MSC 35K55

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. Кожевникова, А.А. Леонтьев

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453100, Россия, e-mail: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Ключевые слова: параболические уравнения, неограниченные области, первая смешанная задача.

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$, $n\geq 2$. В цилиндре $D=\{t>0\}\times\Omega$ для анизотропного параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t=\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha})_{x_\alpha},\quad k>1,\quad (t,\mathbf{x})\in D; \tag{1}$$

$$u(t,\mathbf{x})\big|_S=0,\quad S=\{t>0\}\times\partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}),\quad \varphi(\mathbf{x})\in L_k(\Omega),\quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x})\in L_{p_\alpha}(\Omega),\quad \alpha=\overline{1,n}\,. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s\geq 0$, $\alpha=\overline{1,n}$, подчиняются условиям: $a(0)=0$, $a(s)\in C^1(0,\infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2}\leq a_\alpha(s)\leq\widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2},\quad p_1a_\alpha(s)/2\leq a_\alpha(s)+a'_\alpha(s)s\leq\widehat{b}a_\alpha(s),\quad \alpha=\overline{1,n}\,,$$

с положительными константами $\widehat{a}\geq\overline{a}$, $2\widehat{b}\geq p_1>k$ $(p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_n)$. Например, $a_\alpha(s)=s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha=\overline{1,n}$, $\widehat{b}=p_n$.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации при $t\to\infty$ решения задачи (1)-(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$ от показателей нелинейности.

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространств $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(D^{T+1}_{-1})$, соответственно, по нормам $\|u\|_{W^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega)}+\|u\|_{L_k(\Omega)}$, $\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}=\|u\|_{L_k(D^T)}+\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(D^T)}$, $\|u\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}=\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}+\|u_t\|_{L_k(D^T)}$.

Определение. *Обобщенным решением задачи (1)–(3) с функцией* $\varphi(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *назовем функцию* $u(t,\mathbf{x})$ *такую, что при всех* $T>0$ $u(t,\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T}\left(-|u|^{k-2}uv_t+\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}v_{x_\alpha}\right)d\mathbf{x}dt=\int\limits_{\Omega}|\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0,\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x}) = 0$.

Существование решения задачи (1)-(3) доказывается методом галеркинских приближений, который был предложен Ф.Х. Мукминовым для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщен авторами статьи на уравнения вида (1) (см. [1], [2]).

Утверждение. *Если $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/p_n$, то обобщенное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)-(3) с ограниченной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$ является ограниченным.*

Приведем результат об убывании для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Предполагается, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 1. *Существуют $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b}) > 0$ и ограниченное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) такие, что при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)} .$$

Для $r > 0$ введем следующие обозначения:

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} = 1\right\},$$

$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1\right\},\ \Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega\ | x_s < r\}.$$

Предполагается, что выполнено условие: $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0$. Иначе достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0 .$$

Теорема 2. *Пусть $s \in \overline{2,n}$. Если выполнены условия:*

$$\mu_1(r) \geq Cr^{-a}, \quad r > 1\,, \quad a, C > 0\,, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r}\int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty\,,$$

то существуют $M(p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}) > 0$ и ограниченное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) такие, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Литература

1. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3, №4. – С.64-85.

2. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях // Уфимский математический журнал. – 2013. – 5, №1. – С.65-83.

SOLUTIONS DECREASING OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS WITH DOUBLE NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

L.M. Kozhevnikova, A.A. Leontiev

Sterlitamak department of Bashkir State University

Lenin Av., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Key words: parabolic equations, unbounded domains, first mixed problem.