MSC 53D15, 53B05

О ГЕОМЕТРИИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С φ-СВЯЗНОСТЬЮ

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия, e-mail: bukusheva@list.ru

Аннотация. На многообразии с контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ определяется и исследуется φ-связность. Находятся условия, при которых φ-связность является адаптированной к контактной метрической структуре.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, внутренняя связность, тензор кривизны Схоутена, φ-связность.

1. Введение. Понятия N-продолженной связности и N-связности на многообразии с почти контактной метрической структурой введены в работах [1,2]. Связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена [3,4] являются частными случаями N-связности. В основе определения N-связности лежат внутренняя связность [5,6] и эндоморфизм $N : D \to D$ распределения почти контактной метрической структуры. Выбирая эндоморфизм N, мы получаем связность с нужными свойствами. В настоящей работе мы останавливаемся на изучении случая $N = \varphi$.

Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, ΓTX – $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Рассмотрим на X почти контактную метрическую структуру $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ [5], где φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma TX$, называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{span}(\vec{\xi})$ его оснащение: $TX = D \oplus D^\perp$. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = \mathrm{span}(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Будем называть D распределением почти контактной метрической структуры.

На протяжении всей работы мы будем использовать адаптированные координаты. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ многообразия X будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [5]. Пусть $P : TX \to D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = \mathrm{span}(\vec{e}_a)$. На многообразии X, таким образом, определены неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$-адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, называется допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} .$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'} ,$$

где $A^a_{a'} = \partial x^a / \partial x^{a'}$.

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами $h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x})$, $C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{x}, \vec{y})$, $g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y})$, $g(\vec{x}, \psi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$, $L\vec{x} = C\vec{x} - \psi\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma TX$. В случае контактного метрического пространства эндоморфизм ψ совпадает с эндоморфизмом φ. В адаптированных координатах получаем: $h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da} C_{db}$, $\psi^b_a = g^{da}\omega_{da}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$.

Теорема 1 [7]. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:* $\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a$, $\tilde{\Gamma}^n_{na} = 0$, $\tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$, *где* $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой [5] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \quad \nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}} ;$$

$$2) \quad \nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = f\nabla_{\vec{x}}\vec{y} + (\vec{x}f)\vec{y} ,$$

где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, X). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ - естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} – координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$. В случае, когда $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ – внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ - поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью называется [1,2] связность в векторном расслоении (D, π, X), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ – вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Кручением N-продолженной связности называется кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$ где ∇ – внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ – внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство $\nabla_{\vec{\xi}}^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0$.

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$, где $Q = 1 - P$, названо Вагнером [8] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$. Тензор кривизны Схоутена возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных: $2\nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c = R_{abe}^c v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c$.

В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n - 2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [8]. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - \Gamma_n^a \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$, определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$ - соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba} N_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \qquad (1)$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}(\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c) \partial_{n+c}, \qquad (2)$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c},$$

$$[\vec{u}, \partial_{n+a}] = N_a^c \partial_{n+c} .$$

Из (1), (2) получаем выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}\,, \tag{3}$$

$$K(\vec{\xi},\vec{x})\vec{y} = P(\vec{x},\vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y}\,,$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma D$.

Говорят, что классическая связность ∇ с компонентами $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ соответствует N-продолженной связности ∇^N, если в адаптированных координатах все компоненты $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равны нулю, за исключением $G^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}$, $G^a_{nc} = N^a_c$.

Бежанку [9] определяет связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы $\nabla^B_{\vec{x}} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}$. В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна (почти) K-контактности почти контактной метрической структуры. Определим на многообразии с контактной метрической структурой классическую связность ∇^{φ} с помощью равенства $\nabla^{\varphi}_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})\varphi\vec{y}$. Назовем введенную связность φ-связностью. Отличными от нуля компонентами φ-связности будут $\Gamma^{Na}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma^{Na}_{nc} = \varphi^a_c$. Таким образом, φ-связность соответствует φ-продолженной связности с внутренней метрической связностью без кручения. Тензоры кручения и кривизны φ-связности определяются равенствами $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})\varphi\vec{y} - \eta(\vec{y})\varphi\vec{x}$, $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\varphi\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y},\vec{z}) - (\nabla_{P\vec{y}}\varphi)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x},\vec{z}) - (\nabla_{P\vec{x}}\varphi)\vec{z})$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma TX$ (см. (2) (3)).

Найдем условия, при которых φ-связность является адаптированной к контактной метрической структуре. Проведем для этого необходимые вычисления. Равенство $\nabla^{\varphi}g = 0$ сведется к следующем двум равенствам, записанным в адаптированных координатах: $\nabla^{\varphi}_a g_{bc} = 0$, $\nabla^{\varphi}_n g_{bc} = 0$. Первое из этих равенств выполняется в силу метричности исходной внутренней связности. Второе равенство перепишем в виде: $\nabla^{\varphi}_n g_{bc} = \partial_n g_{bc} - \varphi^a_b g_{ac} - \varphi^a_c g_{ba} = 0$. Из определения контактного метрического пространства непосредственно следует, что последнее равенство эквивалентно равенству $\nabla^{\varphi}_n g_{bc} = \partial_n g_{bc} = 0$. Аналогично, равенство $\nabla^{\varphi}_v \varphi = 0$ эквивалентно равенство $\partial_n \varphi^b_a = 0$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *φ-связность, заданная на контактном метрическом многообразии, адаптирована к контактной метрической структуре тогда и только тогда, когда пространство является K-контактным.*

Литература

1. Галаев С.В. О почти контактных метрических пространствах с метрической N-связностью // Современные научные исследования и инновации. – 2015. – 4 [Элек-

тронный ресурс]. URL: http: //web.snauka.ru/issues/2015/04/52011 (дата обращения: 25.06.2015).

2. Галаев С.В. О метрической N-продолженной связности на почти контактном метрическом пространстве // Современные научные исследования и инновации. – 2015. – 5 [Электронный ресурс]. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/05/53580 (дата обращения: 25.06.2015).

3. Tanno S. Variational problems on contact Riemannian manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. –314 – P.349-379.

4. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. –1930. – 103. – P.752-783.

5. Галаев С.В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – 12:1. – С. 16-22.

6. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2013. – 4. – С.1-9.

7. Галаев С.В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2014. – 8. – С.42-52.

8. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1941. – 5. – С. 173-255.

9. Bejancu A. Kähler contact distributions // Journal of Geometry and Physics. – 2010. – 60. – P.1958-1967.

THE GEOMETRY OF THE CONTACT METRIC SPACES φ-CONNECTION

A.V. Bukusheva

Saratov State University,
Astrakhanskaya St., Saratov, Russia, e-mail: bukusheva@list.ru

Abstract. The φ-connectedness is defined on the manifold possessed the contact metric structure $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ which is studied. The sufficient conditions when such a connectedness is adapted with contact metric structure.

Key words: almost contact metric structure, interior connection, Schouten curvature tensor, φ-connection.