MSC 41A15

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ВОССТАНОВЛЕНИЯ 3D РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ МЕЖДУ НАКЛОННЫМИ СКВАЖИНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРЛИНАЦИИ

Е.С. Черная

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: 1402@ukr.net

Аннотация. Приведен обзор новых 3D методов построения математических моделей распределения полезных ископаемых методами сплайн-интерлинации функций 3-х переменных на системе наклонных скважин. Предложен метод моделирования распределения полезных ископаемых при помощи сплайн-интерлинантов на системе наклонных скважин, размещенных как в одной плоскости, так и произвольным образом.

Ключевые слова: сплайн-интерлинация, математическая модель, наклонная скважина, триангуляция.

Введение. Бурение применяют с целью поиска полезных ископаемых, добычи нефти, газа, воды и рассолов, сооружения шахт и т.д. Наклонно-направленное бурение - способ сооружения скважин с отклонением вертикали по заранее заданному направлению. Наклонно-направленное бурение применяется как для бурения скважин на нефть и газ, так и при разведке твердых полезных ископаемых.

Наиболее эффективная область использования наклонно-направленного бурения – разработка месторождений в акваториях морей и океанов, в болотистых местностях и в случаях, когда строительство буровых может нарушить условия охраны окружающей среды. Такой вид бурения применяют также при бурении вспомогательных скважин для глушения открытых фонтанов, при многоствольном бурении или отклонении части ствола вдоль продуктивного горизонта с целью увеличения дренажа.

Наклонно-направленное бурение нефтяных и газовых скважин осуществляется по специальным профилям. Бурение таких скважин имеет особенность, что сначала они имеют прямолинейное направление, а затем отклоняются от прямолинейного ствола.

Необходимость бурения наклонно-направленных скважин определяется следующими причинами: особенностью рельефа поверхности, стремлением к снижению затрат времени и средств на буровые сооружения и подъезды к ним; необходимостью раскрытия круто залегающих пластов и многое другое. Итак, наклонно направленное бурение в настоящее время стало наиболее распространенным методом проведения скважин, и тенденция к увеличению его доли в общем объеме бурения сохранится и в последующие годы [1].

Следует отметить, что методика исследования пространственного распределения полезных ископаемых с использованием информации о распределении в вертикальных скважинах на основе данных из кернов скважинного бурения достаточно подробно исследована в монографии [2] (см. библиографию к ней). Случай использования данных для построения математических моделей распределения из кернов наклонных скважин в указанной монографии и других источниках в ней не исследовались. Поэтому актуальной является задача построения и исследования пространственных математических моделей с использованием данных из кернов скважин как вертикальных так и наклонных.

Общая постановка задачи. Проектирование наклонно-направленной скважины начинается с выбора конфигурации профиля (см. Рис. 1). В общем случае профиль скважины может содержать следующие участки: вертикальный, участок набора зенитного угла, прямолинейный участок, где зенитный угол стабилизирован (участок стабилизации), участок уменьшения зенитного угла. Обычный профиль представляет собой кривую линию, расположенную в одной вертикальной плоскости. Однако, в ряде случаев задается профиль пространственного типа, что представляет собой пространственную кривую линию.

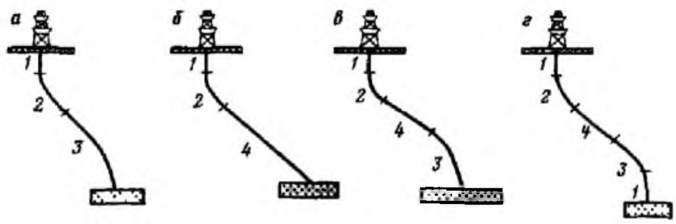

Рис. 1. Профили наклонно-направленных скважин: 1 – вертикальный, 2 – увеличения зенитного угла, 3 – уменьшения зенитного угла, 4 – стабилизация.

Рассмотрим более подробно второй профиль из приведенных на рис. 1 наклонно-направленных скважин. В качестве основной системы координат, в которой задается проектное положение скважины, примем декартову систему координат, где ось OZ направлена в сторону, противоположную действию вектора силы тяжести.

Определение. Будем считать наклонной скважиной множество точек следующего вида

$$\Gamma_k = \{(x, y, , z): \ x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \le z \le 0\}\,, \quad k = \overline{1, M}\,,$$

где $X_k(z)$, $Y_k(z)$ – одновременно не являются константами.

Считаем, что все точки конкретной скважины Γ_k лежат в одной вертикальной плоскости. Обозначим через $f(x, y, z)$ функцию распределения полезных ископаемых в точке с координатами (x, y, z), которую будем считать известной лишь в точках указанной системы скважин. То есть, считаем известными функции

$$f_k(z) = f(X_k(z), Y_k(z), z)\,, \qquad -H_1 \le z \le 0\,, \quad k = \overline{1, M}\,.$$

где функции $f_k(z)$ считаются полученными в результате анализа содержания кернов скважин в каждой точке на глубине z [3]. Считаем также, что диаметр каждой наклонной скважины равен нулю.

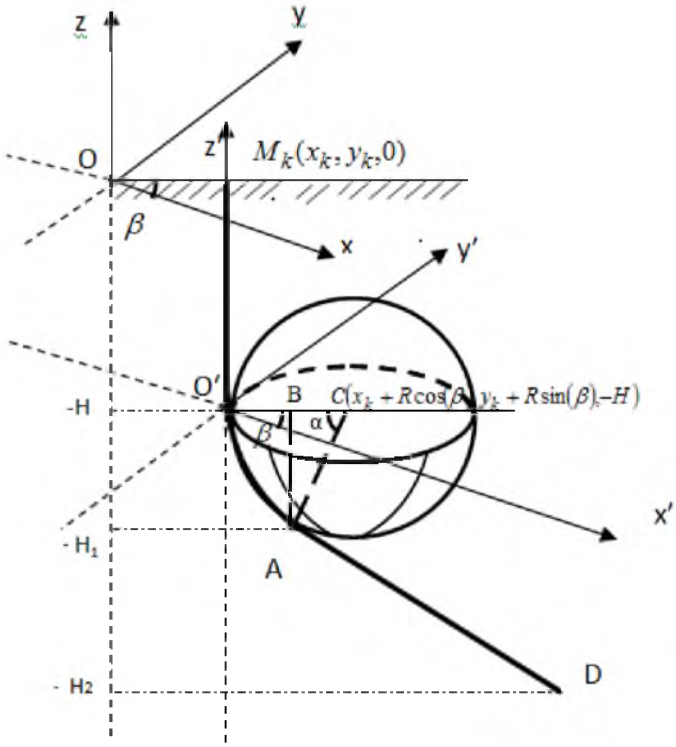

Рис. 2. Наклонно-направленная скважина.

Пусть нам известна глубина H, на которой вертикальная часть скважины имеет искривление. Напишем параметрическое уравнение скважины, которая начинается с точки $M_k(x_k, y_k, 0)$ на поверхности.

В качестве основной системы координат, в которой задается проектное положение скважины, принята декартова система координат, где ось Z направлена в сторону, противоположную действию вектора силы тяжести.

Введем вспомогательную систему координат $O'X'Y'Z'$, оси которой параллельны осям $OXYZ$, а центр находится в точке $O'(x_k, y_k, -H) = O'(X_k(-H), Y_k(-H), -H)$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(x_k, y_k, 0)$ и ось $O'Z' \parallel OZ$ под углом β к плоскости $O'X'Y'$ имеет вид (см. Рис. 2)

$$(x - x_k)\sin\beta - (y - y_k)\cos\beta = 0\,.$$

Точки M_k, O', A, B, C, D лежат в одной плоскости. Пусть $\angle(ACO') = \alpha$, а $\angle(X'O'C) = \beta$. Определим координаты точки C, которая является центром окружности, на которую опирается искривление наклонной скважины (см. рис. 2). Точка C будет иметь координаты $(x_k + R\cos\beta, y_k + R\sin\beta, -H)$.

Уравнение сферы с центром в точке и радиусом R будет иметь следующий вид:

$$(x - x_k - R\cos\beta)^2 + (y - y_k - R\sin\beta)^2 + (z + H)^2 = R^2\,.$$

Параметрическое уравнение скважины определяется как уравнение кривой, которая лежит на указанной сфере

$$\begin{cases} x - x_k - R\cos\beta = R\cos\beta\cos\alpha\,, \\ y - y_k - R\sin\beta = R\cos\beta\cos\alpha\,, \\ z + R = R\sin\alpha\,. \end{cases}$$

Рассмотрим нрямоугольный треугольник $\triangle ABC$. Определим координаты точек B, C, A. Точка A является точкой перехода участка набора зенитного угла скважины к ее прямолинейному участку. B – точка пересечения перпендикуляра, опущенного от точки A к диаметру окружности, на которую опирается искривление наклонной скважины (см. рис. 2).

Если $\angle ACB = \alpha$, а $\angle ABC = \pi/2$, то $AB = AC\sin\alpha = R\sin\alpha$, $z - (-H) = R\sin\alpha$; $z + H = R\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = (z+H)/R \Rightarrow \alpha = \arcsin[(z+H)/R]$;

$x_A = x_B = x_k + (R - R\cos\alpha)\cos\beta = x_k + \Big(R - R\cos\big(\arcsin[(z+H)/R]\big)\cos\beta\Big)$,

$y_A = y_k + (R - R\cos\alpha)\sin\beta = y_k + \Big(R - R\cos\big(\arcsin[(z+H)/R]\big)\sin\beta\Big)$,

$z_A = z\,,\quad -H_1 \le z \le -H$, $H_1 - H \le R\,.$

Тогда $A = (x_A, y_A, z_A)$ и $\hat{A} = (x_A, y_A, -H)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки C и A, в параметрической форме имеет вид

$$x = x_A + m(z + H_1)\,,\quad y = y_A + n(z + H_1)\,,\quad z = z\,.$$

Найдем коэффициенты m и n в этом уравнении. Так как

$$\frac{dx_A}{dz} = \frac{z+H}{\sqrt{1 - [(z+H)/R]^2}}\cdot\frac{\cos\beta}{R}\,,\quad \frac{dy_A}{dz} = \frac{z+H}{\sqrt{1 - [(z+H)/R]^2}}\cdot\frac{\sin\beta}{R}\,,$$

то коэффициенты m и n даются выражениями

$$m = \left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=-H_1} = \frac{H - H_1}{\sqrt{1 - [(H-H_1)/R]^2}}\cdot\frac{\cos\beta}{R}\,,$$

$$n = \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=-H_1} = \frac{H - H_1}{\sqrt{1 - [(H-H_1)/R]^2}}\cdot\frac{\sin\beta}{R}\,.$$

2. Анализ результатов построения интерлинационных операторов для нерегулярно расположенных скважин. В теории приближения функций двух и более переменных $f(x_1, ..., x_n)$, $n \ge 2$, в последние десятилетия интенсивно развивается раздел, посвященный построению, исследованию и применениям операторов, которые восстанавливают (возможно, приближенно) эти функции по известным их следами и следам их частных производных фиксированного порядка N на $M \ge 1$, m-мерных $(0 \le m < n)$ поверхностях в $\mathbb{R}^n$. С целью унификации утверждений будем считать точки нуль-мерными поверхностями, а линии – одномерными поверхностями. В случае

$m = 0, n \geq 1$ информация о функции $f(x)$ задается в M точках (полюсах), и такие операторы приближения называются операторами интерполяции (inter - между, pol - полюс, точка) для $M \geq 2$. В случае $m = 1$, $n \geq 2$ информация о функции f задается следами и следами ее частных производных $\partial^{|s|} f(x)/\partial x_1^{s_1} ... \partial x_n^{s_n}$, $|s| = s_1 + ... + s_n$, $1 \leq |s| \leq N$, на M линиях, и такие операторы будем называть операторами интерлинации (inter - между, line - линия).

Здесь мы построим оператор сплайн-интерлинации $O_\mu(x, y, z)$ функций трех переменных $f(x, y, z)$, которая является сплайном первой степени но переменным x, y $(x, y) \in D$ на основе девяти узлов (x_k, y_k), $k = \overline{1, 9}$ с координатами, заданными как в примере 3 [5, с. 24].

Изложим алгоритм но шагам [4].

Шаг 1. Задаем систему наклонных скважин $\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}$, $k = \overline{1, M}$ и следы $\gamma_k(z) = f(x_k, y_k, z)$, $k = \overline{1, M}$ неизвестной функции $f(x, y, z)$ на указанных Γ_k, $k = \overline{1, 9}$. Эти следы получено в результате анализа содержания кернов скважин.

Шаг 2. Выполняем триангуляцию поверхности: введем обозначения $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $T_\mu(z)$ – треугольник па глубине z с вершинами $P_k(X_k(z), Y_k(z), z)$, $k = \mu_1, \mu_2, \mu_3$, $\mu_j \in \{1, ..., M\}$, $j = 1, 2, 3$, то есть $T_\mu(z) = \{(x, y, z) \in T_\mu(z)\}$ – криволинейная призма.

Шаг 3. Строим для каждого треугольника $T_\mu(z)$ оператор интерлинации $O_\mu(x, y, z)$ в виде

$$O_\mu(x, y, z) = [\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}]^{-1} \big(f_{\mu_1}(z) \varphi_{\mu_2,\mu_3}(x, y, z) + f_{\mu_2}(z) \varphi_{\mu_1,\mu_3}(x, y, z) + f_{\mu_3}(z) \varphi_{\mu_1,\mu_2}(x, y, z) \big) , \tag{1}$$

где

$$\varphi_{p,q}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ X_p(z) & Y_p(z) & 1 \\ X_q(z) & Y_q(z) & 1 \end{pmatrix} , \ \Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(z) = \det \begin{pmatrix} X_{\mu_1}(z) & Y_{\mu_1}(z) & 1 \\ X_{\mu_2}(z) & Y_{\mu_2}(z) & 1 \\ X_{\mu_3}(z) & Y_{\mu_3}(z) & 1 \end{pmatrix} .$$

$\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(z) = \varphi_{\mu_2,\mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z)$. Тут учтены тождества

$$\varphi_{\mu_2,\mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z), z) = 1 , \quad \varphi_{\mu_2,\mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z), z) = 0 \, , \varphi_{\mu_2,\mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z), z) = 0 \tag{2}$$

и получаемые из них циклическими перестановками номеров 1,2,3.

Введем оператор

$$O_M f(x, y, z) = O_\mu f(x, y, z) , \quad (x, y, z) \in T_\mu(z) \times [-H, 0] , \quad T_\mu(z) \subset D \bigcup_\mu T_\mu(z) .$$

Теорема 1. *Оператор $O_M f(x, y, z)$ имеет следующие свойства:*

1) $O_M f(x, y, z) \in C(D)$;

2) *является оператором интерлинации функций $f(x, y, z)$ трех переменных на системе наклонных скважин Γ_k, $k = \overline{1, M}$, т.е.*

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = f(X_p(z), Y_p(z), z) = f_p(z) , \quad -H \leq z \leq 0 \, , \ p = \overline{1, M} \, .$$

□ Интерлинационные свойства вытекают из того, что детерминант с двумя одинаковыми строками равен пулю. Поэтому, если $p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, то

$$O_M f(X_p(z), Y_p(z), z) = O_\mu(X_p(z), Y_p(z), z)\,,$$

где последнее значение вычисляется па основе (1) и учтены тождества (2). Другими словами, оператор $O_M f(x, y, z)$ является оператором кусочно-линейной интерполяции по переменным $x, y\ \forall z \in [-H, 0]$.

Для доказательства того, что $O_M f(x, y, z) \in C(D)$ достаточно отметить, что функции $O_{p,q,r} f(x, y, z)$ и $O_{p,q,r'} f(x, y, z)$ на общей криволинейной грани призм со скважинами Γ_p и Γ_q имеют одинаковые следы, то есть функция $F(x, e, z) = O_M f(x, y, z)$ при переходе от трехгранной призмы с ребрами $\Gamma_p(z)$, $\Gamma_q(z)$, $\Gamma_r(z)$ к трехгранной призме с ребрами $\Gamma_p(z)$, $\Gamma_q(z)$, $\Gamma_{r'}(z)$ сохраняет непрерывность. То, что в случае непрерывных следов $f_p(z) \in C[-H, 0]$, $p = \overline{1, M}$ функции $O_\mu f(x, y, z)$ тоже будут непрерывными, следует из формулы для значений операторов $O_\mu f(x, y, z)$ и того, что сумма непрерывных функций является непрерывной функцией [6]. ■

Заключение. Рассмотренный метод построения математических моделей распределения полезных ископаемых с помощью распределения в кернах наклонных скважин показал свою эффективность с точки зрения точности получаемых приближений.

Литература

1. Исаченко В.Х. Инклинометрия скважин / М.: Недра, 1987. – 216 с.
2. Литвин О.М., Штепа Н.І., Литвин О.О. Математичне моделювання розноділу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій / К.: Наук. думка, 2011. – 228 с.
3. Литвин О.М., Штепаб Н.І. Математичне моделювання розподілу корисних коиалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних / Праці міжнародного симпозіуму Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): Крим, смт. Кацивелі, 24-29 вересня 2009. Т.2; Київ. – 2009. – С.20-24.
4. Литвин О.О., Штена, Н.І., Кулик С.І., Чорна О.С. Математичне моделювання розноділу корисних коиалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Проблеми машинобудування (Харків). – 2013. – 16; 1. – С.61-63.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика // М.: Мир, 1969. – 252 с.
6. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи / Київ: Науква думка, 2005. – 331 с.
7. Чорна О.С. Обчислювальна реалізація методу відновлення 3D розноділу корисних коиалин між нохилими свердловинами з використанням лінійної сплайн-інтерлінації // Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки» ІСН-2014 13-15 березня 2014 Полтава: РВВ ПУЄТ, 2014.

COMPUTATIONAL REALIZATION METHOD OF 3D MINERAL DISTRIBUTION RESTORING BETWEEN THE INCLINED BOREHOLES USING LINEAR SPLINE-INTERLINEATION

O. Chorna

Ukrainian Engineering Pedagogics Academy,
Universitetskaya St., 16, Kharkov, 61003, Ukraine, e-mail: lena1402@ukr.net

Abstract. Provides an overview of the new minerals distribution mathematical models construction 3D methods by 3 variables functions spline-interlineation methods on a system of inclined boreholes. The method of minerals distribution modeling with the help of spline-interlineation on inclined boreholes system placed both in the same plane and in an arbitrary manner is proposed.

Key words: spline-interlineation, mathematical model, inclined boreholes, triangulation.