MSC 82B43

АБСТРАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ СВЯЗНОСТИ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Развивается аксиоматический подход для определения отношения связности на произвольных конечных множествах, не использующий предварительного введения на них понятия графа.

Ключевые слова: связность, отношение, граф, множество, смежность.

1. Введение. Понятие связности является одним из базовых понятий математического анализа. Считается, что математический анализ, в целом, основан на представлении о *близости* элементов множеств, которое формализуется аксиоматически в рамках *общей топологии*. На этом пути появляется понятие *топологического пространства*. Оно определяется посредством введения дополнительной математической структуры, задаваемой на абстрактном множестве и называемой *топологией*. Топология представляет собой систему выделенных подмножеств, которая обладает набором свойств, выраженных в виде аксиом (см., например, [1-3]). При этом представление о связности между элементами в математическом анализе связывается с представлением о непрерывности (близости). Отсюда возникает абстрактный подход к этому понятию, при котором связность трактуется в топологических терминах [1-3].

Вместе с тем связность имеет, по сути своей, алгебраическую природу и является объектом исследования в рамках *алгебраической топологии* (см., например, [4, 5]). Это положение наиболее явным образом демонстрируется в случае, когда связность определяется на счетном множестве элементов. В этом случае, топология, как математическая структура, определяющая топологическое пространство, по-видимому, играет второстепенную роль, или совсем не играет никакой роли. Важным частным случаем математических объектов, которые основаны на понятии связности, являются *графы*, и для графов указанное положение проявляется наиболее ярко. В связи с тем, что имеется необходимость введения связности не только в рамках какого-либо топологического пространства и ее определение посредством топологии является только лишь частным случаем, возникает естественная идея считать структуру связности на каком-то множестве элементов самостоятельным объектом для изучения, независимым от того, имеется ли на нем какая-либо топологическая структура. Именно развитию такой точки зрения посвящена настоящая публикация. Причем здесь мы ограничиваемся анализом возможности аксиоматического введения структуры связности только на конечных множествах так, чтобы не привлекать никаких аксиом, связанных с использованием понятия бесконечности. Мы стремились формализовать понятие связности, не используя понятие смежности и пути, как это принято в теории графов, а оперировать при построении теории, по нашему мнению, более общими понятиями. Оказалось, что при таком подходе возникают математические объекты, наделенные структурой связности на основе предлагаемой в статье системы аксиом, которые не являются графами в чистом виде. Их можно трактовать как графы только при более широком понимании того, что представляет собой *связь* на графе. Мы считаем, что предлагаемый нами набор аксиом является характеристическим для понятия связности.

Отметим, что идея создания общего подхода к определению структуры связности на произвольном множестве элементов безотносительно к существованию на нем топологии, возникла в связи с построением таких вероятностных пространств случайных множеств, на основе которых возможно определение понятие *перколяции* (просачивания), что важно для развития общей теории перколяции [6].

Подход, развивающийся в работе, основан на том, что связность представляется семейством специальных *отношений эквивалентности* между элементами абстрактного множества и, с этой точки зрения, является алгебраическим понятием.

2. Связность на конечных множествах. Понятие связности возникает тогда, когда для рассматриваемой совокупности Σ элементов должно быть указано правило, которое позволяет выявлять однозначным образом в любом подмножестве $A \subset \Sigma$ разложение его на дизъюнктивные компоненты, которые называются связанными компонентами этого множества. При таком дизъюнктивном разложении подмножества A все элементы, составляющие каждую из его связанных компонент, объявляются связанными друг с другом. Например, в общей топологии связность вводится посредством соглашения о том, что множество является связанным, если оно не может быть разложено дизъюнктивно на отделенные, в смысле топологии пространства, составляющие [1].

Если заменить слово «связанные» на «эквивалентные», и вспомнить, что однозначное дизъюнктивное разложение любого множества генерируется *отношением эквивалентности* для пар элементов из A, то естественно думать, что правило, реализующее понятие связности, должно быть таким, которое сопоставляет каждому подмножеству $A \subset \Sigma$ соответствующее ему бинарное отношение φ_A эквивалентности. При этом нужно, конечно же, потребовать, чтобы семейство $\{\varphi_A, A \subset \Sigma\}$ всех таких бинарных отношений было подчинено некоторым общим условиям, которые отвечают представлениям о связности множеств элементов в различных математических объектах, для которых это понятие может быть определено.

Итак, *структура связности иа множестве Σ является семейством отношений $\Phi = \{\varphi_A; A \in \Sigma\}$ эквивалентности для элементов из Σ, которая удовлетворяет специальной системе аксиом.*

Мы посвятим этот раздел обсуждению возможного выбора такой системы аксиом, которые отвечают интуитивным представлениям о связности, при котором наличие у отношений φ_A, $A \subset \Sigma$ свойств, выражаемых этими аксиомами, представляется совершенно необходимым.

Совершенно естественно, что если структура связности определяется на Σ, то нужно потребовать, чтобы само множество Σ представляло собой одну связную компоненту, то есть должно выполняться:

1. *Отношение $\varphi_\Sigma \equiv \varphi$ является тождественным, т.е. при $A = \Sigma$, все элементы из Σ связаны друг с другом.*

Далее, нужно потребовать, чтобы при $A = \varnothing$ было вообще лишено смысла говорить о связности каких-либо элементов из Σ, то есть:

2. *Отношение $\varphi_\varnothing$ не связывает ни одну из вершин Σ ни с какой другой.*

Наконец, ясно, что в случае, когда $A = \{x\}$ является одноэлементным множеством, имеется только одна связанная компонента, то есть:

3. *Для всех $A = \{x\}$, $x \in \Sigma$ имеет место только одно отношение $x\varphi_A x$, то есть $\overline{x\varphi_A y}$ при $y \neq x$.*

Эти три аксиомы носят тривиальный характер. Они совершенно необходимы для определения понятия связности, но они еще никак не вскрывают связи между различными отношениями φ_A. Первое, что должно быть учтено при описании связей между этими отношениями с целью их соответствия понятию связности, является наследственное свойство связности.

4. *Для любой пары подмножеств A и B множества Σ таких, что $B \subset A$, и для каждой пары элементов x и y из $B \subset \Sigma$, из отношения $x\varphi_B y$ следует отношение $x\varphi_A y$.*

Будем говорить, что множество $B \subset A$ является *φ_A-связным*, если для любой пары элементов x и y из B выполняется $x\varphi_A y$. В частности, таким образом дается определение связанного множества A в рамках вводимой структуры связности. А именно, связанными множествами будем называть такие, которые связаны относительно φ_A, то есть они являются *самосвязанными*, в дальнейшем, мы их просто называем *связанными множествами*, если это не вызывает недоразумений. Одноэлементные множества, согласно аксиоме 3, тривиальным образом, связанные.

Из аксиомы 4 следует, что из самосвязанности множества B следует его связанность относительно более широкого множества A.

Так как каждое отношение φ_A, $A \subset \Sigma$ является отношением эквивалентности на любом множестве $B \subset A$, то каждое такое множество представимо в виде дизъюнктивного объединения множеств $B_1, B_2, ...$, каждое из которых состоит из эквивалентных между собой элементов. При этом, с точки зрения интуитивных представлений о связности, все эти компоненты должны пониматься как самосвязанные. В связи с этим, введем следующую аксиому, которая, в некотором смысле обратна к аксиоме 4.

5. *Если подмножество C является связной компонентой относительно φ_A множества $B \subset A$, то C связно относительно φ.*

Заметим, что аксиома 5 описывает свойство отношений φ_A при сужении множества A, но она еще не гарантирует, что самосвязанное неодноэлементное подмножество B обязательно должно содержать внутри себя другие самосвязанные неодноэлементные подмножества. Наоборот, может случиться так, что оно не имеет связанных неодноэлементных подмножеств. При этом, естественно, мы не имеем в виду тривиальный случай, который представляется всевозможными связными двухэлементными подмножествами. Такое положение, не следует исключать из рассмотрения и, заведомо, обеднять понятие связности. В связи с этим, введем следующее

Определение 1. *Связанное неодноэлементное множество $A \subset \Sigma$ назовем множеством жестко связанных элементов, если удаление любого из его элементов $u \in A$ приводит к тому, что все элементы множества $A \setminus \{u\}$ становятся изолированными друг от друга, то есть для любой пары $\{x, y\} \subset A \setminus \{u\}$ имеет место $\overline{x\varphi_{A\setminus\{u\}}y}$.*

Двухэлементные связанные множества, тривиальным образом, жестко связаны. Следующий простой пример представляет множество жестко связанных трех вершин.

Пример. Пусть $\Sigma = \{x_i; i = 1, 2, 3\}$ и, согласно аксиоме 2, $x_i\varphi_{\{x_i\}}x_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера и значение 0 соответствует отсутствию связи, а 1 – ее наличию:

$$x_k\varphi_{\{x_i,x_j\}}x_l = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} \quad \text{с} \quad i \neq j \quad \text{при} \quad k, l = 1, 2, 3$$

и $\varphi_\Sigma = 1$.

Не составляет труда построить примеры жестко связанных элементов, содержащих любое их число.

Множества жестко связанных элементов будем, в дальнейшем для краткости, называть *связями.* Если связь B содержит n элементов, то мы их будем называть n-связями.

Наконец, введем следующие важные в операционном отношении аксиомы.

6. *Если связное множество A при удалении из него элемента z имеет неодноэлементную связную компоненту C, то $C \cup \{z\}$ – связное множество.*

7. *Если множество C является связью и $\{z\} \cup C$ – связное множество, то найдется такое $B \subset C$, что множество $B \cup \{z\}$ является связью.*

По нашему мнению, аксиомы 1-7 полностью характеризуют семейство отношений Φ, которые с интуитивной точки зрения воспринимаются как структура связности.

Для формулировки и доказательства соответствующих утверждений введем в рассмотрение класс Ψ всех связей на Σ и для каждого элемента $x \in \Sigma$ – класс $\Psi(x)$ всех связей $B \in \Psi$, содержащих этот элемент. Каждый такой класс будем называть *классом смежности* элемента x. Для каждого элемента $x \in \Sigma$ класс смежности $\Psi(x)$ может содержать произвольное число элементов. На конечном множестве Σ все множества жестко связанных элементов определяются посредством применения аксиомы 5. В соответствии с этим, определены все классы смежности. Если множество Σ имеет $|\Sigma|$ элементов, то каждый класс $\Psi(x)$, $x \in \Sigma$ содержит не более $2(2^{|\Sigma|} - 1)$ связей. Соответственно, число всех связей в классе Ψ не превосходит $2|\Sigma|(2^{|\Sigma|} - 1)$.

Нашей задачей будет доказательство того, что, для любого конечного множества Σ, любая структура связанности Φ на Σ полностью характеризуется семейством Ψ всех жестко связанных относительно φ_Σ подмножеств пространства Σ. С этой целью дадим следующее

Определение 2. *Любую последовательность связей $\langle B_0, B_1, B_2, ..., B_n\rangle$, где $x \in B_0$, $y \in B_n$, $B_j \in \Psi$, $j = 0, 1, ..., n$ такую, что $B_{j-1} \cap B_j \neq \varnothing$, , $j = 1, 2, ..., n$, назовем путем $\gamma(x, y)$ на Σ, имеющим длину n. При этом x – начальный элемент пути, соответственно, y – конечный его элемент.*

Таким образом, каждый путь порождается заданием семейства всех связей Ψ.

Очевидно, что в том случае, когда в пути $\gamma(x, y)$ имеются последовательно повторяющиеся связи, то есть $B_k = B_{k+1} = ... = B_{k+l}$ при некоторых $k, l \in \mathbb{N}$, то путь $\gamma(x, y)$ можно «укоротить», то есть построить последовательность

$$\gamma'(x, y) = \langle B_0, B_1, ..., B_k, B_{k+l+1}, ..., B_n \rangle ,$$

которая также является путем, соединяющим x и y.

Покажем как на основе понятия пути можно переформулировать определение связности подмножества A и, тем самым, полностью охарактеризовать структуру связности на конечном множестве Σ.

Теорема 1. *Если для любой пары элементов $\{u, v\} \subset A$ подмножества $A \subset \Sigma$ существует путь $\gamma(u, v)$, полностью расположенный в A, то эти элементы находятся в отношении φ_A, то есть A – связно.*

□ Пусть для заданной пары $\{u, v\} \subset A$ имеется путь $\gamma(u, v) = \langle B_0, B_1, B_2, ..., B_n \rangle$, $B_0 \ni u$, $B_n \ni v$, полностью расположенный в A. В силу определения пути, используя условие транзитивности отношения φ_A, имеем требуемое отношение $u\varphi_A v$. ■

Рассмотрим теперь возможность справедливости утверждения, обратного Теореме 1. Докажем, теперь, что для структуры связности на конечном множестве Σ, подчиненной аксиомам 1-7, это, действительно, имеет место. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть связное множество A представимо в виде объединения $A = C_1 \cup C_2$ двух непересекающихся множеств C_1 и C_2. Тогда найдется связь B такая, что $B \cap C_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$.*

□ Определим индуктивно последовательность связных множеств A_l, $l = 1, ..., m$ таких, что $A_l \cap C_i \neq \varnothing$.

Пусть $A_1 = A$. Если в A_1 найдется элемент z_1, удаление которого дает непустые множества $A_1 \cap C_i \setminus \{z_1\}$, $i = 1, 2$ и оставляет связным множество $A \setminus \{z\}$, то положим $A_2 = A_1 \setminus \{z_1\}$. Если же удаление любого элемента делает $A_1 \setminus \{z_1\}$ не связным, то процесс построения останавливается и полагаем $m = 1$. Пусть в A_2 найдется элемент z_2 такой, что множества $A_2 \cap C_i \setminus \{z_1\}$, $i = 1, 2$ не пусты и $A_2 \setminus \{z_2\}$ является связным множеством. В этом случае положим $A_3 = A_2 \setminus \{z_2\}$. Если же такого элемента не существует, то положим $m = 2$ и процесс построения последовательности останавливается.

Пусть построено непустое связное множество $A_l = A_{l-1} \setminus \{z_{l-1}\}$ такое, что $A_l \cap C_i$, $i = 1, 2$ – связные множества. Если в нем найдется элемент z_l такой, что не пусты множества $A_l \setminus \{z_l\} \cap C_i$, $i = 1, 2$ и $A_l \setminus \{z_l\}$ связно, то положим $A_{l+1} = A_l \setminus \{z_l\}$. Если это не так, то положим $m = l$ и остановим процесс построения последовательности.

Конструируемая индукцией по l последовательность обязана прерваться, ввиду конечности множества A. Таким образом A_m не пусто и связно, а также не пусты множества $A_m \cap C_i$, $i = 1, 2$. Кроме того A_m минимально, то есть оно не содержит внутри себя множества, обладающего такими же свойствами. Покажем, что в A_m найдется связь B, о которой идет речь в формулировке леммы. Удалим из этого множества какую-либо из вершин z. Пусть, для определенности, $z \in C_1$. Тогда, согласно построению множества A_m, могут реализоваться следующие возможности: 1) $C_1 \cap (A_m \setminus \{z\}) = \varnothing$, либо 2) $C_1 \cap (A_m \setminus \{z\}) \neq \varnothing$, по $A_m \setminus \{z\}$ не связно. Проанализируем обе эти возможности.

В случае 1), ввиду связности A_m, найдется связная компоненты A' в $A_m \setminus \{z\}$. Согласно аксиоме 6, $\{z\} \cup A'$ – связное множество, $A' \subset C_2$. Из свойства минимальности множества A_m следует, что такая связная компонента единственна, $A' = A_m \setminus \{z\}$. В противном случае, все остальные можно было бы удалить и тем самым уменьшить множество A_m. Более того, ввиду минимальности A_m, множество A' должно быть либо одноэлементным, $A' = \{y\}$, либо связью. В первом случае, $A_m = \{z, y\}$ и, следовательно, является связью. Во втором случае, согласно, аксиоме 7, внутри связи A' должно найтись подмножество A'' такое, что $A'' \cup \{z\}$ связь.

Рассмотрим второй случай. Допустим, что A_m не является связью. Пусть $A^{(j)}$, $j = 1, ..., l$ – связные компоненты множества $A_m \setminus \{z\}$. Тогда среди этих связных компонент, которые, согласно аксиоме 6, найдутся такие $A^{(j')}$, для которых $A^{(j')} \cup \{z\}$ – связное множество. Ввиду минимальности A_m, должно выполняться $A^{(j')} \not\subset C_1$. Если же считать, что $A^{(j')} \subset C_2$, то это соответствует рассмотренному случаю 1. Если же допустить, что одновременно не пусты множества $A^{(j)} \cap C_1$ и $A^{(j)} \cap C_2$, то, ввиду минимальности выбора A_m, такая связная компонента может быть единственной и при этом она должна состоять из одного элемента. ■

Теорема 2. *Пусть Σ конечное множество. Если множество A связно, то для любой пары $\{u, v\} \subset A$ существует путь $\gamma(u, v) = \langle B_0, B_1, B_2, ..., B_n \rangle$, $u \in B_0$, $v \in B_n$, полностью расположенный в A.*

□ Рассмотрим произвольную пару элементов $\{u, v\} \subset A$. Так как A связно, то для пары $\{u, v\}$ выполняется отношение $u \varphi_A v$. Класс Ψ всех связей конечен. Поэтому семейство Γ всех путей – конечных последовательностей, составленных из связей, конечно.

Сопоставим каждому пути $\gamma = \langle B_0, B_1, ..., B_n \rangle$ множество $\Delta(\gamma) = \bigcup_{j=0}^{n} B_j$. Построим множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma(u)} \Delta(\gamma) \equiv \Delta[u]$, где $\Gamma(u)$ – класс путей с началом па элементе u. Пусть это множество не совпадает с Σ. Тогда, построив для элемента v, по такому же принципу, множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma(v)} \Delta(\gamma) \equiv \Delta[v]$, $\Gamma(v)$ – класс путей с началом на элементе v, имеем два непересекающихся связных множества $\Delta[u]$ и $\Delta[v]$, $\Delta[u] \cap \Delta[v] = \varnothing$ и при этом, ввиду $u \varphi_A v$, их объединение связно. В силу доказанной леммы, найдется связь B такая, которая содержит элементы $u' \in \Delta[u]$ и $v' \in \Delta[v]$ и, следовательно, среди путей класса $\Gamma(u)$ найдется путь, который можно продолжить этой связью, что противоречит пустоте пересечения множеств $\Delta[u]$ и $\Delta[v]$. ■

Таким образом, из Теорем 1 и 2 следует, что любая пара элементов $\{u, v\}$ тогда и только тогда находится в отношении φ_A, когда существует путь $\gamma(u, v)$, полностью расположенный в A. Эти теоремы дают полное описание конструкции семейства отношений эквивалентности с указанными в пп.1-7 глобальными свойствами на основе понятия пути. Так как каждый путь конструируется из связей, то построение семейства отношений φ_A, $A \subset \Sigma$ связности на конечном множестве Σ может быть осуществлено на основе множества путей. В свою очередь, пути определяются па основе задания для каждого элемента $x \in \Sigma$ семейства связей $\Psi(x)$. Тогда семейство Ψ всех связей па Σ, соответствующее структуре связанности Φ, полностью характеризует эту структуру.

Замечание. Если отношение связности полностью определяется только бинарными связями, то есть в семейство Ψ входят только двухэлементные множества $\{x, y\} \subset \Sigma$, то при построении путей $\gamma(u, v) = \langle B_0, B_1, B_2, ..., B_n \rangle$ на основе соответствующего отношения связности, все множества B_j оказываются двухэлементными $B_j = \{u_{j-1}, u_j\}$. В этом случае, для $\gamma(u, v)$ можно использовать более краткое обозначение $\gamma(u, v) = \langle u, u_1, ..., u_{n-1}, v \rangle$, указывая только вершины, по которым проходит путь, как это принято в теории графов.

Литература

1. Энгелькинг Р. Общая топология / М.: Мир, 1986
2. Келли Дж.Л. Общая топология / М.: Наука, 1968.
3. Куратовский К. Топология тт.1,2/ М.: Мир, .
4. Васильев В.А. Введение в топологию. — М.: Фазис, 1997.
5. Новиков П.С. Топология. — 2 изд., испр. и доп. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения / Итоги науки и техники. Сер. теор. вер., мат. стат. и теор. кибер. – т.24 / М.: ВИНИТИ, 1986. – 24. – С.53-110.

ABSTRACT CONNECTEDNESS STRUCTURES ON FINITE SETS

E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Axiomatic approach for the definition of connectedness relation on arbitrary finite sets is developed such that it does not use the preliminary introduction of graph structure on them.

Key words: connectedness, relation, graph, set, adjacency.