MSC 26D07

НЕРАВЕНСТВА ЯНГА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

А.А. Ковальчук, С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Ключевые слова: неравенство Янга, неравенство Гельдера

Оценка произведений нескольких величин в терминах суммы некоторых других величин является известной математической задачей. Подобные неравенства играют существенную роль в самой математике и многих её приложениях: математической экономике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных уравнениях, теории сигналов, оценивании сложности прикладных алгоритмов и т.д. Примером таких оценок является неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. Другим классическим примером является доказанное в 1912 г. английским математиком Вильямом Янгом знаменитое неравенство, названное впоследствии его именем. Для двух чисел в простейшем случае неравенство Янга записывается в виде

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1}$$

при условиях $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1, x, y > 0$.

С.М. Ситником было замечено, что на самом деле неравенство Янга в традиционной формулировке — это не одно, а пара неравенств. Так как левая часть неравенства (1) симметрична, то на самом деле справедливо аналогичное второе неравенство

$$xy \le \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}, \tag{2}$$

и поэтому возникает естественная задача о сравнении неравенств (1) и (2).

Далее без ограничения общности будем полагать, что выполнены условия

$$y \ge x, p \ge 2 \ge q > 1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3), тогда*
1. Если $y \ge x \ge 1$, то оценка (1) лучше, чем (2).
2. Если $1 \ge y \ge x \ge 0$, то оценка (2) лучше, чем (1).
3. Если $y \ge 1 \ge x \ge 0$, то возможны два варианта. При соотношении

$$y > y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

точнее неравенство (1). При соотношении

$$1 < y < y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

при данном y существует критическое значение $x = x, 0 < x < 1$, которое является единственным решением трансцендентного уравнения

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}. \tag{4}$$

В этом случае при $x \in (0, x)$ оценка (2) лучше, чем (1), а при $x \in (x, 1)$ оценка (1) лучше, чем (2).

На все рассмотренные случаи можно привести численные примеры [2-4].

Аналогичные результаты получены и для n чисел, но только в том случае, когда все числа лежат с одной стороны от единицы. Когда числа могут быть расположены с разных сторон от единицы, то результаты неизвестны даже для трёх чисел. Получены только некоторые результаты на основе компьютерных вычислений. Всего в этом случае получаем $n!$ вариантов обобщений неравенства Янга.

Теорема 2. *При условии, что выполнены неравенства $0 \le x \le y \le z \le \dots$, наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры p, q, r упорядочены по возрастанию $p \le q \le r \dots$, а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) — по убыванию.*

Теорема 3. *При условии, что выполнены неравенства $1 \le x \le y \le z \le \dots$, наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры p, q, r упорядочены по убыванию $p \ge q \ge r \dots$, а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) – по возрастанию.*

Рассмотрен также случай неравенств Янга (теперь мы знаем, что их два!) с парой произвольных взаимно дополнительных функций Янга. По обычной схеме [1] можно из полученного уточнённого неравенства Янга вывести уточнённое неравенство Гёльдера (или исторически более точно: Роджерса-Гёльдера-Рисса). Результаты получаются как для дискретного, так и для интегрального случаев.

Литература

1. Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M. Classical and new inequalities in Analysis / Kluwer, 1993.

2. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy-Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey// http:arxiv.org/abs/1012.3864, 2012. – 51 p.

3. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств // В кн.: Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия «Математический форум». Том 3 / Исследования по математическому анализу. Ред. Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев / Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания: Владикавказ, 2009. – С.221-266.

4. Ситник С.М. Сколько неравенств заключено в неравенстве Юнга // Труды Всероссийской заочной научно–практической конференции «Актуальные проблемы обучения математи-

ке», посвящённой 155-летию со дня рождения Андрея Петровича Киселёва / Орёл: Орловский государственный университет, 2007. – С.464-469.

WILLIAMS-YANG'S INEQUALITIES FOR SEVERAL VARIABLES

A.A. Kovalchuk, S.M. Sitnik

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Key words: Yang's inequality, Gőlder's inequality.