MSC 35J30

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНЫХ КОРНЕЙ

А.О. Бабаян

Государственный инженерный университет Армении,
ул. Терьян, 105, Ереван, 0009, Армения, e-mail: barmenak@gmail. com

Ключевые слова: задача Дирихле, индекс дефекта оператора, характеристическое уравнение, эллиптические уравнения.

Пусть $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{13}$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что λ_j $(j = 1,2,3,4)$ – корни характеристического уравнения $\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k} = 0$, удовлетворяют условиям $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4$, $\lambda_j \neq \pm i$, $\Im\lambda_j \neq 0$. Решение уравнения (13) ищется в классе $C^4(D) \bigcap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u\big|_\Gamma = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_\Gamma = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{14}$$

Здесь f и g – заданные на Γ функции, $\frac{\partial}{\partial N}$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ. Отметим, что если $\Im\lambda_j > 0$ $(\Im\lambda_j < 0)$ при $j = 1,\dots,4$, то есть, если уравнение (13) неправильно эллиптическое, то задача (13), (14) в классической постановке (когда $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$) не является корректной ([1]). Для неправильно эллиптического уравнения (13) второго порядка в [2] был указан класс граничных функций, обеспечивающий корректность задачи Дирихле (исключая случай бесконечномерного ядра). Случай правильно эллиптического уравнения (13) был рассмотрен в [3], [4]. Неправильно эллиптическое уравнение (13) четвертого порядка при некотором расположении корней характеристического уравнения было рассмотрено в [5]. В предлагаемом сообщении рассматривается случай двукратных корней (который не был рассмотрен в [5]), причем следует отметить связь полученных результатов для случая правильно и неправильно эллиптического уравнения. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $\Im\lambda_1 > 0 > \Im\lambda_3$ (правильно эллиптическое уравнение (13)). Обозначим $\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu = \frac{i+\lambda_3}{i-\lambda_3}$, $z = \mu\nu$ (заметим, что при этих условиях $|z| < 1$).

$$P_{2k-4}(z) = \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^j + C_{k+1}^3 z^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^{2k-j-4}, \quad k = 3,4,\dots. \tag{15}$$

Теорема 1. *Однородная задача (13), (14) имеет конечное число K линейно независимых решений. Это число равно количеству номеров $k_j > 2$, для которых $P_{2k_j-4}(z) = 0$. Пусть $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$, тогда неоднородная задача (13), (14)имеет решение тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют K линейно независимым условиям.*

Пусть $\Im\lambda_1 \geq \Im\lambda_3 > 0$ (неправильно эллиптическое уравнение (13)). Обозначим $\mu = \dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu = \dfrac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3}$, предположим, что $|\mu| \leq |\nu|$. Пусть $\zeta = \mu\nu^{-1}$ и $B^{(m,\alpha)}(r)$ – множество функций, аналитических в области $r < |z| < 1$, которые вместе с производными до порядка m включительно удовлетворяют условию Гельдера в замкнутом кольце $r \leq |z| \leq 1$.

Теорема 2. *Однородная задача (13), (14) имеет конечное число K линейно независимых решений. Это число равно количеству номеров $k_j > 2$, для которых $P_{2k_j-4}(\zeta) = 0$ (P_{2k-4} определяется в (15)). Пусть $f \in B^{(2,\alpha)}(|\nu|)$ и $g \in B^{(1,\alpha)}(|\nu|)$, тогда неоднородная задача (13), (14)имеет решение тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют K линейно независимым условиям.*

Замечание. При $k = 3$ многочлен (15) P_2 имеет вид $P_2(z) = z^2 + 4z + 1$ и, следовательно, имеет корень $z = \sqrt{3} - 2$, который по модулю меньше единицы. Поэтому при $\mu = (\sqrt{3}-2)\nu^{-1}$ (правильно эллиптическое уравнение) или $\mu = (\sqrt{3}-2)\nu$ (неправильно эллиптическое уравнение) однородная задача (13), (14) имеет нетривиальное решение (в данном случае это функция $(1 - z\bar{z})^2$). Таким образом, дефектное число K может быть отлично от нуля. Численные эксперименты показывают, что при различных k многочлены (15) имеют различные нули в единичном круге, поэтому можно предположить, что число K может принимать только два значения: ноль или единица, однако это утверждение нуждается в доказательстве.

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / Москва: Наука, 1966.

2. Товмасян Н.Е. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм.ССР, сер. математика. – 1968. – 3, №6. – С.497-521.

3. Товмасян Н.Е., Закарян В.С. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях // Известия НАН Армении, сер. математика. – 2002. – 37, №6. – С.5-41.

4. Бабаян А.О. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении, сер. математика. – 2003. – 38, №6. – С.39-48.

5. Бабаян А.О. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. – С.56-69.

ABOUT DEFECT NUMBERS OF DIRICHLET'S PROBLEM IN CASE OF TWO-MULTIPLE ROOTS

A.O. Babayan

State Engeneering University of Armenia,
Neryan Str., 105, Erevan, 0009, Armenia, e-mail: barmenak@gmail. com

Key words: Dirichlet's problem, operator defect number, characteristic equation, elliptic equations.