$

Элементы этого определителя можно разложить на множители

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2} = q^{i^2} \cdot q^{-2ij} \cdot q^{j^2} .$$

Следовательно, из i–той строки можно вынести q^{i^2}, а из j–ого столбца — q^{j^2}. Проведем эту операцию со всеми строками и столбцами:

$$|A| = q^4 \cdot q \cdot 1 \cdot q \cdot q^4 \cdot \begin{vmatrix} q^{-4} & q^{-3} & 1 & q^5 & q^{12} \\ 1 & q^{-1} & 1 & q^3 & q^8 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^8 & q^3 & 1 & q^{-1} & 1 \\ q^{12} & q^5 & 1 & q^{-3} & q^{-4} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & q^4 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & q^{-4} & q^{-8} \end{vmatrix} .$$

Теперь элементами промежуточного определителя являются q^{-2ij}, осталось вынести из i-х строк множители q^{2ni}, $i = -2n, \dots, 2n$, произведение которых в силу симметрии равно 1:

$$q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & q^4 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & q^{-4} & q^{-8} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & q^8 & q^{12} & q^{16} \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & q^8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^{-2} & q^{-4} & q^{-6} & q^{-8} \\ 1 & q^{-4} & q^{-8} & q^{-12} & q^{-16} \end{vmatrix} =$$

$$= q^{20} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & q^{4^2} & q^{4^3} & q^{4^4} \\ 1 & q^2 & q^{2^2} & q^{2^3} & q^{2^4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^{-2} & q^{-2^2} & q^{-2^3} & q^{-2^4} \\ 1 & q^{-4} & q^{-4^2} & q^{-4^3} & q^{-4^4} \end{vmatrix} .$$

В общем же случае результат проведенных преобразований выглядит так:

$$\det A = \prod_{i=-n}^{n} q^{i^2} {}^2 \cdot \prod_{j=-n}^{n} q^{j^2} {}^2 \cdot \prod_{i=-n}^{n} q^{2ni} \cdot W q^{-2n}, \dots 1, \dots, q^{2n} =$$

$$= q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W q^{-2n}, \dots 1, \dots, q^{2n} = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot \prod_{i,j=-n, \quad i \neq j}^{n} q^{-2i} - q^{-2j} .$$

Отличие от нуля определителя Вандермонда гарантируется тем фактом, что в рассматриваемом нами случае справедливы неравенства $0 < q < 1$, при выполнении которых все сомножители в последней формуле для определителя ненулевые. ■

Замечание. Задача об обосновании корректности конечномерной линейной системы (12) была поставлена Л.А. Мининым и С.М. Ситником. Затем через довольно продолжительное время на основании численных расчётов А.С. Тимашовым была угадана формула для определителя (15). Строгое доказательство формулы (15) и вместе с тем корректности рассматриваемой линейной системы было найдено С.Н. Ушаковым.

Для формулировки дальнейших результатов введём понятие вектора-палиндрома, которое отражает симметричность компонент вектора относительно его «середин».

Определение 1. *Назовём n-мерный вектор x палиндромом, если выполняется соотношение между компонентами вектора*

$$x_i = x_{n+1-i}, \quad i = 1, \dots, n .$$

Теорема 2. *Пусть дана система линейных уравнений*

$$A \cdot x = b , \tag{16}$$

где A – невырожденная матрица размера $n \times n$, для элементов которой выполняется соотношение

$$a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j} \ \forall i, j = 1, \dots, n ,$$

и вектор b – палиндром, Тогда решение системы — вектор x также является палиндромом.

Условие теоремы 2 по сути означает, что каждая строка и столбец квадратной матрицы A сами являются палиндромами.

□ Так как матрица A — невырождена, то существует единственное решение x. Каждую i-ю строчку системы можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j = b_i .$$

Докажем, что вектор $y = x_n, x_{n-1} \dots, x_1$ также является решением (16), а это в силу единственности решения и будет означать утверждение теоремы.

Действительно, для i-й строчки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-i,j} \cdot x_j = b_{n+1-i} = b_i \,. \blacksquare$$

Продемонстрируем важность введённого понятия палиндрома, которое даёт возможность, используя свойство симметрии данных задачи, существенно уменьшать объём вычислений и, таким образом, повышать эффективность и работоспособность численных алгоритмов.

Следствие 1. *Для системы (12) решение симметрично, то есть* $d_k = d_{-k}$.

$\square$ Действительно, заметим, что для системы (12) выполнены условия теоремы 2:

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2} = q^{(n+1-i-(n+1-j))^2} = a_{n+1-i,n+1-j} \,.$$

Следовательно, $d_k = d_{-k}$. $\blacksquare$

Благодаря этому следствию, при численном решении уменьшается как число уравнений (практически вдвое), так и разрыв в порядке между элементами матрицы. Это приводит к уменьшению вычислительной сложности задачи и сокращению требуемого времени компьютерных расчётов, что позволяет рассматривать системы более высоких порядков при том же затраченном времени.

Важно, что коэффициенты d_k для приближений узловой функции, которые определяются равенством (10) и являются решениями системы (11)-(12), можно найти аналитически в явном виде.

Теорема 3. *Для коэффициентов* d_k *верна формула:*

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,n+1} q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}}{W q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}} \,. \tag{17}$$

$\square$ Действительно, по правилу Крамера

$$d_k = \frac{\Delta_k}{|A|} \,.$$

Проведя с Δ_k преобразования, аналогичные уже проведённым при доказательстве теоремы 1 , получим

$$\Delta_k = (-1)^{n+1+k+1+n} q^{-k^2} q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} W_k q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n} \,,$$

отсюда

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_k q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}}{W q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}} \,.$$

Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & q & q^4 & 0 & q^{16} \\ q & 1 & q & 0 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & 1 & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 0 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & q^{-1} & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} =$$

$$= q^{20} \cdot q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} =$$

$$= -q^{20} \cdot q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & q^{4^2} & q^{4^4} \\ 1 & q^2 & q^{2^2} & q^{2^4} \\ 1 & q^{-2} & q^{-2^2} & q^{-2^4} \\ 1 & q^{-4} & q^{-4^2} & q^{-4^4} \end{vmatrix} . \quad \blacksquare$$

Следствие 2. *С учётом (13),*

$$d_k = \frac{(-1)^k q^{-k^2} \sum q^{\alpha_1} q^{\alpha_2} \ldots q^{\alpha_{2n+1-k}}}{\prod\limits_{i \neq k, i=-n}^{n} |q^k - q^i|}, \tag{18}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $2n+1-k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1-k}$ из набора $-n, -n+1, \ldots, n$.

Следствие 3. *Контрольные суммы можно записать в виде отношения определителей:*

$$H(n, j, \sigma) = q^{j^2} \frac{W q^{-2n} \ldots q^{-2}, q^{-2j}, q^2, \ldots q^{2n}}{W q^{-2n} \ldots q^0 \ldots q^{2n}} .$$

$$g_n^\sigma(j) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \, q^{(k-j)^2} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} q^{(k-j)^2} (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,\,n+1} q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}}{W q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}} =$$

$$= q^{j^2} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k q^{-2kj} \frac{W_{k,\,n+1} q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}}{W q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}} .$$

Сумма $\sum\limits_{k=-n}^{n} (-1)^k q^{-2kj} W_{k,\,n+1} q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}$ *представляет собой разложение по* $n+1$ *строке определителя* $W q^{-2n} \ldots q^{-2}, q^{-2j}, q^2, \ldots q^{2n}$.

Следствие 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\sigma \to \infty} |H(n, n+1, \sigma)| = C_{2n+1}^{m} .$$

Несмотря на наличие явной формулы (18) для коэффициентов d_k, применять её проблематично, что связано как с делением на малые величины, так и с вычислением суммы с большим числом C_{2n+1}^{m+1} слагаемых. Поэтому численное решение задачи (12) является предпочтительным. Для проверки решения используются контрольные суммы $H(n, j, \sigma)$.

К задаче интерполяции могут применяться разные требования, связанные с точностью значений узловой функции в целых точках отрезка интерполяции, скоростью восстановления интерполируемой функции, диапазоном параметра σ. Отсюда возможны несколько разных подходов к решению этой задачи. Во-первых, узловую функцию можно строить во всех целых точках отрезка интерполяции, что в сочетании с использованием специализированных вычислительных пакетов (например, «Mathematica») даёт высокую точность для восстанавливаемой функции. Данный подход изучен в работах [6]- [9]. Во-вторых, узловую функцию можно строить на отрезке, состоящем из меньшего числа точек, чем требуемый отрезок интерполяции. В этом случае используются значения узловой функции в целых точках, вообще говоря, отличающиеся от нуля. Это влияет на точность восстановления, но зато уменьшает количество операций, необходимых для вычислений. Как показано в следствии 4, при росте σ значения $H(n, j, \sigma)$ $(j > n)$ становятся недопустимо велики. Для уменьшения данного эффекта можно воспользоваться следующим подходом: при построении узловой функции число уравнений берётся больше числа неизвестных $(m > n)$, см. далее.

Рассмотрим второй подход. В этом случае $m = n$, система (11) по теореме 1 совместна. Единственное решение вычисляется, например, методом Гаусса. Границы использования σ, при которых вычисления имеют смысл, естественным образом зависят от n.

Таблица 1

Контрольные суммы при $n = 12$.

σ	1.0	2.0	3.0	4.0
$H(12,0,\sigma)$	1	1	0.99	52
$H(12,4,\sigma)$	$-1.7\cdot10^{-20}$	$9.9\cdot10^{-13}$	$-7.2\cdot10^{-5}$	38
$H(12,8,\sigma)$	$-1.6\cdot10^{-20}$	$-8.3\cdot10^{-14}$	$3.6\cdot10^{-7}$	13
$H(12,12,\sigma)$	$-7.9\cdot10^{-23}$	$-3.8\cdot10^{-14}$	10^{-6}	1.8
$H(12,14,\sigma)$	$1.1\cdot10^{-3}$	63.3	$2.3\cdot10^{4}$	$1.8\cdot10^{5}$
$H(12,16,\sigma)$	$3.2\cdot10^{-6}$	67	$2.9\cdot10^{5}$	$6.4\cdot10^{6}$

Как видно из табл. 1, с практической точки зрения сомнительны вычисления уже при $\sigma > 3$. Вне отрезка интерполяции $H(n, x, \sigma)$ сильно осциллирует. Кроме того, чем больше n, тем меньше растет контрольная сумма для $H(n, j, \sigma)$ за пределами отрезка интерполяции. Это иллюстрирует уже табл. 2.

Таблица 2

Наибольшие значения в целых точках за пределами отрезка интерполяции.

$H(20,21,1.0)$	$5.5\cdot10^{-5}$	$H(20,23,2.0)$	41.7	$H(20,26,3.0)$	$2.9\cdot10^{7}$
$H(40,41,1.0)$	$2.5\cdot10^{-9}$	$H(40,43,2.0)$	3.57	$H(40,46,3.0)$	$4.6\cdot10^{6}$
$H(60,61,1.0)$	$1.1\cdot10^{-13}$	$H(60,63,2.0)$	0.29	$H(60,66,3.0)$	$1.6\cdot10^{6}$
$H(80,81,1.0)$	$5.1\cdot10^{-18}$	$H(80,83,2.0)$	0.02	$H(80,86,3.0)$	$4.7\cdot10^{5}$

4. Случай переполненных систем. Теперь рассмотрим систему (11) с числом уравнений, большим, чем число неизвестных. Начнём с вычисления ранга этой системы.

Следствие 5. *Ранг системы (11) равен $2n+1$.*

□ Действительно, поскольку изучаемый в теореме 1 определитель при $m > n$ является наибольшим ненулевым минором матрицы A размера $(2n+1)\times(2m+1)$, то её ранг равен $2n+1$. ■

При $m > n$ система (11) становится несовместной, коэффициенты d_k вычисляются методом наименьших квадратов. Для этого уравнение (12) умножается на матрицу, сопряженную к A. Как известно, $A^* = e\bar{A}^T$, элементы этой матрицы $a^*_{ij} = a_{ji} = \exp -(j-i)^2/2\sigma^2$. Получаем новую систему

$$C\cdot x = z\,, \tag{19}$$

в которой

$$c_{ij} = \sum_{k=-m}^{m} \exp -\frac{(i-k)^2}{2\sigma^2}\cdot \exp -\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2}\,,$$

$$z_j = \exp -\frac{j^2}{2\sigma^2}\,,\quad i,j = -n\ldots,0,\ldots n\,.$$

Систему (19) решаем, учитывая теорему 2. Явление осцилляции за пределами отрезка интерполяции в данном случае может быть значительно уменьшено, хотя при этом возникает эффект регуляризации, при котором значение функции $H(n,m,x,\sigma)$ в нулевой точке «растекается» по соседним узлам. Указанные эффекты можно увидеть в табл. 3.

Таблица 3

Контрольные суммы при $n=12$, $m=13$, и при $m=24$.

σ	1.0	2.0	3.0	5.0
$H(12,13,0,\sigma)$	0.99	0.97	0.82	0.62
$H(12,13,6,\sigma)$	$-6.7\cdot10^{-5}$	-0.06	0.05	0.06
$H(12,13,12,\sigma)$	$-1.1\cdot10^{-3}$	$-6.7\cdot10^{-3}$	0.03	1.8
$H(12,13,14,\sigma)$	$5.1\cdot10^{-4}$	1.6	7.9	-2.6
$H(12,13,16,\sigma)$	$1.7\cdot10^{-6}$	3.5	89	-39
$H(12,24,0,\sigma)$	1.00	0.94	0.78	0.48
$H(12,24,6,\sigma)$	$-7.2\cdot10^{-5}$	-0.04	-0.04	-0.01
$H(12,24,12,\sigma)$	$-1.1\cdot10^{-3}$	-0.01	-0.03	0.01
$H(12,24,14,\sigma)$	$4.8\cdot10^{-4}$	-0.01	0.03	0.08
$H(12,24,16,\sigma)$	$1.6\cdot10^{-6}$	0.01	-0.03	-0.09

Теорема 4. *При $m\to\infty$ элементы матрицы C примут вид*

$$c_{ij} = \begin{cases} q^{\frac{i-j^2}{2}} m_\sigma, & \text{при нечётном } (i+j),\\ q^{\frac{i-j^2}{2}} M_\sigma, & \text{при чётном } (i+j), \end{cases} \tag{20}$$

где $m_\sigma = \vartheta_3 \frac{1}{2}; q_\sigma$, $M_\sigma = \vartheta_3 0; q_\sigma$, $q_\sigma = \exp -\pi\sigma$.

□ Преобразованием Якоби-Пуассона c_{ij} превращаются в пределе в тета-функцию

$$\lim_{m\to\infty} c_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(i-k)^2}{2\sigma^2} \cdot \exp -\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{i^2 - 2ik + k^2}{2\sigma^2} - \frac{j^2 - 2jk + k^2}{2\sigma^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{k^2 - (i+j)k}{\sigma^2} - \frac{j^2 + i^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(k - \frac{i+j}{2})^2}{\sigma^2} - \frac{2j^2 + 2i^2 - (i+j)^2}{4\sigma^2}.$$

или, с учётом (14),

$$\lim_{m\to\infty} c_{ij} = \exp -\frac{(i-j)^2}{4\sigma^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(k - \frac{i+j}{2})^2}{\sigma^2} =$$

$$= \exp -\frac{(i-j)^2}{4\sigma^2} \cdot \vartheta_3 \frac{\pi(i+j)}{2}; q_\sigma,$$

где $q_\sigma = \exp -\pi\sigma$. В связи с периодичностью и четностью функция $\vartheta_3(i+j)/2\pi; q_\sigma$ принимает всего лишь два значения, причем это или минимальное значение $m_\sigma = \vartheta_3\pi/2; q_\sigma$, или максимальное $M_\sigma = \vartheta_3 0; q_\sigma$. ■

5. Заключение. В работе рассмотрена задача об интерполяции произвольной функции при помощи целочисленных сдвигов гауссианов. Эта задача имеет ряд приложений, например, в теории сигналов. Анализируются недостатки и ограничения известных подходов к решению этой задачи. Для их преодоления рассматривается метод конечномерных аппроксимаций для нахождения узловой функции задачи, на вычислении которой основан интерполяционный метод. Рассматриваются случаи, когда аппроксимирующая система имеет равное число неизвестных и уравнений, а также число уравнений больше числа неизвестных. Для первого случая доказана корректность конечномерной системы линейных уравнений, выведена явная формула для главного определителя системы, изучены предельные свойства решений и их связь с тета-функциями Якоби. Для переполненных систем с числом уравнений больше числа неизвестных обосновывается на основании численных расчётов их необходимость и преимущества использования, также доказаны предельные свойства решений, проанализированы контрольные суммы.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / AMS Mathematical Surveys and Monographs. – 2007. – 141. – 349 p.
2. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Матем. заметки. –2014. – 96;2. – С.239-250.

3. Журавлёв М.В., Киселев Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета–функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. –2010. – 67. – С.107-116.
4. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – 17/2. – С.89-99.
5. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика. –2014. – 12 (183);35. – С.214-217.
6. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2013. – 32. – С.184-186.
7. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – 2;56. – С.90-94.
8. Ситник С.М., Тимашов А.С. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов // Вестник Воронежского института МВД России. – 2014. – 2. – С.163–171.
9. Ситник С.М., Тимашов А.С. «Новые информационные технологии в автоматизированных системах» // Материалы семнадцатого научно–практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – 2014. – С.292-300.
10. И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. –М.: Наука, 1966. – 384 с.
11. E. T. Whittaker, G. N. Watson. A Course of Modern Analysis / Cambridge Mathematical Library, 1996. – 620 p.

METHOD OF FINITE DIMENSIONAL APPROXIMATIONS IN PROBLEMS OF INTERPOLATION BY QUADRATIC EXPONENTIALS

S.M. Sitnik, A.S. Timashov, S.N. Ushakov

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av., 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru; aleksandrtim@rambler.ru
Voronezh State University,
University Sq., 1, Voronezh, 394036, Russia, e-mail: ushakowww@yandex.ru

Abstract. Some interpolation problems by integer shifts of Gaussians are under consideration. Known approaches for these problems are met with numerical difficuilties. Due to it, another method based on finite dimensional approximations by linear systems is proposed. The correctness of systems under consideration is proved, limit properties of solutions and their connections with Jacobi's theta-functions are studied. Both cases of well-determined and overdetermined systems are investigated.

Key words: integer shifts, Gaussian, linear systems, theta-functions, overdetermined systems.