MSC 35Q05

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Р.Р. Раянова

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, уравнения гиперболического типа, краевые задачи, линия сингулярности.

Рассмотрена краевая задача в характеристическом квадрате с данными на параллельных характеристиках для системы гиперболических уравнений с волновым оператором и сингулярным матричным коэффициентом при младшей производной. Используя известное решение задачи Коши для указанной системы уравнений с данными на линии сингулярности матричного коэффициента, поставленная задача редуцируется к системе интегральных уравнений Карлемана. В работе найдено в явном виде решение указанной краевой задачи.

Обозначим через M_n — множество постоянных матриц порядка n. Пусть $\Lambda(G)$ — спектр матрицы $G \in M_n$, λ_i — собственные значения матрицы G $(i = 1, 2, ..., n)$.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}$ рассмотрим систему уравнений

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2G}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $u(x, y) = \big(u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)\big)^\top$ — вектор искомых функций, $\Lambda(G) \in (0, 1/2)$.

Пусть $D_0 = D \cap \{y > 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y < 0\}$.

Обозначим $\theta_0\left(\frac{x}{2}; \frac{x}{2}\right)$ и $\theta_1\left(\frac{1+x}{2}; \frac{x-1}{2}\right)$ — точки пересечения характеристик $x - y = 0$ и $x - y = 1$ с характеристикой другого семейства, выходящей из точки $(x, 0)$.

Задача Требуется найти вектор-функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $u(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^2(D_0 \cup D_1)$,

2. $u(x, y)$ удовлетворяет системе (1) в области $D_0 \cup D_1$,

3. $u(\theta_0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]$,

4. $u(\theta_1) = \psi(x), \quad x \in [0, 1]$,

5. $\lim\limits_{y \to 0-} (-y)^{2G} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0+} y^{2G} \dfrac{\partial u}{\partial y}$,

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$ - заданные вектор-функции.

Поставленная задача сводится к системе интегральных уравнений Карлемана.

Пусть $\Omega = [a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$.

Определение 1. *Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$, где $\Omega = [a,b]$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ с областью определения $D_f = \Omega$, каждая компонента которых, удовлетворяет на Ω условию Гельдера*

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq A_k |x_1 - x_2|^{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

со своими фиксированными значениями A_k и λ_k.

Определение 2. *Через $H^* = H^*(a,b)$ обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$, для которых существуют такие мультииндексы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ и $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\epsilon}(b-x)^{1-\delta}},$$

где $f^*(x) \in H^\lambda([a,b])$ и каждой компоненте вектора $f(x)$ соответствуют свои фиксированные значения мультииндексов λ, ϵ и δ.

Определение 3. *Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — мультииндекс. Через H^*_α обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ таких, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\alpha-\epsilon}(b-x)^{1-\alpha-\delta}},$$

где $0 < \epsilon_k < 1 - \alpha_k$, $0 < \delta_k < 1 - \alpha_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, а каждая компонента вектора $f^*(x)$ принадлежит своему классу $\tilde{H}_{\alpha_k}$, который определен в [1].

Справедлива теорема.

Теорема *Пусть $G \in M_n$ – матрица, у которой спектр $\Lambda(G) \subset (0, 1/2)$. Пусть, далее, матрица $T \in M_n$ является матрицей преобразования G к жорданову виду $\Lambda_G = TGT^{-1}$. Пусть вектор $Tg(x) \in H^*_\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k = 1 - 2\lambda_k$, $\lambda_k \in \Lambda(G)$. Тогда единственное решение системы интегральных уравнений Карлемана в классе вектор-функций, таких что $T\nu(x) \in H^*$ имеет вид*

$$\nu(x) = \Big(L\Gamma(E-2G)\Big)^{-1} D_{a+}^{E-2G}\Big(E - Z(x) D_{a+}^{2G} I_{b-}^{2G} Z^{-1}(x)\Big) g(x), \tag{2}$$

где матрицы $Z(x) = \left(\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right)^{E-2G}$, $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(E-2G)\right)$.

Подставляя найденное в формуле (2) выражение для вектора $\nu(x)$ в решения задач Коши в областях $\overline{D_0}$ и $\overline{D_1}$ найдем окончательно решение $u(x,y)$ в области $\overline{D} = \overline{D_0} \cup \overline{D_1}$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR EULER-POISSON-DARBOUX'S EQUATIONS SYSTEM OF HYPERBOLIC TYPE

R.R. Rayanova

Samara State Technological University,
Molodogvardeiskaya Str., 244, Samara, 443100, Russia, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Key words: Euler-Poisson-Darboux equations, hyperbolic equations, boundary problems, singularity line.