MSC 44A12

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА-КИПРИЯНОВА НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

О.И. Попова

Воронежский Государственный Университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: olyaa.popova@yandex.ru

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радопа-Куприянова, функции действительного переменного, дробные интегралы.

Классическое преобразование Радона радиальных функций совпадает с преобразованием Радона-Киприянова K_γ функций одного переменного, когда индекс γ — натуральное число. В [2] приведена формула связи преобразования Радона-Киприянова с интегралами дробного порядка Римана-Лиувилля. Это позволяет создать таблицу преобразования Радона радиальных функций и, в обобщающем виде, таблицу преобразований Радона-Киприянова элементарных функций (одного переменного).

Преобразование Радона-Киприянова в $\mathbb{R}_n^+\{x\ :\ x_1>0\}$ введено в [1] (далее, сокращая, будем писать K_γ-преобразование) определяется выражением

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{x_1}^\nu\delta(p-\langle x,\xi\rangle)\,x_1^\gamma\,dx,\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\,,\quad \gamma>0, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}_n^+=(0,+\infty)\times\mathbb{R}_{n-1}$, $\langle x,\xi\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,\xi_i$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}_n$, $p=\langle x,\xi\rangle$ — уравнение плоскости, проходящей на расстоянии $|p|$ от начала координат, ортогонально единичному вектору ξ, $\delta(P)$ — δ-функция сосредоточенная на $(n-1)-$мерной поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n$, символ $\Pi_{x_1}^\nu$ обозначает действие оператора Пуассона порядка $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$ по переменной x_1:

$$\Pi_{x_1}^\nu g(x_1,x')=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi g(x_1\cos\alpha,\,x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha.$$

Полагая в (1) $n=1$, выводим следующую формулу для K_γ-преобразование функции одного переменного

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int_0^{+\infty} f(x)\,\Pi_x^\nu\delta(p-x)\,x^\gamma\,dx,\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\,,\quad \gamma>0.$$

Теорема 1. *K_γ-преобразование четной функции одного переменного $f\in L_1$ представляется в виде левостороннего интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка $\frac{\gamma}{2}$ в виде*

$$K_\gamma[f](\sqrt{q})=\widehat{f}(\sqrt{q})=I_-^{\frac{\gamma}{2}}f_1(q)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int_q^\infty\frac{f_1(\tau)}{(\tau-q)^{1-\frac{\gamma}{2}}}d\tau \tag{2}$$

от функции

$$f_1(\tau) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{2\sqrt{\pi}} f(\sqrt{\tau}), \quad f_1 \in L_1^{\gamma}.$$

Отметим, что когда функция (четная) имеет носитель $(0,b)$ в $\mathbb{R}_1^+$, то функция f_1 имеет носитель, принадлежащий множеству $(0,b^2)$.

Формулу (2) применим для вычисления K_γ-преобразования (1) элементарных функций. Заметим, что формула (2), примененная к произвольной степенной функции с неограниченным носителем теряет смысл, поэтому, чтобы избавиться от неопределенности в решении, будем умножать исходную функцию на кусочно-постоянную функцию Хевисайда $\Theta(x)$, равную нулю для неположительных значений аргумента и единице — для положительных.

Кроме того, отметим, что K_γ-преобразование определено для четных функций. Учитывая наличие квадратных корней в аргументе функции f_1, далее рассматриваем функции от аргумента x^2, что делает функции и четными и очень удобными для применения формулы (2) одновременно.

K_γ-преобразование функции от x^2.

1. $\varphi(x) = \Theta(b^2 - x^2)(b^2 - x^2)^{(\beta-1)}, \ \beta > 0$,

$$K_\gamma[\varphi](p) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)} \Theta(b^2 - x^2)(b^2 - p^2)^{\frac{\gamma}{2}+\beta-1}.$$

2. $\varphi(x) = (x^2 - a)^{\beta-1}(b^2 - x^2)^{(\alpha-1)}\Theta(b^2 - x^2)$.

$$K_\gamma[\varphi](p) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\Gamma(\beta)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}(b^2 - a)^{\beta-1}(b^2 - p^2)^{\gamma/2+\beta-1} \ {}_2F_1(1-\beta, \alpha, \frac{\gamma}{2}+\alpha; \frac{p^2 - b^2}{b^2 - a}).$$

3. $\varphi(x) = (b^2 - x^2)^{\beta-1}\ln(b^2 - x^2)\Theta(b^2 - x^2)$,

$$K_\gamma[\varphi](p) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\Gamma(\beta)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}(b^2 - p^2)^{\beta+\gamma/2-1}\Theta(b^2 - p^2)(\psi(\beta) - \psi(\beta+\gamma/2) + \ln(b^2 - p^2)),$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера.

4. $\varphi(x) = e^{-ax^2}, \qquad K_\gamma[\varphi](p) = \dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}} a^{-\gamma/2} e^{-ap^2}$.

5. $\varphi(x) = e^{-ax^2}\sin bx^2 \qquad K_\gamma[\varphi](p) = \dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \dfrac{e^{-ap^2}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}} \sin(bp^2 + \alpha\varphi)$.

6. $\varphi(x) = e^{-ax^2}\cos bx^2, \qquad K_\gamma[\varphi](p) = \dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \dfrac{e^{-ap^2}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}} \cos(bp^2 + \alpha\varphi)$.

Полученные здесь формулы справедливы и для классического преобразования Радона радиальных функций. Достаточно в найденных формулах положить $\gamma = 0$.

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // ДАН. – 1998. – 360. – №2. – С.157-160.

2. Ляхов Л.Н. RK_γ-преобразовапие с $\gamma \in (0;2]$ весовых сферических средних функций. Соотпошение Асгейрсона // ДАН. – 2011. – 439,№ 5. – С.589-592.

3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев И.О. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – С.688.

RADON-KIPRIYANOV'S TRANSFORMATION OF SOME ELEMENTARY FUNCTIONS

O.I. Popova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: olyaa.popova@yandex.ru

Key words: Radon's transformation, Radon-Kupriyanov;s transformation, real variable function, fractional integrals.