MSC 46E99

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.И. Эминов, В.С. Эминова

Новгородский государственный университет,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия,
e-mail: eminovsi@mail.ru

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, приближения Галеркина, гиперсипгулярпые уравнения.

Многие задачи теории дифракции и теории упругости описываются уравнением вида

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(\tau\right)a\left(t\right)\ln\frac{1}{|t-\tau|}\right)\right]u\left(t\right)dt+\int_{-1}^{1}K\left(\tau,t\right)u\left(t\right)dt=f\left(\tau\right), \qquad (1)$$

где $a\left(\tau\right)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию: $0<a_0\leq a\left(\tau\right)\leq b_0$ при всех τ, $u\left(t\right)$ – неизвестная функция, ядро $K\left(\tau,t\right)$ является непрерывной функцией или имеет логарифмическую особенность. В работе [1] был исследован частный случай уравнения (1),когда функция $a\left(\tau\right)$ постоянна. Исследование уравнения (1) сводится к изучению гиперсингулярного интегро-дифференциального оператора

$$\left(Au\right)\left(\tau\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}u\left(t\right)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}dt\,, \qquad -1\leq\tau\leq1.$$

Оператор A является симметричным положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2\left[-1,1\right]$ и имеет плотную область определения $D\left(A\right)$ [1]. Положительная определенность означает, что для любой функции u из области определения $D\left(A\right)$ оператора A справедливо неравенство

$$\left(Au,u\right)\geq\gamma^2\left(u,u\right)\,, \qquad \gamma>0.$$

Введем энергетическое пространство H_A симметричного положительно- определенного оператора A, как гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$\left[u,v\right]=\left(Au,v\right),$$

$$\left[u\right]^2=\left(Au,u\right).$$

Используя положительную определенность оператора A несложно доказать, что для любого u из области определения $D\left(A\right)$ оператора A справедливо неравенство

$$\gamma\left\|u\right\|\leq\left[u\right]\leq\frac{1}{\gamma}\left\|Au\right\|.$$

Положительно-определенный оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}. В следующей теореме этот результат усиливается.

Теорема 1. *Оператор, обратный к положительно определенному оператору A задается формулой*

$$\left(A^{-1}f\right)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln\left|\frac{\tau - t}{1 - \tau t + \sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right| dt.$$

и является вполне непрерывным в пространстве $L_2[-1,1]$.

Из этой формулы следует, что оператор A^{-1} является интегральным оператором с логарифмическим ядром. Теорема 1 позволяет доказать эквивалентность исходного уравнения, уравнению Фредгольма второго рода в энергетическом пространстве оператора A. Далее введем в рассмотрение систему функций

$$\varphi_n(\tau) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \sin\left[n \arccos(\tau)\right] = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2} \sqrt{1-\tau^2}\, U_n(\tau), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2\ [-1,1]$, а $U(\tau)$ – полиномы Чебышева второго рода: $U_1(\tau) = 1$, $U_2(\tau) = 2\tau$, $U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$ и т. д. Имеет место теорема.

Теорема 2. *Система функций*

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin\left[n \arccos(\tau)\right], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

является полной в энергетическом пространстве H_A и ортонормированной.

Кроме того, введенные функции удовлетворяют известным условиям Мейкснера на ребре. Используя теоремы 1 и 2 получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет единственное решение в энергетическом пространстве H_A. Тогда приближенное решение, построенное методом Галеркина на основе базисных функций $\varphi_n(\tau)$, сходится к точному решению в пространстве H_A.*

Литература

1. Эминов С.И. Теория интегрального уравнения тонкого вибратора // Радиотехника и электроника. – 1993. – 38, Вып.12. – С.2160-2168.

2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970.

GROUND OF GALERKIN'S METHOD FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL HYPERSINGULAR EQUATIONS

S.I. Eminov, V.S. Eminova

Novgorod State University,
Bolshaya Sankt-Peterburgskaya Str., 41, Velikii Novgorod, 173003, Russia, e-mail: eminovsi@mail.ru

Key words: integral-differential equation, Galerkin's approximations, hypersingular equations.