MSC 26A33

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАМЯТЬЮ

Е.Н. Огородников

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Ключевые слова: динамические системы, задача Коши, память, вектор-функции, дробные производные.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$(ED_{0t}^{\alpha} - GD_{0t}^{\beta})(\dot{x} - Ax - f) = g(t), \tag{1}$$

где G, A — постоянные действительные. а E — единичная $[n \times n]$-матрицы ($n \in \mathbb{N}$); $x = x(t)$ — $[n \times 1]$-вектор искомых, а $f = f(t)$ и $g = g(t)$ — $[n \times 1]$-векторы заданных функций, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $t \in [0, T]$ $(T > 0)$; $D_{0t}^{\alpha}u = (D_{0t}^{\alpha}u)(t)$ и $D_{0t}^{\beta}u = (D_{0t}^{\beta}u)(t)$ — левосторонние дробные производные Римана-Лиувилля вектор-функции $u = u(t)$ порядков $\alpha > \beta \geq 0$ соответственно [1],[2]. Поводом для изучения систем уравнений подобного типа послужили аналогичные примеры скалярных дифференциальных уравнений, возникающие в задачах математического моделирования дробных осцилляторов, конструктивной основой которых в рамках принятых механических аналогий являлась гипотеза о наличии в динамической системе неидеальной вязко-упругой связи, описываемой дробным аналогом некоторых реологических моделей типа Кельвина, Зенера и др. [3].

Пусть $\alpha > \beta \geq 0 : \alpha \in (n-1, n], \beta \in (m-1, m]$, где $m \leq n$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Вводится класс вектор-функций

$$L_G^{\alpha,\beta}(0,T) = \{u(t) : u(t) \in L(0,T), I_{0t}^{n-\alpha}u \in AC^{n-m}[0,T],$$
$$(D_{0t}^{\alpha-m} - GI_{0t}^{m-\beta})u \in AC^{m}[0,T]\}.$$

Далее вводится вектор-функция $u(t) = \dot{x}(t) - Ax(t) - f(t)$, относительно которой обосновывается корректность постановки предварительной задачи типа Коши в классе вектор-функций $L_G^{\alpha,\beta}(0,T)$ для системы уравнений (1) с условиями

$$\lim_{t \to 0+} (D_{0t}^{\alpha-k} - GD_{0t}^{\beta-k})u = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0+} D_{0t}^{\alpha-m-j}u = a_{m+j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-m, \tag{3}$$

где a_k $(k = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, n-m)$ — заданные $[n \times 1]$-векторы.

Отмечается, что для $\beta < \alpha : \alpha - s \leq \beta < \alpha - s + 1$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ начальное условие (3) можно заменить локальным весовым условием $\lim\limits_{t \to 0+} [t^{n-\alpha}u(t)]^{(k)} = b_{n-k}$, $k =$

$0, 1, \ldots, s-1$. Решение начальной задачи (2), (3) удается найти в явном виде в терминах обобщённой дробной матричной экспоненциальной функции и интегрального оператора с указанной матрицей в ядре:

$$\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; G; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(G t^\alpha; \mu) = t^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(G t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \mu)},$$

$$E_{0t;G}^{\mu,\alpha} u = \int_0^t \mathrm{Exp}(\alpha, \mu; G; t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

где $E_\alpha(z;\mu)$ — функция типа Миттаг-Леффлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [1]. Оно имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Exp}(\alpha - \beta, \alpha - k + 1; G; t) a_k + (E_{0t;G}^{\alpha,\alpha-\beta} g)(t).$$

Окончательно задача сводится к решению классической задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + f + u, \quad x(0) = x_0,$$

структура которого хорошо известна.

Приведем пример дробно-осцилляционного уравнения

$$(D_{0t}^\alpha + \lambda I)(\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega^2 x - f) = 0, \tag{4}$$

в котором $\alpha \in (0,1)$; r, ω — известные постоянные величины, $x = x(t)$ координата частицы, I — тождественный оператор. Оно возникает в случае, когда вязко-упругая связь подчиняется следующему определяющему соотношению:

$$\beta\sigma + D_{0t}^\alpha \sigma = E(\beta\varepsilon + D_{0t}^\alpha \varepsilon) + \eta(\beta\dot{\varepsilon} + D_{0t}^\alpha \dot{\varepsilon}), \tag{5}$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — направление и деформация связи; β, η, E, $\alpha \in (0,1)$ — константы модели (5), определяемые экспериментально.

Обоснована корректность начальной задачи для уравнения (4) с начальными условиями

$$\lim_{t \to 0+} I_{0t}^{1-\alpha} \ddot{x} = u_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

в классе функций $x(t) : \ddot{x}(t) \in L^{\alpha,1}(0,T)$. Решение находится в явном виде.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М: Физматлит, 2003.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / Elsevier: North-Holland Mathematics Studies, 2006.

3. Огородников Е.Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ. – 2013. – 1(30). – С.245-252.

ABOUT CAUCHY TYPE PROBLEM FOR THE CLASS OF MODEL DYNAMIC SYSTEMS WITH MEMORY

E.N. Ogorodnikov

Samara State Technological University,
Molodogvardeiskaya Str., 244, Samara, 443100, Russia, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Key words: dynamic systems, Cauchy's problem, memory, vector functions, fractional derivatives.