MSC 35Q05

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрена задача Коши для нагруженного уравнения с дробными производными, имеющего сингулярную особенность в коэффициенте. Доказано достаточное условие разрешимости этой задачи и найден явный вид разрешающего оператора.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, нагруженное сингулярное уравнение, разрешающий оператор, однозначная разрешимость.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1$ рассмотрим абстрактное уравнение дробного порядка

$$B_{k,\alpha}u(t) \equiv \frac{d}{dt}\,{}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t) + \frac{k}{t}\left({}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t) - {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(0)\right) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

где ${}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t)$ — дробная производная Капуто

$${}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}_{0,t}\left(u(t) - u(0)\right)\,, \quad {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(0) = \lim_{t\to 0}\ {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t)\,,$$

$$I^{1-\alpha}_{0,t}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau$$

– левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Уравнение (1) содержит значение неизвестной функции и ее дробной производной в точке $t = 0$, поэтому, следуя [1], [2], будем называть его нагруженным уравнением. Важно отметить, что наличие в уравнении (1) заданной при $t = 0$ нагрузки позволяет установить разрешимость именно задачи Коши, а не весовой начальной задачи, как это свойственно для ряда сингулярных уравнений.

При $\alpha = 1$ уравнение (1) превращается в уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}\left(u'(t) - u'(0)\right) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378 А-2013

с нагрузкой $u'(0)$, для которого задача Коши

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = u_1\,, \tag{3}$$

должна исследоваться особо с учетом результатов работ [3], [4].

При $\alpha = 0$ уравнение (1) превращается в нагруженное уравнение первого порядка вида

$$u'(t) + \frac{k}{t}\,(u(t) - u(0)) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{4}$$

для которого мы также исследуем разрешимость задачи Коши, но, естественно, уже с одним начальным условием.

Будем разыскивать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0) = u_0\,, \quad {}^C D^{\alpha}_{0,t} u(0) = u_1\,, \tag{5}$$

и вначале рассмотрим случай, когда $k = 0$, $u_1 = 0$.

Условие 1. Если $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega \geq 0$ и $0 < \alpha < 1$, то $\lambda^{\alpha+1}$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и для всех целых $n \geq 0$ резольвента $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda^{\alpha} R \left(\lambda^{\alpha+1} \right) \right) \right\| \leq \frac{M\; n!}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^{n+1}}\,. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $k = 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 \in D(A)$, $u_1 = 0$ *и оператор* A *удовлетворяет условию* 1. *Тогда задача* (1), (5) *однозначно разрешима.*

$\square$ После применения к уравнению (1) оператора дробного интегрирования $I^{\alpha}_{0,t}$ и дифференцирования получим следующую начальную задачу

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)\; ds\,, \quad t \geq 0\,, \tag{7}$$

$$u(0) = u_0. \tag{8}$$

Задача (7), (8) представляет собой специальный случай задачи исследованной в [5]. В теореме 3 указанной работы [5] установлено, что условие 1 является необходимым и достаточным условием на оператор A, обеспечивающим однозначную разрешимость задачи (7), (8), а стало быть, и эквивалентной ей, при сделанных предположениях в доказываемой теореме, задаче (1), (5). Разрешающий оператор задачи (7), (8) обозначим через $Y_{0,\alpha}(t)$, при этом $u(t) = Y_{0,\alpha}(t)u_0$. Для $Y_{0,\alpha}(t)$ в [5] установлены представление и оценка

$$Y_{0,\alpha}(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{\lambda t}\; \lambda^{\alpha} R\left(\lambda^{\alpha+1}\right) u_0\; d\lambda\,, \quad u_0 \in D\left(A^2\right)\,,$$

$$\|Y_{0,\alpha}(t)\| \leq M\; e^{\sigma t}\,, \quad \sigma > \omega\,. \quad \blacksquare$$

При $k > 0,\ \alpha \geq 0$ введем в рассмотрение оператор

$$P_{k,\alpha}u(t) = c_{k,\alpha} \int\limits_0^1 \left(1 - s^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1} u(ts)\, ds\,, \tag{9}$$

$$c_{k,\alpha} = \frac{\alpha+1}{B(k/(\alpha+1), 1/(\alpha+1))}\,,$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция, и который выражается через дробный интеграл Эрдейи-Кобера $I^{\gamma}_{0+,\sigma,\eta}$ (см. [6], с. 246) следующим образом

$$P_{k,\alpha}u(t) = \frac{\Gamma\left((k+1)/(\alpha+1)\right)}{\Gamma\left(1/(\alpha+1)\right)}\ I^{k/(\alpha+1)}_{0+,\alpha+1,-\alpha/(\alpha+1)}u(t)\,.$$

Постоянная $c_{k,\alpha}$ подобрана так, чтобы

$$\lim_{t\to 0} P_{k,\alpha}u(t) = u(0)\,.$$

Теорема 2. *Пусть $k > 0,\ \alpha \geq 0$ и функция $u(t)$ такова, что существует дробная производная вида $\left({}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t)\right)'$. Тогда справедливо равенство*

$$B_{k,\alpha}\ P_{k,\alpha}u(t) = P_{k,\alpha}\left({}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t)\right)' + \frac{c_{k,\alpha}}{t}\ {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(0)\,. \tag{10}$$

□ Применяя к (9) оператор $B_{k,\alpha}$, после интегрирования по частям получим

$$B_{k,\alpha}\ P_{k,\alpha}u(t) = c_{k,\alpha} \int\limits_0^1 \left(1-s^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ s^{\alpha+1}\ \frac{d}{d(ts)}\ {}^C D^{\alpha}_{0,ts}u(t)\ ds +$$

$$+\frac{k\ c_{k,\alpha}}{t} \int\limits_0^1 \left(1-s^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ s^{\alpha}\ {}^C D^{\alpha}_{0,ts}u(t)\ ds =$$

$$= c_{k,\alpha} \int\limits_0^1 \left(1-s^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ s^{\alpha+1}\ \frac{d}{d(ts)}\ {}^C D^{\alpha}_{0,ts}u(t)\ ds +$$

$$+\frac{c_{k,\alpha}}{t}\ {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(0) + c_{k,\alpha} \int\limits_0^1 \left(1-s^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)}\ \frac{d}{d(ts)}\ {}^C D^{\alpha}_{0,ts}u(t)\ ds =$$

$$= c_{k,\alpha} \int\limits_0^1 \left(1-s^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ \left(s^{\alpha+1}+1-s^{\alpha+1}\right)\ \frac{d}{d(ts)}\ {}^C D^{\alpha}_{0,ts}u(t)\ ds + \frac{c_{k,\alpha}}{t}\ {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(0) =$$

$$= P_{k,\alpha}\left({}^C D^{\alpha}_{0,t}u(t)\right)' + \frac{c_{k,\alpha}}{t}\ {}^C D^{\alpha}_{0,t}u(0)\,. \quad \blacksquare$$

Непосредственным следствием теоремы 2 является разрешимость задачи (1), (5) для $k > 0$ и $u_1 = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 \in D(A)$, $u_1 = 0$ *и оператор* A *удовлетворяет условию* 1. *Тогда функция* $u(t) = P_{k,\alpha} Y_{0,\alpha}(t) u_0$ *является решением задачи* (1), (5).

В дальнейшем при $0 < \alpha < 1$ будем использовать обозначение $Y_{k,\alpha}(t) = P_{k,\alpha} Y_{0,\alpha}(t)$.

Замечание 1. Если $0 < \alpha < 1$ и A — ограниченный оператор, то

$$Y_{k,\alpha}(t) = \frac{\Gamma\left((k+1)/(\alpha+1)\right)}{\Gamma\left(1/(\alpha+1)\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j + 1/(\alpha+1)\right)\ t^{(\alpha+1)j} A^j}{\Gamma\left((\alpha+1)j + 1\right)\ \Gamma\left(j + (k+1)/(\alpha+1)\right)}. \tag{11}$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ ряд в правой части (11) превращается в операторную функцию Бесселя (см. [4])

$$Y_k(t) = \Gamma(k/2+1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(t\sqrt{A}/2\right)^{2j}}{j!\ \Gamma(j + k/2 + 1/2)} = \Gamma(k/2+1/2) \left(t\sqrt{A}/2\right)^{1/2-k/2} I_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{A}\right),$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, а при $k = 0$ — в функцию Миттаг-Леффлера $E_{\alpha+1,1}(t^{\alpha+1} A)$.

Для построенной операторной функции $Y_{k,\alpha}(t)$ справедлива формула сдвига по первому параметру.

Теорема 4. *Пусть* $m > k > 0$, $0 < \alpha < 1$ *и оператор* A *удовлетворяет условию* 1. *Тогда*

$$Y_{m,\alpha}(t) = \frac{\alpha+1}{B((m-k)/(\alpha+1), (k+1)/(\alpha+1))} \int_0^1 s^k\ (1 - s^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1}\ Y_{k,\alpha}(ts)\ ds. \tag{12}$$

□ После ряда преобразований, используя интеграл 2.2.5.1 [7], получим

$$\int_0^t \tau^k\ (t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1}\ Y_{k,\alpha}(\tau)\ d\tau =$$

$$= c_{k,\alpha} \int_0^t \tau^\alpha\ (t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} \int_0^\tau \left(\tau^{\alpha+1} - \xi^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ Y_{0,\alpha}(\xi)\ d\xi d\tau =$$

$$= c_{k,\alpha} \int_0^t Y_{0,\alpha}(\xi) \int_\xi^t \tau^\alpha\ (t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})^{(m-k)/(\alpha+1)-1} \left(\tau^{\alpha+1} - \xi^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ d\tau d\xi =$$

$$= \frac{c_{k,\alpha}}{\alpha+1} \int_0^t Y_{0,\alpha}(\xi) \int_{\xi^{\alpha+1}}^{t^{\alpha+1}} (t^{\alpha+1} - \eta)^{(m-k)/(\alpha+1)-1} \left(\eta - \xi^{\alpha+1}\right)^{k/(\alpha+1)-1}\ d\eta d\xi =$$

$$= \frac{c_{k,\alpha}\ B((m-k)/(\alpha+1), k/(\alpha+1))}{\alpha+1} \int_0^t (t^{\alpha+1}-\xi)^{m/(\alpha+1)-1} Y_{0.\alpha}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma\left((m-k)/(\alpha+1)\right)\ \Gamma\left((k+1)/(\alpha+1)\right)}{(\alpha+1)\ \Gamma\left((m+1)/(\alpha+1)\right)}\ t^{m-\alpha} Y_{m,\alpha}(t)\,,$$

откуда и следует требуемое равенство (12). ■

Переходим к исследованию случая, когда $k=0$, $u_0=0$, а $u_1 \neq 0$.

Теорема 5. *Пусть* $k=0$, $0<\alpha<1$, $u_0=0$, $u_1 \in D(A)$ *и оператор* A *удовлетворяет условию* 1. *Тогда задача* (1), (5) *однозначно разрешима.*

□ После применения к уравнению (1) оператора дробного интегрирования $I^{\alpha}_{0,t}$ и дифференцирования получим следующую начальную задачу

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} A u(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1, \quad t \geq 0\,, \tag{13}$$

$$u(0) = 0. \tag{14}$$

Также как и задача (7), (8), задача (13), (14) представляет собой специальный случай задачи исследованной в [5] и однозначно разрешима. Разрешающий оператор задачи (13), (14) обозначим через $L_{0,\alpha}(t)$, при этом $u(t) = L_{0,\alpha}(t)u_1$, а для $L_{0,\alpha}(t)$ в [5] установлено представление

$$L_{0,\alpha}(t) = I^{\alpha}_{0,t} Y_{0,\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} Y_{0,\alpha}(s)\, ds\,. \quad ■$$

Непосредственным следствием теоремы 2 является разрешимость задачи (1), (5) для $k>0$ и $u_0=0$.

Теорема 6. *Пусть* $k>0$, $0<\alpha<1$, $u_0=0$, $u_1 \in D(A)$ *и оператор* A *удовлетворяет условию* 1. *Тогда функция* $u(t) = P_{k,\alpha} L_{0,\alpha}(t) u_0$ *является решением задачи* (1), (5).

В дальнейшем при $0<\alpha<1$ будем использовать обозначение $L_{k,\alpha}(t) = P_{k,\alpha} L_{0,\alpha}(t)$.

Замечание 2. Если $0<\alpha<1$ и A — ограниченный оператор, то

$$L_{k,\alpha}(t) = \Gamma\left(k/(\alpha+1)+1\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)\ t^{(\alpha+1)j+\alpha} A^j}{\Gamma\left((\alpha+1)j+\alpha+1\right)\ \Gamma\left(j+k/(\alpha+1)+1\right)}\,. \tag{15}$$

При $\alpha=1$ ряд в правой части (15) выражается через функцию Струве

$$L_k(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \Gamma\left(k/2+1\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(t\sqrt{A}/2\right)^{2j}}{\Gamma\left(j+3/2\right)\Gamma\left(j+k/2+1\right)} =$$

$$= \frac{2^{k/2-1/2}\sqrt{\pi}\ \Gamma(k/2+1)}{A^{k/4+1/4}\ t^{k/2-1/2}}\ \mathbf{L}_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{A}\right)\,,$$

где $\mathbf{L}_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Струве ([8], с. 655), а при $k = 0$ — через функцию Миттаг-Леффлера $L_k(t) = t^\alpha E_{\alpha+1,\alpha+1}(t^{\alpha+1}A)$.

Для операторной функции $L_{k,\alpha}(t)$ справедлива формула сдвига но первому параметру, доказательство которой проводится также как и в теореме 4.

Теорема 7. *Пусть $m > k > 0$, $0 < \alpha < 1$ и оператор A удовлетворяет условию* 1. *Тогда*

$$L_{m,\alpha}(t) = \frac{\alpha+1}{B((m-k)/(\alpha+1), k/(\alpha+1)+1)} \int_0^1 s^k \left(1 - s^{\alpha+1}\right)^{(m-k)/(\alpha+1)-1} L_{k,\alpha}(ts)\, ds\,.$$

Построенные операторные функции $Y_{k,\alpha}(t)$, $L_{k,\alpha}(t)$ и теоремы 3 и 6 позволяют установить разрешимость задачи (1), (5).

Теорема 8. *Пусть $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u_0, u_1 \in D(A)$ и оператор A удовлетворяет условию* 1. *Тогда функция $u(t) = Y_{k,\alpha}(t)u_0 + L_{k,\alpha}(t)u_1$ является решением задачи Коши* (1), (5).

Для доказательства единственности решения задачи Коши (1), (5) сделаем дополнительное предположение. Будем считать, что с оператором A при некотором $m \geq 0$ равномерно корректна задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{16}$$

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = 0\,. \tag{17}$$

В работах [3], [4] приводятся условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость этой задачи. Они сформулированы в терминах оценки нормы дробной степени резольвенты оператора A и ее производных. Множество операторов A, с которыми задача (16), (17) равномерно корректна, обозначим через G_m, а разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Y_m(t)$ и назовем операторной функцией Бесселя.

Теорема 9. *Пусть $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, пусть также при некотором $m \geq 0$ оператор $A \in G_m$* и *$Y_m(t)$ — соответствующая операторная функция Бесселя. Тогда решение решение задачи Коши* (1), (5) *единственно.*

□ Доказательство единственности решения задачи (1), (5) будем вести от противного. Если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи (1), (5), то рассмотрим функцию двух переменных $w(t,s) = f\left(Y_m(s)\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right)$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$B_{k,\alpha}w(t,s) = \frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2} + \frac{m}{s}\,\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}\,, \quad t, s > 0 \tag{18}$$

и условиям

$$\lim_{t\to 0}\, w(t,s) = \lim_{t\to 0}\, {}^C D^\alpha_{0,t} w(t,s) = \lim_{s\to 0} \frac{\partial w(t,s)}{\partial s} = 0\,. \tag{19}$$

Подобно тому, как это было сделано в [9], истолкуем $w(t,s)$ как обобщенную функцию умеренного роста и по переменной s применим преобразование Фурье-Бесселя

$$\hat{w}(t,\lambda)=\int_0^\infty s^{2p+1}\,j_p(\lambda s)\,w(t,s)\,ds\,,\quad w(t,s)=\gamma_p\int_0^\infty \lambda^{2p+1}\,j_p(\lambda s)\,\hat{w}(t,\lambda)\,d\lambda\,,$$

$$p=\frac{1-m}{2}\,,\quad \gamma_p=\frac{1}{2^{2p}\,\Gamma^2(p+1)}\,,\quad j_p(s)=\frac{2^p\,\Gamma(p+1)}{s^p}\,J_p(s)\,,$$

где $J_p(\cdot)$ — функция Бесселя.

Из (18), (19) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ получим следующую задачу

$$B_{k,\alpha}\hat{w}(t,\lambda)=-\lambda^2\,\hat{w}(t,\lambda)\,,\quad t>0\,,\tag{20}$$

$$\lim_{t\to0}\,\hat{w}(t,\lambda)=\lim_{t\to0}\,{}^C D^\alpha_{0,t}\hat{w}(t,\lambda)=0\,.\tag{21}$$

В силу замечаний 1 и 2 общее решение уравнения (20) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda)=\frac{d_1(\lambda)\,\Gamma\left((k+1)/(\alpha+1)\right)}{\Gamma\left(1/(\alpha+1)\right)}\sum_{j=0}^\infty\frac{\Gamma\left(j+1/(\alpha+1)\right)\,t^{(\alpha+1)j}(-\lambda^2)^j}{\Gamma\left((\alpha+1)j+1\right)\,\Gamma\left(j+(k+1)/(\alpha+1)\right)}+$$

$$+d_2(\lambda)\,\Gamma\left(k/(\alpha+1)+1\right)\sum_{j=0}^\infty\frac{\Gamma(j+1)\,t^{(\alpha+1)j+\alpha}(-\lambda^2)^j}{\Gamma\left((\alpha+1)j+\alpha+1\right)\,\Gamma\left(j+k/(\alpha+1)+1\right)}\,,$$

и из начальных условий (21) следуют равенства $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=0$. Следовательно, $\hat{w}(t,\lambda)=w(t,s)=0$ для любого $s\ge0$. В силу произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, и единственность решения установлена. ■

Найдем далее решение нагруженного уравнения первого порядка (4), удовлетворяющее начальному условию

$$u(0)=u_0\,.\tag{22}$$

Чтобы описать класс операторов A, для которого корректна задача (4), (22), напомним определение проинтегрированной полугруппы (ПП).

Определение. *Пусть $\beta>0$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_\beta(t),\ t\ge0$ называется β раз ПП, если:*

1) $\Gamma(\beta)T_\beta(t)T_\beta(s)=\int\limits_s^{t+s}(t+s-r)^{\beta-1}T_\beta(r)\,dr-\int\limits_0^t(t+s-r)^{\beta-1}T_\beta(r)\,dr,\quad t,s\ge0;$

2) $T_\beta(0)=0;$

3) *для любого $x\in E$ функция $T_\beta(t)x$ непрерывна по $t\ge0$;*

4) *существуют постоянные $M>0,\ \omega\in R$ такие, что*

$$\|T_\beta(t)\|\le Me^{\omega t}\,,\quad t\ge0\,.$$

Генератор A ПП $T_\beta(t)$ определяется следующим образом: $D\,(A)$ — множество элементов $x\in E$ таких, что существует элемент $y\in E$, удовлетворяющий равенству

$$T_\beta(t)x-\frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+1)}x=\int\limits_0^t T_\beta(s)y\,ds\,,\quad t\ge0\,;\tag{23}$$

в этом случае полагают $Ax = y$.

Теорема 10. *Пусть $k > 0$, A — генератор k раз ПП $T_k(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $u(t) \equiv Y_{k,0}(t)u_0 = \Gamma(k+1)\, t^{-k}\, T_k(t)u_0$ является единственным решением задачи* (4), (22).

□ Из равенства (23) следует справедливость начального условия (22). Проверим, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Действительно,

$$u'(t) + \frac{k}{t}\,(u(t) - u(0)) = \Gamma(k+1)\; t^{-k}\; T_k'(t)u_0 - \frac{k}{t}u_0 =$$

$$= \Gamma(k+1)\; t^{-k}\left(AT_k(t)u_0 + \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}u_0\right) - \frac{k}{t}u_0 = \Gamma(k+1)\; t^{-k}\; AT_k(t)u_0 = Au(t)\,.$$

Доказательство единственности решения задачи (4), (22) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения этой задачи. Рассмотрим функцию $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Она, очевидно, удовлетворяет задаче

$$v'(t) = Av(t)\,, \qquad v(0) = 0\,,$$

которая имеет (см. [10]) единственное решение $v(t) \equiv 0$ и, стало быть, $u_1(t) \equiv u_2(t)$. ■

Замечание 3. Если A — ограниченный оператор, то $Y_{k,0}(t) = \Gamma(k+1)\; E_{1,k+1}(tA)$.

Из теоремы 2 для операторной функции $Y_{k,0}(t)$ вытекает формула сдвига по параметру.

Теорема 11. *Пусть $m > k > 0$ и оператор A — генератор k раз ПП. Тогда*

$$Y_{m,0}(t) = \frac{1}{B(m-k, k+1)} \int_0^1 s^k\; (1-s)^{m-k-1}\; Y_{k,0}(ts)\; ds\,. \tag{24}$$

Отметим, что формула (24) примыкает к равенству (12) при $\alpha = 0$.

Если задача (16), (17) равномерно корректна, т.е., $A \in G_m$ и $Y_m(t)$ — ОФБ для этой задачи, то, как доказано в [3], оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$, при этом задача

$$v'(t) = Av(t)\,, \qquad v(0) = v_0 \in D(A)\,,$$

равномерно корректна, $v(t) = T(t)v_0$ и для полугруппы $T(t)$ справедливо представление

$$T(t) = \frac{1}{2^m\; \Gamma(m/2 + 1/2)\; t^{m/2+1/2}} \int\limits_0^\infty s^m\; \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_m(s)\; ds\,. \tag{25}$$

Сформулируем утверждение, позволяющее выразить операторную функцию $Y_{k,0}(t)$ через операторную функцию Бесселя $Y_m(t)$. При этом будет использована $\Psi(\cdot,\cdot;\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми (см. [8], с. 365.)

Теорема 12. *Пусть $k > 0$, при некотором $m \geq 0$ оператор $A \in G_m$ и $Y_m(t)$ — соответствующая операторная функция Бесселя. Тогда справедливо представление*

$$Y_{k,0}(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{2^m\; \Gamma(m/2+1/2)\; t^{m/2+1/2}} \int\limits_0^\infty s^m\; \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \Psi\left(k, \frac{m+1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right) Y_m(s)\; ds\,. \tag{26}$$

□ Используя представление (25), после элементарных преобразований получим

$$Y_{k,0}(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{t^k}\ I^k_{0,t}T(t) = \frac{\Gamma(k+1)}{t^k}\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{k-1}T(\tau)\,d\tau = k\int\limits_0^1 (1-\xi)^{k-1}T(t\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{k}{2^m\,\Gamma(m/2+1/2)\,t^{m/2+1/2}}\int\limits_0^1 (1-\xi)^{k-1}\xi^{-m/2-1/2}\int\limits_0^\infty \eta^m \exp\left(-\frac{s^2}{4t\xi}\right) Y_m(s)\,dsd\xi =$$

$$= \frac{k}{2^m\,\Gamma(m/2+1/2)\,t^{m/2+1/2}}\int\limits_0^\infty s^m\,Y_m(s)\int\limits_0^1 (1-\xi)^{k-1}\xi^{-m/2-1/2}\exp\left(-\frac{s^2}{4t\xi}\right)\,d\xi ds =$$

$$= \frac{k}{2^m\,\Gamma(m/2+1/2)\,t^{m/2+1/2}}\int\limits_0^\infty s^m\,Y_m(s)\int\limits_1^\infty (\eta-1)^{k-1}\eta^{m/2-1/2-k}\exp\left(-\frac{s^2\eta}{4t}\right)\,d\eta ds =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{2^m\,\Gamma(m/2+1/2)\,t^{m/2+1/2}}\int\limits_0^\infty s^m\ \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\Psi\left(k,\frac{m+1}{2};\frac{s^2}{4t}\right)Y_m(s)\,ds\,,$$

при этом был использован интеграл 2.3.6.6 из [7]. ■

Отметим в заключение, что формула (26) является аналогом равенства (25) для задачи (4), (22) и превращается в нее при $k=0$.

Литература

1. Дженалиев М.Л. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / Алматы: Ин-т теор. и прикл. матем., 1995.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / М.: Наука, 2012.
3. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). Вып. 27. – С.29-37.
4. Глушак А.В., Покручин О.А. Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – №19(190). Вып. 36. – С.17-26.
5. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in banach spaces / Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1980. – 62. – P.207-219.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции / М.: Наука, 1981.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / М.: Наука, 1986.
9. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – 36,№2. – С.299-310.
10. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // УМН. – 1994. – 49, вып. 6(300). – С.111-150.

INITIAL VALUE PROBLEM FOR LOADED SINGULAR EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

A.V. Glushak

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. The Cauchy problem for loaded equation with fractional derivatives in Banach's space is under consideration. The coefficient at term of fractional derivative has a singular feature. It is proved the sufficient condition for the solvability of the problem. The explicit form of the solution operator is found.

Key words: abstract Cauchy problem, loaded singular equation, solution operator, unique solvability.