MSC 85A30

# О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

**В.Е. Федоров**

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: kar@csu.ru

**Ключевые слова:** гидродинамические уравнения, разрешимость, векторное поле.

При математическом моделировании в гидродинамике часто встречаются системы уравнений, содержащие уравнение несжимаемости $\nabla\cdot v=0$ и векторные уравнения, содержащие сумму $(v\cdot\nabla)v=\sum\limits_{i=1}^{n}v_iv_{x_i}$, где $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$. Такие системы уравнений иногда называют системами гидродинамического типа. Исследуем на однозначную локальную разрешимость начально-краевые задачи для одного класса систем уравнений, включающего в себя системы гидродинамического типа. Введем обозначения

$$\underset{1}{v}=(v_{x_1},v_{x_2},\ldots,v_{x_n}),\quad \underset{2}{v}=(v_{x_1x_1},v_{x_1x_2},\ldots,v_{x_nx_n}).$$

Через $J$ обозначим некоторый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку $t_0$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$(1-\chi\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2v+(q(t,x,v)\cdot\nabla)v+G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i}+\sum_{i,j=1}^{n}G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j}-r,\quad (x,t)\in\Omega\times J,\tag{1}$$

$$\nabla\cdot v=0,\quad (x,t)\in\Omega\times J,\tag{2}$$

$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times J,\tag{3}$$

$$v(x,t_0)=v_0(x),\quad x\in\Omega.\tag{4}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$, $n\le 4$. Параметр $\chi\in\mathbb{R}$, как правило, характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu\in\mathbb{R}$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Задана вектор-функция $q=(q^1,\ldots,q^n)$ и функционалы $G$, $G^i$, $G^{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$, зависящие от $t$, $v$ и от производных функций $v_1,\ldots,v_n$ по переменным $x_1,\ldots,x_n$ первого и второго порядков. $G$, $G^i$, $G^{ij}:\mathbb{R}\times\mathbb{H}_\sigma\times(L_2(\Omega))^{n(n^2+n^3)}\to\mathbb{R}$. Например, $G$, $G^i$, $G^{ij}$ могут быть функциями от интегралов по области $\Omega$ или ее подобластям от функции $v$ и ее частных производных по пространственным переменным первого и второго порядков, функцией от значений $v$ в фиксированных точках области и т. п.

Понятно, что при $q(t,x,v) \equiv v$ система (1), (2) является системой гидродинамического типа

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Через $\mathbb{L}_2^m$ будем обозначать $m$-ю декартову степень пространства $\mathbb{L}_2$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ — соответствующий ортопроектор.

В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A = \Sigma\nabla^2$. Как известно, оператор $A$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [1].

С помощью редукции исследуемой начально-краевой задачи к задаче Шоуолтера для полулинейного уравнения соболевского типа в банаховом пространстве, используя методы теории вырожденных полугрупп операторов [2], получим следующий результат

**Теорема 1.** *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G^{ij} \in C^1(J \times \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{L}_2^{n^2+n^3}; \mathbb{R})$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (1)–(4).*

**Следствие 1.** *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu, \nu_1 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (3), (4) для системы уравнений обобщенного гидродинамического типа с нелинейной взякостью*

$$(1-\chi\nabla^2)v_t = \left(\nu + \nu_1 \int\limits_\Omega \sum_{j,m=1}^n \left|v^j_{x_m}(x)\right|^2 dx\right)\nabla^2 v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v - r, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J. \tag{6}$$

При $\nu_1 = 0$ (5), (6) является системой уравнений с линейной вязкостью, а при $q(t,x,v) \equiv v$ — системой уравнений Осколкова, моделирующей течение вязкоупругой несжимаемой жидкости [3, 4].

## Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Utrecht–Boston: VSP, 2003.

3. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 179. – С.126-164.

4. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – 31. – С.3-144.

# ABOUT SOLVABILITY OF EQUATIONS SYSTEM OF HYDRODYNAMIC TYPE

**V.E. Fedorov**

Chelyabinsk State University,
Kashirin Brothers St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia, e-mail: kar@csu.ru

**Key words:** hydrodynamic equations, solvability, vector field.