MSC 34E99

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т.А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
пр. Морской, 26, Северодвинск, 164515, Россия, e-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, негладкие коэффициенты, вектор-функции, матриц-функции.

Пусть выполняются следующие условия:
$a)$ $P(x)$ - невырожденная матриц-функция на полуоси $R_+ := [0; +\infty)$,
$b)$ $P^{-1}(x) = (p_{ij}(x))$ и $Q(x) = (q_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ - эрмитовы матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определены и измеримы на R_+,
$c)$ $R(x) = (r_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ - комплекснозначная матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определена и измерима на R_+,
$d)$ функции $q_{ij}(x)$, $p_{ij}(x)$, $r_{ij}(x)$ локально суммируемы на R_+ $(q_{ij}, p_{ij}, r_{ij} \in L^1_{loc}(I))$.

Предполагая, что вектор-функции $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ и $y^{[1]} = (y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \dots, y_n^{[1]})^t := P(y' - Ry)$ (t - символ транспонирования) уже определены и являются локально абсолютно непрерывными на R_+, рассмотрим однородное симметрическое дифференциальное уравнение второго порядка с матричными коэффициентами

$$-(y^{[1]})' - R^* y^{[1]} + Qy = 0, \qquad x \in R_+. \tag{1}$$

Пусть далее матрицы $P_1 = (p_{ij}^{(1)})$, $Q_1 = (q_{ij}^{(1)})$ и $R_1 = (r_{ij}^{(1)})$ обладают теми же свойствами, что и матрицы P, Q и R, а вектор-функции y, $y^{[1]} := P_1(y' - R_1 y)$ определены и y, $y^{[1]} \in AC_{loc}(R_+)$.

Рассмотрим второе дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(y^{[1]})' - (R_1)^* y^{[1]} + Q_1 y = 0, \qquad x \in R_+ \tag{2}$$

и через T обозначим фундаментальную матрицу системы решений этого уравнения, столбцы которой имею вид $(u_j, u_j^{[1]})^t$ $(j = 1, 2, \dots, 2n)$, где u_j - линейно независимые векторные решения уравнения (2) (квазипроизводные определяются посредством матриц P_1 и R_1).

Работа посвящена установлению достаточных условий на коэффициенты матриц P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 и фундаментальную матрицу T систему решений уравнения (2), обеспечивающих асимптотическую близость решений уравнений (1) и (2) при $x \to +\infty$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрицы P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 и T таковы, что*

$$\int_0^{+\infty}\left\|T^{-1}\begin{pmatrix}R-R_1 & P^{-1}-P_1^{-1}\\ Q-Q_1 & -R^*+R_1^*\end{pmatrix}T\right\| < +\infty. \tag{3}$$

Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ уравнение (1) имеет решение $\phi(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$\phi(x)=\sum_{j=1}^{2n}[\alpha_j+a_j(x)]u_j(x) \quad \text{и} \quad \phi^{[1]}=\sum_{j=1}^{2n}[\alpha_j+a_j(x)](u_j)^{[1]}(x),$$

где $a_j(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ (j=1,2,...,2n), а $||.||$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы (первая квазипроизводная вектор-функции ϕ определяется посредством матриц P и R, а вектор-функций u_j - посредством матриц P_1 и R_1).

В качестве примера рассмотрим случай $n=2$.

Пусть $P_1=I$, $R_1=\sigma_1(x)$, $Q_1=-\sigma_1^2(x)$, где I - единичная матрица второго порядка, а вещественная, симметрическая матрица $\sigma_1(x)$ имеет вид:

$$\sigma_1(x)=\begin{pmatrix}-\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\\ \dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1} & -\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{pmatrix}.$$

$(\alpha>2, 0<\beta<\alpha)$.

Пусть далее, $P=I$, $R=\sigma(x)$, $Q=-\sigma^2(x)$, где $\sigma(x)=(s_{ij})(x)$ - вещественная, симметрическая матрица второго порядка, квадраты элементов которой локально суммируемы на полуоси ($s_{ij}^2\in L_{loc}^1(R_+)$); x_n $(n=0,1,\dots)$ - возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $x_0=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$. Выберем произвольную точку $\nu_k\in[x_k;x_{k+1})$ и определим элементы $s_{ij}(x)$ матрицы $\sigma(x)$, полагая: $s_{11}(x)=s_{22}(x)=-\frac{\nu_k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $s_{12}(x)=s_{21}(x)=\frac{\nu_k^{\beta+1}}{\beta+1}$ при $x\in[x_k,x_{k+1})$.

Тогда, если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty}x_{k+1}^{\alpha}(x_{k+1}-x_k)^2<+\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x_{k+1}^{2\alpha+1}}{(x_k^{\alpha}+x_k^{\beta})^{1/2}}(x_{k+1}-x_k)^2<+\infty,$$

то матрицы $\sigma(x)$ и $\sigma_1(x)$ удовлетворяют условию (3) теоремы 1 (более подробно см. [1] и [2]).

Автор выражает благодарность проф. Мирзоеву К.А. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 11-01-00790-а и № 12-01-31491-мол а, и Минобрнауки РФ, грант № 1.5711.2011.

Литература

1. Сафонова Т.А. Асимптотическое интегрирование систем квазидифференциальных уравнений второго порядка // Математические заметки. – 2011. – 89, Вып.6. – С.951-953.

2. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3, №3. – С.105-119.

ABOUT ASYMPTOTIC INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM OF SECOND ORDER WITH NOT SMOOTH COEFFICIENTS

T.A. Safonova

Severny Federalny University,
Morskoi Av., 26, Severodvinsk, 164515, Россия, e-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Key words: differential equations, nondifferential coefficients, vector-function, matrix-functions.