MSC 35Q05

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, в которой следует определить начальные условия весовой задачи Коши, обеспечивающие заданные значения решения и её производной в произвольной точке $T > 0$.

Ключевые слова: абстрактное уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, задача управления.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $0 \le k < 1$ рассмотрим весовую задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0\,, \quad \lim_{t \to 0} t^k u'(t) = u_1\,. \tag{2}$$

В работах [1], [2] для уравнения (1) при значениях параметра $k > 0$ исследована разрешимость задачи Коши с условиями

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = 0 \tag{3}$$

и доказан критерий равномерной корректности этой задачи, который формулируется в терминах оценки нормы дробной степени резольвенты $R(\lambda)$ оператора A и ее производных. Множество операторов A, для которых равномерно корректна задача Коши (1), (3) обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор, который называется операторной функцией Бесселя, будем обозначать $Y_k(t)$.

Случай $k = 0$ подробно рассмотрен в классических работах [3], [4]. В них установлено, что задача (1), (3) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором косинус-оператор-функции $C(t)$.

Пусть задан оператор $A \in G_k$ и $u_0, u_1 \in D(A)$. Согласно работе [5], единственным решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(t) = Y_k(t) u_0 + (1-k)^{-1} t^{1-k} Y_{2-k}(t) u_1\,. \tag{4}$$

Отметим также, что при $k \ge 1$ задача (1), (2) корректной не является.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378 А-2013.

В настоящей работе рассмотрим задачу нахождения начальных условий u_0 и u_1 по заданным финальным значениям

$$u(T) = u_2\,, \quad u'(T) = u_3\,. \tag{5}$$

Полученная задача (1), (5) и будет простейшей задачей управления для абстрактного уравнения ЭПД (1).

Подставляя определяемое равенством (4) решение в финальные условия (5), получим систему операторных уравнений

$$F_1(T)u_0 + F_2(T)u_1 = u_2\,, \tag{6}$$

$$F_1'(T)u_0 + F_2'(T)u_1 = u_3\,, \tag{7}$$

где $F_1(t) = Y_k(t)$, $F_2(t) = (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_{2-k}(t)$.

Все операторы, входящие в систему (6), (7), являются ограниченными и коммутирующими друг с другом операторами. Поэтому систему (6), (7) можно решать так же, как и в скалярном случае. Важную роль при этом играет операторный определитель этой системы

$$W(t) = \begin{vmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ F_1'(t) & F_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $0 \le k < 1$ и $A \in G_k$. Тогда операторный определитель $W(t)$ удовлетворяет операторному уравнению*

$$W'(t) + \frac{k}{t}W(t) = 0 \tag{8}$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to 0} t^k W(t) = I \tag{9}$$

и, следовательно, $W(t) = t^{-k}I$.

□ Пусть $u_0 \in D(A)$. Тогда

$$W(t)u_0 = F_1(t)F_2'(t)u_0 - F_1'(t)F_2(t)u_0\,.$$

Вычисляя производную, получим

$$W'(t)u_0 = F_1'(t)F_2'(t)u_0 + F_1(t)F_2''(t)u_0 - F_1''(t)F_2(t)u_0 - F_1'(t)F_2'(t)u_0 =$$

$$= F_1(t)F_2''(t)u_0 - F_1''(t)F_2(t)u_0\,,$$

и, поскольку $F_1(t)u_0$ и $F_2(t)u_0$ удовлетворяют уравнению (1), после подстановки в левую часть (8), будем иметь

$$W'(t)u_0 + \frac{k}{t}W(t)u_0 = F_1(t)F_2''(t)u_0 - F_1''(t)F_2(t)u_0 + \frac{k}{t}F_1(t)F_2'(t)u_0 - \frac{k}{t}F_1'(t)F_2(t)u_0 =$$

$$= F_1(t)\left(F_2''(t) + \frac{k}{t}F_2'(t)\right)u_0 - \left(F_1''(t) + \frac{k}{t}F_1'(t)\right)F_2(t)u_0 =$$

$$= F_1(t)F_2(t)Au_0 - F_1(t)F_2(t)Au_0 = 0\,.$$

Поэтому в силу плотности $D(A)$ в E имеет место равенство (8).

Справедливость же начального условия (9) очевидно следует из представления

$$W(t)u_0 = F_1(t)F_2'(t)u_0 - F_1'(t)F_2(t)u_0 =$$

$$= t^{-k}Y_k(t)Y_{2-k}(t)u_0 + (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_k(t)Y_{2-k}'(t)u_0 - (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_k'(t)Y_{2-k}(t)u_0$$

и равенства (см. [2])

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}Au_0\,. \quad \blacksquare \tag{10}$$

Из теоремы 1 следует, что оператор $W(T)$ обратим и $W^{-1}(T) = T^k$. Кроме того, при решении системы (6), (7) методом исключения неизвестных, используется равенство (10) и формула сдвига по параметру для ОФБ (см. [1])

$$Y_m(t)u_0 = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^kY_k(ts)u_0\,ds\,,$$

где $m > k$, $B(a,b)$ — бета-функция Эйлера.

Теорема 2. *Пусть $0 \le k < 1$, $A \in G_k$, $u_2 \in D(A)$, $u_3 \in E$. Тогда задача (1), (5) имеет единственное решение, определяемое равенством (4), где*

$$u_0 = \left(Y_{2-k}(T) + \frac{T^2}{k^2-4k+3}AY_{4-k}(T)\right)u_2 - \frac{T}{1-k}Y_{2-k}(T)u_3\,, \tag{11}$$

$$u_1 = T^kY_k(T)u_3 - \frac{T^{1+k}}{1+k}AY_{2+k}(T)u_2\,. \tag{12}$$

□ Действительно, также как и в скалярном случае, рассмотрим два вспомогательных символических операторных определителя

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} u_2 & (1-k)^{-1}T^{1-k}Y_{2-k}(T) \\ u_3 & T^{-k}Y_{2-k}(T) + (1-k)^{-1}(3-k)^{-1}T^{2-k}AY_{4-k}(T) \end{vmatrix} =$$

$$= T^{-k}Y_{2-k}(T)u_2 + (1-k)^{-1}(3-k)^{-1}T^{2-k}AY_{4-k}(T)u_2 - (1-k)^{-1}T^{1-k}Y_{2-k}(T)u_3 =$$

$$= T^{-k}\left(\left(Y_{2-k}(T) + \frac{T^2}{k^2-4k+3}AY_{4-k}(T)\right)u_2 - \frac{T}{1-k}Y_{2-k}(T)u_3\right)$$

и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Y_k(T) & u_2 \\ (1+k)^{-1}TAY_{2+k}(T) & u_3 \end{vmatrix} = Y_k(T)u_3 - \frac{T}{1+k}AY_{2+k}(T)u_2 =$$

$$= T^{-k}\left(T^kY_k(T)u_3 - \frac{T^{1+k}}{1+k}AY_{2+k}(T)u_2\right)\,.$$

Умножая Δ_0 и Δ_1 на $W^{-1}(T) = T^k$, получим (11) и (12). ■

В частном случае, когда $k = 0$ и $A \in G_0$ решение задачи управления имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1\,,$$

где $C(t)$ — косинус-оператор-функция,

$$S(t) = \int\limits_0^t C(s)\,ds, \quad u_0 = C(T)u_2 - S(T)u_3\,, \qquad u_1 = C(T)u_3 - S(T)Au_2\,.$$

Литература

1. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – № 11(130); Вып. 27. – С.29-37.

2. Глушак А.В., Покручин О.А. Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – №19(190); Вып. 36. – С.17-26.

3. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. – 1969. – 6. – P.50-70.

4. Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. mat. – 1966. – № 49. – P.1-47.

5. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – №6. – С.55–56.

ABOUT AN CONTROL PROBLEM OF ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.N. Babaev, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. The control problem of abstract Euler-Poisson-Darboux equation is under consideration. It consists of the foundation initial conditions of weight Cauchy problem which guarantee some given values of solution and its derivative in arbitrary point $T > 0$.

Key words: abstract Euler-Poisson-Darboux equation, control problem.