MSC 74E20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАРЯДА ПУЗЫРЬКОВ В КАПЛЯХ ОБЛАКОВ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

Т.С. Кумыков

Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89-А, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: macist20@mail.ru

Аннотация. В работе предложена новая модель изменения заряда пузырьков в переохлажденных облачных каплях. Модель учитывает, фрактальные свойства облаков, а ее решение было получено с применением аппарата дробного исчисления.

Ключевые слова: фрактальная размерность, математическая модель, облачная капля, пузырьки.

Введение. Известно, что облака с мощными конвективными токами имеют фрактальную структуру [1], то есть облако является фрактальной средой. Поэтому можно думать, что процессы, протекающие в такой среде, хорошо описываются с помощью аппарата дробного исчисления.

Несмотря на несомненные успехи в изучении процессов в облаках (Качурин Л.Г., Мейсон Б.Дж., Мучник В.М., Чалмерс Дж.А., Юман М., Ribeira J.C., Workman E.J., Reynold S.E., Имянитов И.М., Френкель Я.И., и т.д.), многие из них до настоящего времени изучены па недостаточном уровне. Это относится и к процессам электризации облачных частиц (капель), к влиянию электрического ноля на микрофизические процессы, к влиянию микроструктуры облака на заряд и поле, и ко многим другим процессам.

Таким образом, для физики облаков представляет большой интерес разработка математических моделей конвективных облаков с детальным учетом влияния фрактальности среды на различные геопроцессы в облаках, способствующих развитию общей картины физики облаков. Математическое моделирование позволяет детально изучать как отдельные физические процессы, так и их взаимодействие между собой, а применение аппарата дробного исчисления, позволяет неявно включать дополнительные факторы взаимодействия физической системы. Несомненным преимуществом моделирования является тот фактор, что оно позволяет изучать недоступные или малодоступные для экспериментального исследования процессы с учетом фрактальности среды.

В настоящей работе проведено моделирование изменения заряда пузырьков в облачных каплях с учетом фрактальности среды, которые играют важную роль в процессе электризации облачных частиц.

Постановка и решение задачи. В процессе увеличения пузырька за счет диффузионных механизмов, важным моментом в облачных каплях является случай утечки газа в общем балансе газа в капле. Утечка газа бурно протекает в тот момент, когда переохлажденная облачная капля радиуса r сталкивается с градиной [2, 3] в результате которого, выходя на поверхность и разрушаясь, уносят с собой определенное количество заряда, определяемая формулой $q_a = 4\pi\varepsilon_0\xi a$.

Известно [3], что средний заряд q_r, который создается одной облачной каплей, радиуса r за счет пузырьков содержащихся в пей определяется в виде

$$q_r = 4\pi\varepsilon_0\xi na\,, \tag{1}$$

где ε_0 – электрическая постоянная, a – радиус пузырька, ξ – электрокинетический потенциал, n – количество пузырьков радиуса a, образующихся в облачной капле радиуса r.

В формуле (1) вводя переменную t, перепишем заряд одного пузырька в капле в следующей форме

$$q_r\left(t\right) = 4\pi\varepsilon_0\xi a\left(t\right)\ , \tag{2}$$

а изменение заряда пузырька образующегося в облачной капле примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}q_r\left(t\right) = 4\pi\varepsilon_0\xi\frac{\partial}{\partial t}a\left(t\right)\ , \tag{3}$$

Учитывая фрактальность среды, (3) можно записать в виде

$$\lambda\partial_{0t}^{\alpha}q_r\left(t\right) = 4\pi\varepsilon_0\xi\frac{\partial}{\partial t}a\left(t\right)\ , \tag{4}$$

где $\lambda = const > 0$, $\partial_{0t}^{\alpha}a\left(t\right) = D_{0t}^{\alpha-1}\frac{\partial a(t)}{\partial t}$ - регуляризованная дробная производная порядка α от функции $a\left(t\right)$ с началом и концом в точках 0 и t (производная по Капуто) [4], D_{ax}^{α} - оператор интегро–дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка α началом в точке $a \in [A, B]$, которая определяется следующим образом [5]:

$$D_{ax}^{\alpha}u\left(t\right) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}\left(x-a\right)}{\Gamma\left(-\alpha\right)}\displaystyle\int\limits_a^x \frac{u\left(t\right)dt}{\left|x-t\right|^{\alpha+1}}, \alpha < 0, \\ u\left(t\right), \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}\left(x-a\right)\dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}u\left(t\right), \alpha > 0. \end{cases}$$

где символ $\operatorname{sign} z$ определяется равенствами $\operatorname{sign}0 = 0$, $\operatorname{sign} z = z/\left|z\right|$, $z \neq 0$.

Замена $\partial/\partial t$ на ∂_{0t}^{α} или на D_{0t}^{α} в дифференциальных уравнениях, неявно включает дополнительные факторы взаимодействия физической системы. Поэтому можно утверждать, что уравнение (4) описывает фрактальный процесс.

С учетом, что $\dfrac{\partial}{\partial t}a\left(t\right) = 2,4\phi\dfrac{p^2}{p_0\sigma}a\left(t\right)$, где a – размер пузырька, φ – пересыщение, p – давление окружающей среды, p_0 – атмосферное давление, σ – поверхностное натяжение воды, перепишем (4)

$$\lambda\partial_{0t}^{\alpha}q_r\left(t\right) = 4\pi\varepsilon_0\xi\cdot 2,4\phi\,\frac{p^2}{p_0\sigma}a\left(t\right)\ , \tag{5}$$

Обозначим $4\pi\varepsilon_0\xi\cdot 2,4\phi p^2/\lambda p_0\sigma = B$ (в случае расчета полного заряда всех пузырьков образующихся в капле, B умножается па n - количество пузырьков радиуса a), тогда (5) примет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} q_r\left(t\right) = Ba\left(t\right) \;, \tag{6}$$

К уравнению (6) добавим начальное условие

$$q_r\left(0\right) = q_0 \,, \tag{7}$$

Решим задачу (6), (7). Для этого используя формулу $\partial_{0t}^{\alpha} a\left(t\right) = D_{0t}^{\alpha-1}\dfrac{\partial a\left(t\right)}{\partial t}$ перепишем (6) в виде

$$D_{0t}^{\alpha-1} D_{0t}^{1} q_r\left(t\right) = Ba\left(t\right) \;, \tag{8}$$

Применив обобщенную формулу Ньютона-Лейбница к уравнению (8) получим

$$D_{0t}^{\alpha-1+1} q_r\left(t\right) - \frac{\left|t-0\right|^{-\alpha+1-1}}{\Gamma\left(1-\alpha+1-1\right)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{1-1} q_r\left(t\right) = D_{0t}^{\alpha} q_r\left(t\right) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} D_{00}^{0} q_r\left(t\right) =$$

$$= D_{0t}^{\alpha} a\left(t\right) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} q_0 = Ba\left(t\right) \;, \tag{9}$$

Подействуем па обе части уравнения (9) оператором $D_{0t}^{-\alpha}$ тогда получим следующее выражение

$$D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^{\alpha} q_r\left(t\right) = D_{0t}^{-\alpha}\left[\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} q_0 + Ba\left(t\right)\right] \;, \tag{10}$$

в которой после применения обобщенной формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$D_{0t}^{\alpha-\alpha} q_r\left(t\right) - \frac{\left|t-0\right|^{\alpha-1}}{\Gamma\left(1+\alpha-1\right)} D_{00}^{\alpha-1} q_r\left(t\right) = D_{0t}^{-\alpha}\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} q_0 + D_{0t}^{-\alpha}\left[Ba\left(t\right)\right] \;, \tag{11}$$

Так как $D_{00}^{\alpha-1} q_r\left(t\right) = 0$, (11) принимает вид

$$q_r\left(t\right) = D_{0t}^{-\alpha}\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} q_0 + D_{0t}^{-\alpha}\left[Ba\left(t\right)\right] \;, \tag{12}$$

Решение правой части уравнения (12) выглядит следующим образом

$$D_{0t}^{-\alpha}\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} q_0 + D_{0t}^{-\alpha}\left[Ba\left(t\right)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^t \frac{\tau^{-\alpha} q_0 d\tau}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\left|t-\tau\right|^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^t B\frac{a\left(t\right)d\tau}{\left|t-\tau\right|^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{q_0}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_0^t \tau^{-\alpha}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1} d\tau + \frac{B}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^t a\left(t\right)\left(t-\tau\right)^{\alpha-1} d\tau =$$

$$= q_0 + \frac{B}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^t a\left(t\right)\left(t-\tau\right)^{\alpha-1} d\tau \,, \tag{13}$$

где

$$\int\limits_0^t \tau^{-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \left| \begin{array}{c} s=\frac{\tau}{t}, \\ \tau = ts \\ d\tau = tds \end{array} \right| = \int\limits_0^1 t^{-\alpha}s^{-\alpha}(t-st)^{\alpha-1}ds = \beta(1-\alpha,\alpha) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\ .$$

Решение задачи (6), (7) в итоге принимает вид

$$q_r(t) = q_0 + BD_{0t}^{-\alpha}a(t)\ , \tag{14}$$

Уравнение (14) представляет собой обобщенное уравнение закона изменения заряда пузырьков создаваемое облачной каплей с учетом фрактальности среды.

Решение интегрального уравнения (14) имеет вид [6]

$$q_r(t) = q_0 + Ba_0\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(B(t-\tau)^\alpha)\,d\tau\,,$$

где с учетом $E_{\alpha,\alpha}(B(t-\tau)^\alpha) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{B^i(t-\tau)^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}$ – функции типа Миттаг-Леффлера, окончательно (14) примет вид

$$q_r(t) = q_0 + Bq_0\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B^i(t-\tau)^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}d\tau\,.$$

Анализ результатов математического моделирования. Математическое моделирование проводилось с помощью математического пакета символьной математики Wolfram Mathematica 9. На рис. 1 приведены расчетные кривые изменения относительного заряда пузырька $q_r(t)$ в облачной капле согласно различным значениям параметров t и α.

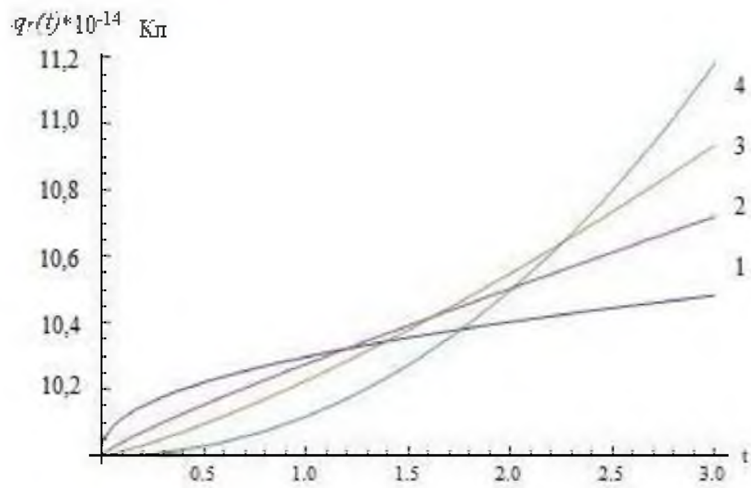

Рис. 1. Расчетные кривые определяющая область изменения $q_r\,(t)$ в зависимости от параметров t и α, полученные согласно формуле (14): α=0,2 (кривая 1); α=0,4 (кривая 2); α= 0,6 (кривая 3); α=0,8 (кривая 4).

Видно, что при достаточно малых значениях α расчётные кривые перегруппировываются с бесконечно длинными «степенными хвостами». Можно также заметить, что «степенные хвосты» указывают на нелинейность фрактальных процессов в облачной среде. Полученные данные хорошо согласовываются с данными Ирибарне и Мейсена [7] в котором на один пузырек радиусом более 0,1 мм образуются заряды порядка $10^{-14} - 10^{-15}$ Кл.

Заключение. Одним из примеров фрактальных объектов в природе являются облака. Облака на самом деле являются самоафинными фракталами, т.к. атмосфера стратифицирована. Это означает, что вертикальное направление неравномерно с горизонтальным, следовательно, облака не могут быть самоподобны по форме. Поэтому важным моментом является изучение процессов внутри облака с учетом влияния фрактальности среды, другими словами фрактальные геопроцессы.

Облака имеют разную структуру, и имеют свою классификацию по происхождению и морфологическим признакам, к которым, добавляя данные об их фрактальной структуре и фрактальных процессах, в дальнейшем будет возможным формирование более общей картины состояния физики облаков.

В работе предложена математическая модель изменения заряда пузырьков образующиеся в облачных каплях с учетом фрактальности среды. Получено решение этой модели с использованием аппарата дробного исчисления.

Дальнейшие исследования с помощью разработанной модели будут направлены на более глубокое изучение процессов электризации и пространственного разделения зарядов в грозовых облаках с учетом взаимодействия процессов внутри облака и фрактальности среды.

Литература

1. Proceedings of the Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics / Edited by L.Pietronero, E. Tosatti / ICTP, Trieste, Italy, 198. – P.644-649.
2. Кумыков Т.С. Жекамухов М.К., Каров Б.Г. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке. I. Кинетика процесса выделения пузырьков при повышении температуры переохлажденных облачных капель // Метеорология и Гидрология. – 2008. – №11. – С.44-52.
3. Кумыков Т.С. Жекамухов М.К., Каров Б.Г. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке II. Генерирование грозового электричества за счет выделения заряженных пузырьков при намерзании переохлажденных облачных капель на поверхности градин // Метеорология и Гидрология. – 2008. – №12. – С.15-24.
4. Caputo M., Elasticita de dissipazione, Zanichelli / Bologna, Italy, (Links), 1969.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / М: Высшая школа, 1995. – 301 с.
6. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2005. – 185 с., С.22.
7. Iribarne J.V., Mason B.J. Electrication accompanying the bursting of bubbles in water and dilute aqueous solutions // Trans. Faraday Soc. – 1967. – 63. – №537. – P.143-151.

MATHEMATICAL MODELLING OF BUBBLE CHARGE CHANGE IN DROPLET CLOUDS WITH ACCOUNT OF ENVIRONMENT FRACTALITY

T.S. Kumykov

Institution of Applied Mathematics and Automation,
Shortanova St., 89-A, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: macist20@mail.ru

Abstract. The paper proposes a new model of the change charge bubbles in supercooled cloud droplets. The model takes into account, the fractal properties of clouds, and the solution was obtained with the application of the fractional calculus.

Key words: fractal dimension, mathematical model, cloud droplet, bubble.