MSC 26A33

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ ПО СТАРШИМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

М.В. Кукушкин

Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: kukushkinmv@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается вариант метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для краевой задачи для уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Изучается близость точного решения к приближённому в варианте метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам.

Ключевые слова: дробные интегралы, метод фиктивных областей, задача Дирихле.

Обоснование метода фиктивных областей на дифференциальном уровне для задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в варианте с продолжением по старшим и младшим коэффициентам рассмотрено в работе А.Н. Бугрова [1], где получены неулучшаемые по порядку ε оценки для $u(x)-u_\varepsilon(x)$. Отметим также работы: [2], В.Я. Ривкинда [3,4], В.Д. Копченова [5], А.Н. Коновалова [6], С.А. Войцеховского [7]. Вторая и третья краевые задачи для эллиптических уравнений рассмотрены в работах Л.А. Руховца [8], В.Д. Копченова [9], А.Н. Бугрова [1], Г.П. Астраханцева [10]. В работах Л.А. Руховца [11], А.Д. Ляшко, М.М. Карчевского, Н.Н. Саримова [12] дается обоснование метода фиктивных областей для видоизмененной задачи Дирихле [13] для эллиптических уравнений в многосвязной области. Некоторые квазилинейные эллиптические уравнения рассмотрены в работах С.А. Войцеховского [14,15], В.Н. Новиченкого [16].

Результатом настоящей работы является обоснование метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для задачи Дирихле для уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах для области звездного типа. Разрешается вопрос единственности решения задачи в области звездного типа при условии, когда младшие коэффициенты допускают расширения из некоторого класса функций.

Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать: $i,j=1,2,...,n.$, $\alpha_i\in(0,1)$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения

$$\Omega=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n\,,\ a<x_i<b\,,\ i=1,2,...,n\}\,,$$

$$\langle f,g\rangle_0\equiv\langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx,\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}\,,$$

$$I^\alpha_{b-}(L_1)=\{f(x):f(x)=D^{-\alpha}_{bx}\varphi(t),\ \varphi(x)\in L_1(a,b)\}\,.$$

Пусть $G \subseteq \Omega$ ограниченная односвязная область звездного типа, с достаточно гладкой границей ∂G, в $\bar{G}$ определен дифференциальный оператор второго порядка с дробной производной в младших членах действующий из пространства $W_2^l(G)$, $l \geq [\frac{n}{2}] + 2$

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_{x_i}[a_{ij}(x)\mathcal{D}_{x_j}u(x)] - \sum_{i=1}^{n} c_i(x) D_{ax_i}^{\alpha_i} u, \quad x \in \bar{G}\,, \tag{1}$$

$$r_1 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\gamma_i\gamma_j \leq r_2 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2\,, \quad 0 < r_1 \leq r_2\,, \tag{2}$$

$$a_{ji}(x) \in W_2^1(G)\,, \tag{3}$$

коэффициенты $c_i(x)$- сужения на $\bar{G}$ функций $\omega_i(x)$ из $\bar{\Omega}$, удовлетворяющих условиям

$$\omega_i(x) \equiv \omega_i(x_i) \in I_{b-}^{\alpha}(L_1),\ \varphi_i(x_i) \geq 0\,.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f(x) \in L_2(G)\,, \tag{4}$$

$$u(x) \in W_2^l(G),\ u(\partial G) = 0\,. \tag{5}$$

Рассмотрим вариант метода фиктивных областей для задачи (4),(5) с продолжением по старшим коэффициентам. Фиктивной областью будем полагать: $G_0 = \bar{\Omega} \setminus \bar{G}$. Приближенное решение $u_\varepsilon(x)$ найдем из решения краевой задачи

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_{x_i}[a_{ij}^{\varepsilon}(x)\mathcal{D}_{x_j}u_\varepsilon(x)] - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) D_{ax_i}^{\alpha_i} u_\varepsilon = f^\varepsilon(x), \quad x \in \bar{\Omega}\,, \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(x) \in W_2^l(\Omega),\ u_\varepsilon(\partial\Omega) = 0 \tag{7}$$

на общей границе Γ областей G и G_0 ($\Gamma = \partial G \bigcap \partial G_0$) выполнены условия сопряжения

$$[u_\varepsilon(x)] = 0, \ \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}u_\varepsilon(x)\right] = 0, \tag{8}$$

где ν внешняя относительно G нормаль к Γ, а $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе границы Γ

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x)\,, & x \in \bar{G}\,, \\ \delta_{ij}\varepsilon^{-2}\,, & x \in G_0\,. \end{cases} \tag{9}$$

Правая часть уравнения (6) берется в виде

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in \bar{G}\,, \\ 0\,, & x \in G_0\,. \end{cases} \tag{11}$$

С целью получения оценки близости решения задачи (6)-(8) к решению исходной задачи (4)-(5), продолжим $u(x)$ в G_0, положив $u(x) = 0,\ x \in G_0$. Рассмотрим разность

$$\sigma(x) = u(x) - u_\varepsilon(x)\,. \tag{12}$$

Согласно (4)–(7) имеем

$$L_\varepsilon \sigma = 0,\ x \in \bar{\Omega}\,, \tag{13}$$

$$\sigma(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\,. \tag{14}$$

По условиям (8) с учетом выбранного продолжения $u(x)$ в G_0 на Γ для $\sigma(x)$ имеем

$$[\sigma(x)] = 0,\ \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)\right] = \theta(x)\,, \tag{15}$$

где

$$\theta(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}u(x),\ x \in \Gamma\,.$$

Уравнение (13) умножим на $\sigma(x)$, и проинтегрируем его по Ω. Тогда с учетом условий сопряжения (15) и граничных условий (14) будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} L_\varepsilon\sigma(x)dx = \int\limits_{G} L_\varepsilon\sigma(x)dx + \int\limits_{G_0} L_\varepsilon\sigma(x)dx = -\int\limits_{G}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx -$$

$$-\varepsilon^{-2}\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx + \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx +$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(-\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx - \int\limits_{\Omega}\sigma(x)\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)D_{ax_i}^{\alpha_i}\sigma dx\,.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx + \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(-\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}u(x)dx = \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\theta(x)dx\,,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\sigma(x)\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)D_{ax_i}^{\alpha_i}\sigma dx + \varepsilon^{-2}\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx +$$

$$+\int\limits_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\varepsilon(x)\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx = \int\limits_\Gamma \sigma(x)\theta(x)dx\,. \tag{16}$$

Заметим, что согласно сделанным предположениям относительно $\sigma(x)$, $\omega_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n.$, $x \in \bar{\Omega}$, из [17, стр.46] и из рассуждений в ходе доказательства теоремы 1 [18], следует, что первое слагаемое в левой части (16) неотрицательно. Оценим второе слагаемое в (16). Учитывая неотрицательность всех слагаемых левой части и применив неравенство Коши-Буняковского к правой части (16), будем иметь

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx \le \left(\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Gamma |\theta(x)|^2dx\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Используя первое неравенство Эрлинга [19,20], получим

$$\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2dx \le C_1\left(\int\limits_{G_0}|\sigma(x)|^2dx + \int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx\right). \tag{18}$$

Заметим, что для функций, равных нулю на части границы области G_0, имеет место частный случай неравенства Фридрихса [21]

$$\int\limits_{G_0}|\sigma(x)|^2dx \le C_2\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx\,. \tag{19}$$

Тогда, согласно (18) и (19), будем иметь

$$\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2dx \le C_3\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx\,. \tag{20}$$

Объединяя (17) и (20), получим

$$\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx \le \varepsilon^4 C_3\int\limits_\Gamma |\theta(x)|^2dx = \varepsilon^4 C_4\,. \tag{21}$$

Из (19) и (21) следует

$$\int\limits_{G_0}|\sigma(x)|^2dx \le \varepsilon^4 C_5\,. \tag{22}$$

Для оценки $\sigma(x)$ в G используем равенство (16) и условие (2), тогда аналогично (17) получим

$$r_1\int\limits_G\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx \le \left(\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Gamma |\theta(x)|^2dx\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Из (20),(21),(23) следует

$$\int_G \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx \le \varepsilon^2 C_6 \,. \qquad (24)$$

Учитывая, что $\sigma(x) = 0,\ x \in \partial G \setminus \Gamma$, из (19), (24) следует

$$\int_G |\sigma(x)|^2 dx \le \varepsilon^2 C_7 \,, \qquad (25)$$

и теперь из (24),(25) следует оценка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(G)} \le \varepsilon C_8 \,. \qquad (26)$$

Таким образом, установлена близость $u_\varepsilon(x)$ и $u(x)$ в смысле метрики, порождаемой нормой пространства $W_2^1(G)$.

Заметим, что, в силу теоремы 2 [18], имеет место энергетическое неравенство

$$\|L_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \ge C\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \,, \qquad (27)$$

которое дает непрерывную зависимость сильного решения от правой части (6). Учитывая в следствии (27) единственность решения задачи (6),(7), из (26) в силу неравенства треугольника следует единственность решения задачи (4)-(5).

Литература

1. Бугров А.Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Численые методы решения задач теории упругости и пластичности. Ч.2 / Новосибирск, 1978. –С.24-35.
2. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1991.
3. Ривкинд В.Я. Об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и об одном численом методе решения задачи Дирихле // Докл.АН СССР. – 1963. – 149;6. – С.1264-1267.
4. Ривкинд В.Я. Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. Физика. – 1964. – 3. – С.37-52.
5. Копченов В.Д. Приближенное решение задачи Дирихле методом фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. – 1968. – 4;1. – С.151-164.
6. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики / Новосибирск, 1975. – С.191-199.
7. Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка // 1981. – Деп. в ВИНИТИ. – 2455-81.
8. Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. –1967. – 3;4. – С.698-701.

9. Копченов В.Д. Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач // Труды МИ АН СССР. – 1974. – 131. – С.119-127.
10. Астраханцев Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка с естественными граничными условиями // ЖВМ и МФ. – 1978. – 18;1. – С.118-125.
11. Руховец Л.А. Метод фиктивных областей в задачах об установившихся ветровых течениях // Численные методы механики сплошной среды. – 1981. – 12;2. – С.98-116.
12. Карчевский М.М., Саримов Н.Н. Метод фиктивных областей для одной задачи теории смазки подшибников скольжения // Сеточные методы решения задач математической физики. – Казань, 1984. – С.75-80.
13. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Физматгиз, 1962.
14. Войцеховский С.А.Метод фиктивных областей для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – 56. – С.7-14.
15. Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для одного класса нелинейных краевых задач // Вычислительная и прикладная математика. – 1986. – 58. – С.16-19.
16. Новиченко В.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – 57. – С.39-42.
17. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. / М.: Физматлит, 2003.
18. Кукушкин М.В. Полусильное решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной в младших членах // Доклады АМАН (в печати).
19. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. / М.: Наука, 1976.
20. Морен К. Методы гильбертого пространства. / М.: Мир, 1965.
21. Ректорнс К. Вариационные методы в математической физике и технике. / М.: Мир, 1985.

FICTITIOUS DOMAINS METHOD WITH CONTINUATION WITH RESPECT TO LEADING COEFFICIENTS FOR NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES IN LOWER TERMS

M.V. Kukushkin

Institute of Applied Mathematics And Automation,
Shortanova St., 53, Nalchik, 360000, Russia, e-mail: kukushkinmv@rambler.ru

Abstract. A variant of fictitious domains method is under consideration with continuation with respect to leading coefficients. It is applied for numerical solution of boundary-value problem for the second order differential equation with fractional derivatives in lower terms. The result is proved on proximity of exact and numerical solutions.

Key words: fractional integrals, fictitious domain method, Dirichlet's problem.