MSC 60H10, 60H30

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Ю.Е. Гликлих, Е.Ю. Машков

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: yeg@math.vsu.ru
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33, Курск, 305000, Россия, e-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Аннотация. Исследуется стохастическое уравнение леонтьевского типа с сингулярным пучком постоянных матриц коэффициентов и импульсными воздействиями в правой части. Отметим, что для исследования решений таких уравнений необходимо использовать производные высших порядков от свободных членов правой части (включая винеровский процесс). В связи с этим, для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, что позволяет при исследовании не использовать аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются аналитические формулы для решений уравнения в терминах производных в среднем случайных процессов.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, дифференциально-алгебраическое уравнение, уравнение леонтьевского типа.

Введение. Рассматривается специальная система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито вида

$$d\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + \Lambda d\tilde{w}(t)\,, \quad 0 \le t \le T\,,$$

где $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок постоянных матриц размера $n \times m$; $\xi(t)$ – искомый случайный процесс; $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n; Λ – невырожденная матрица размера $n \times n$; $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, принимающая в нуле нулевое значение со всеми своими производными; $\zeta(t)$ – n-мерный процесс скачков; S – $n \times n$-матрица. Отправной точкой для данной статьи послужила работа [1], в которой данная система рассматривается с регулярным пучком постоянных матриц коэффициентов.

Специфика уравнений леонтьевского типа предполагает рассматривать производные высших порядков от правой части (в том числе и винеровского процесса). Как известно (см., например, [1]), производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для использования в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения сложным.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования (как и в [3,4]) данного уравнения основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не использованы обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем но Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

Следующий раздел посвящен описанию основ теории производных в среднем в объеме, необходимом для целей настоящей статьи. Далее, приводится описание канонической формы Кронекера-Шура сингулярного пучка постоянных матриц. Затем, изучаются вопросы о приведении стохастических дифференциальных уравнений сингулярного типа к каноническому виду. Наконец, последний раздел посвящен описанию решений сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями.

Модификации аппарата производных в среднем (разд. 1) и канонической формы Шура (разд. 2), приспособленные для целей настоящей работы, выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №13-01-00041 и №15-01-00620).

Результаты разд. 3 получены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 1.1539.2014/К).

Результаты раздела 4 получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

1. Производные в среднем случайных процессов. Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$ "настоящее" $\mathcal{N}_t^\xi$, которое будем считать полным, т. е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону даем следующее определение:

Определение 1 [1].

(i) *Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

(ii) *Производная в среднем слева* $D_*\xi(t)$ *процесса* $\xi(t)$ *в момент времени* t *есть* L_1-*случайная величина*

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ *и* $\Delta t\to+0$ *означает, что* Δt *стремится к* 0 *и* $\Delta t>0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t)\neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [5]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}|\xi(t)=x)$$
$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}|\xi(t)=x)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t)=Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t)=Y_*^0(t,\xi(t))$.

Определение 2 [1]. *Производная* $D_S=\frac{1}{2}(D+D_*)$ *называется симметрической производной в среднем. Производная* $D_A=\frac{1}{2}(D-D_*)$ *называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x)=\frac{1}{2}(Y^0(t,x)+Y_*^0(t,x))$ и $u^\xi(t,x)=\frac{1}{2}(Y^0(t,x)-Y_*^0(t,x))$.

Определение 3 [1]. $v^\xi(t)=v^\xi(t,\xi(t))=D_S\xi(t)$ *называется текущей скоростью процесса* $\xi(t)$; $u^\xi(t)=v^\xi(t,\xi(t))=D_A\xi(t)$ *называется осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$.

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов (см. [1]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([1]), который мы обозначим символом $w(t)$.

Лемма 1 [1,3]. *Для* $t\in(0,l]$ *имеют место равенства*

$$Dw(t)=0,\;\; D_*w(t)=\frac{w(t)}{t},\;\; D_Sw(t)=\frac{w(t)}{2t}.$$

При целом $k\geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}.$$

2. Каноническая форма сингулярного пучка постоянных матриц. Приведем необходимые сведения из теории постоянных матриц, подробное изложение которых имеется в книгах [6,7].

Определение 4. *Если A и B – матрицы размера $n \times m$, то матрица $\lambda A + B$ называется матричным пучком, или просто пучком. Здесь λ является параметром, а не конкретным числом.*

Определение 5. *Если A и B – квадратные матрицы и $det(\lambda A + B)$ не равен нулю тождественно, то пучок $\lambda A + B$ называют регулярным. В противном случае, пучок называется сингулярным.*

Теорема 1 (Обобщенная вещественная форма Шура). *Для регулярного пучка $\lambda A + B$ найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R, такие, что матрица $Q_L A Q_R$ – верхняя квазитреугольная(т. е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера 1×1 и 2×2; блоки размера 1×1 соответствуют вещественным собственным значениям, а блоки размера 2×2 – сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица $Q_L B Q_R$ – верхняя треугольная.*

Теорема 2. *Для сингулярного пучка матриц $\lambda A + B$ размера $n \times m$ имеется преобразование Кронекера (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно), при котором матрица $P_L B P_R + \lambda P_L A P_R$ имеет квазидиагоиальный вид*

$$\begin{pmatrix} \lambda A_0 + B_0 & & & & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_1} & & & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_2} & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & L_{\varepsilon_p} & & & & \\ & & & & & L_{\eta_1}^T & & & \\ & & & & & & L_{\eta_2}^T & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & L_{\eta_q}^T \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \ldots \leq \varepsilon_p, \;\; 0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_p),$$

где

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

каноническая сингулярная клетка Кроиекера размера $\varepsilon \times (\varepsilon + 1)$, L_η^T – матрица, транспонированная к L_η и $\lambda A_0 + B_0$ – регулярный пучок матриц.

Таким образом, заменяя фигурирующий в (1) регулярный пучок $\lambda A_0 + B_0$ его обобщенной вещественной формой Шура, получим каноническую форму Кронекера-Шура сингулярного пучка матриц $\lambda A + B$ в самом общем случае.

Замечание 1. Стоящий в (1) регулярный пучок $\lambda A_0 + B_0$ можно также заменить его канонической формой Вейерштрасса и тогда получим каноническую форму Кронекера-Вейерштрасса сингулярного пучка постоянных матриц.

3. О приведении к каноническому виду сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа. Как сказано во введениии, сингулярное стохастическое уравнение леонтьевского типа с импульсными воздействиями – это стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$d\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + \Lambda d\tilde{w}(t), \quad 0 \le t \le T\,, \tag{2}$$

где все объекты, входящие в это уравнение, описаны во введении. Кроме этого, здесь процесс скачков $\zeta(t) = \zeta(t,\omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t,\omega) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k)\,, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T\,,$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для положительных; $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n. Из вида (2) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (2) предполагается вида

$$\xi(0,\omega) = 0\,. \tag{3}$$

Скажем сразу, что выписанное ниже решение этому условию не удовлетворяет, и, более того, при $t = 0$ оно не определено. Оно представляет собой аппроксимацию решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Формулы для решений задачи (2), (3) будем искать среди случайных процессов $\xi(t,\omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) стохастическим уравнениям

$$\tilde{L}\xi_k(t) = \tilde{M}\int_{t_k}^{t} \xi_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t} f(\tau)d\tau + \Lambda\tilde{w}(t)\,, \quad t_k \le t \le t_{k+1}\,,$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, N$, в точках t_k P-п. п. удовлетворяют равенствам

$$\tilde{L}\xi(t_k+0,\omega) - \tilde{L}\xi(t_k-0,\omega) = S\tilde{\zeta}_k(\omega)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, N\,,$$

и в начальный момент времени $t_0 = 0$ P-п. п. удовлетворяют начальному условию (3).

Итак, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (2), (3) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через случайные процессы $\xi_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{L}\xi_k(t) - \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{M}\int_{t_k}^{t} \xi_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^{t} f(\tau)d\tau + \Lambda\tilde{w}(t)\,,$$

п. в. $t_k \le t \le t_{k+1}$, $\omega \in \Omega$, где

$$\xi_0(0) = 0, \quad \tilde{L}\xi_k(t_k) = \tilde{L}\xi_{k-1}(t_k,\omega) + S\tilde{\zeta}_k(\omega)\,, \quad k = 1, \ldots, N\,.$$

Как нетрудно видеть, уравнение (2) в общей форме неудобно для изучения, поэтому приведем его к некоторому каноническому виду, используя при этом метод, описанный в работах [3, 4] для уравнений леонтьевского типа без процесса скачков в правой части. Применим к пучку матриц $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ преобразование Кронекера-Шура, описанное в предыдущем параграфе. Тогла уравнение (2) преобразуется следующим образом

$$P_L\tilde{L}P_R\eta(t) = \int_0^t P_L\tilde{M}P_R\eta(\tau)d\tau + \int_0^t P_Lf(\tau)d\tau + P_LS\zeta(t) + C\tilde{w}(t)\,,$$

где $C = P_L\Lambda$, $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$.

Регулярную компоненту пучка $P_L\tilde{M}P_R + \lambda P_L\tilde{L}P_R = M + \lambda L$ обозначим через $\lambda A + B$. При соответствующей нумерации векторов базиса в $M + \lambda L$ вдоль главной диагонали стоят пучок $\lambda A + B$ и канонические сингулярные клетки Кронекера L_ε, L_ε^T в порядке, указанном в (1). Элементы $\lambda A + B$ располагаются таким образом: в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2, потом невырожденные блоки размера 1×1, а затем вырожденные блоки размера 1×1.

Обозначим через C^* оператор, сопряженный с C, а $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в R^n. Введем в R^n новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулой

$$\langle X, Y\rangle = ((CC^*)^{-1}X, Y)\,.$$

С применением методов, изложенных в работах [3, 4] несложно доказываются утверждения:

Теорема 3.

(i) *Для любых векторов X и Y из R^n выполняется тождество $\langle CX, CY\rangle = (X, Y)$.*

(ii) *Процесс $w(t) = C\tilde{w}(t)$ является винеровским в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 1. *Пусть e_1, e_2,..., e_n – естественный ортоиормироваииый базис в R^n с $(\cdot,\cdot)$. Векторы Ce_1, Ce_2,..., Ce_n образуют ортоиормироваииый базис в евклидовом пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Следствие 2. *В пространстве R^n с $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в разложении по ортонормированному базису Ce_1, Ce_2,..., Ce_n стохастическое уравнение леонтьевского типа имеет вид*

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(\tau)d\tau + \int_0^t P_Lf(\tau)d\tau + P_LS\zeta(t) + w(t)\,.$$

Напомним, что в выражения для текущей скорости винеровского процесса в данном случае входит $Grad(C^{-1}x, C^{-1}x)$, где $Grad$ – градиент относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 2. *$d\langle x, x\rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2(C^*)^{-1}C^{-1}x$, где d – внешний дифференциал.*

Лемма 3. $\mathrm{Grad}\,\langle x, x\rangle = \mathrm{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x$.

Следовательно, как и в [3, 4], при отображении в R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ формулы для текущих скоростей винеровского процесса сохраняют свой вид.

4. Решения сингулярных стохастических уравнений леонтьевского типа с импульсными воздействиями. Итак, если пучек $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ сингулярен, то после применения преобразования Кронекера-Шура стохастическое уравнение леонтьевского типа в пространстве R^n со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приобретает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(\tau)d\tau + \int_0^t P_L f(\tau)d\tau + P_L S\zeta(t) + w(t)\,, \tag{4}$$

$$\eta(0) = 0\,. \tag{5}$$

Тогда, учитывая сказаное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (4), (5) определяется последовательно для $k = 0, 1, \ldots, N$ через случайные процессы $\eta_k(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$L\eta_k(t) - L\eta_k(t_k) = \int_{t_k}^t M\eta_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t P_L f(\tau)d\tau + w(t)\,, \tag{6}$$

п. в. $t_k \le t \le t_{k+1}$, $\omega \in \Omega$, где

$$\eta_0(0) = 0,\;\; L\eta_k(t_k) = L\eta_{k-1}(t_k,\omega) + Q\tilde{\zeta}_k(\omega)\,, \quad k = 1, \ldots, N\,, \tag{7}$$

и $Q = P_L S$. Как было отмечено выше, для построения процесса, описывающего модель, заданную уравнениями (6), нужны производные свободных членов (включая винеровский процесс). Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций. Поэтому чтобы избежать использования обобщенных функций, мы для построения процесса, описывающего модель, заданную (6), будем использовать производные в среднем для случайных процессов.

Замечание 2. Переписав (6) в виде

$$L\eta_k(t) - L\eta_k(t_k) - M\int_{t_k}^t \eta_k(\tau)d\tau - \int_{t_k}^t P_L f(\tau)d\tau = w(t)\,,$$

видно, что «настоящее» для процесса, стоящего в левой части, совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому последнюю σ-алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т. е. применять к (6) производные D^w, D^w_* или D^w_S.

Учитывая структуру пучка матриц $\lambda L + M$ нетрудно видеть, что задачи (4), (5) и, следовательно, (6), (7) распадаются на несколько независимых систем уравнений пяти типов (три типа систем соответствуют регулярному пучку $\lambda A + B$, два типа систем соответствуют соответствуют сингулярным клеткам L_ε и L_ε^T). Обозначим через $\eta(t)$, $\varsigma(t)$ и $\theta(t)$ компоненты вектора $\eta(t)$, соответствующие пучку $\lambda A + B$ и клеткам L_ε, L_ε^T соответственно. Также через $g(t), u(t), v(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$. Соответствующие компоненты винеровского процесса будут тоже винеровскими процессами и будем обозначать их как и сам винеровский процесс через $w(t)$. Исследуем каждый тип уравнений.

В соответствии с канонической формой Кронекера-Шура, уравнение, соответствующее пучку $\lambda A + B$, как и в работе [8] распадается на стохастические уравнения следующих типов. Для блоков размера 2×2 получаем подсистему[1)] из пары уравнений

$$a_{ii}\eta_k^i(t) + a_{i,i+1}\eta_k^{i+1}(t) + a_{i,i+2}\eta_k^{i+2} + \ldots + a_{is}\eta_k^s =$$
$$= \int_{t_k}^t (b_{ii}\eta_k^i(\tau) + b_{i,i+1}\eta_k^{i+1}(\tau) + \ldots + b_{is}\eta_k^s(\tau))d\tau + \int_{t_k}^t g^i(\tau)d\tau + w^i(t)\,,$$
$$a_{i+1,i}\eta_k^i(t) + a_{i+1,i+1}\eta_k^{i+1}(t) + a_{i+1,i+2}\eta_k^{i+2} + \ldots + a_{i+1,s}\eta_k^s =$$
$$= \int_{t_k}^t (b_{i+1,i+1}\eta_k^{i+1}(\tau) + b_{i+1,i+2}\eta_k^{i+2}(\tau) + \ldots + b_{i+1,s}\eta_k^s(\tau))d\tau +$$
$$+ \int_{t_k}^t g^{i+1}(\tau)d\tau + w^{i+1}(t)\,.$$

В матричной форме в новых обозначениях эта подсистема уравнений принимает вид

$$\bar\eta_k(t) + \vartheta(t) = \int_{t_k}^t K\bar\eta_k(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t \upsilon(\tau)d\tau + \int_{t_k}^t \bar g(\tau)d\tau + J\bar w(t)\,,$$

где

$$\bar\eta = \begin{pmatrix} \eta^i \\ \eta^{i+1} \end{pmatrix}, \quad B_{ii} = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{i,i+1} \\ 0 & b_{i+1,i+1} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}^{-1},$$
$$\vartheta = J \begin{pmatrix} a_{i,i+2} & \cdots & a_{is} \\ a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,s} \end{pmatrix} \left(\eta_k^{i+2} \ldots \eta_k^s\right)^T, \quad \upsilon(t) = J \begin{pmatrix} b_{i,i+2} & \cdots & b_{is} \\ b_{i+1,i+2} & \cdots & b_{i+1,s} \end{pmatrix} \left(\eta_k^{i+2} \ldots \eta_k^s\right)^T,$$
$$\bar g = J \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \bar w = \begin{pmatrix} w^i \\ w^{i+1} \end{pmatrix}, \quad K = JB_{ii}\,.$$

Для этой подсистемы уравнений имеет место аналитическая формула для решений

$$\bar\eta_k(t) = \int_{t_k}^t e^{K(t-\tau)}Jd\bar w_\tau + \int_{t_k}^t e^{K(t-\tau)}\left(\upsilon(\tau) + \bar g(\tau) - K\vartheta(\tau)\right)d\tau - \vartheta(t)\,.$$

Складывая все $\bar\eta_k(t)$, получим выражение для $\bar\eta(t)$

$$\bar\eta(t) = \sum_{k=1}^N e^{K(t-t_k)}Q\tilde\zeta_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{K(t-\tau)}Jd\bar w_\tau +$$
$$+ \int_0^t e^{K(t-\tau)}\left(\upsilon(\tau) + \bar g(\tau) - K\vartheta(\tau)\right)d\tau - \vartheta(t)\,, \tag{8}$$

где из произведения $Q\tilde\zeta_k(\omega)$ берутся только элементы из $i, i+1$ строк.

[1] Отметим, опечатки в [8]: там на стр. 124 в подсистеме такого же вида в левой части последнего уравнения ошибочно отсутствует слагаемое $a_{i+1,i}\eta^i$, в связи с чем приведены ошибочные формулы для ее решений.

Для блоков размера 1×1 получаем уравнения

$$a_{jj}\eta_k^j(t) + a_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(t) + \ldots + a_{js}\eta_k^s(t) =$$
$$= \int_{t_k}^{t} (b_{jj}\eta_k^j(\tau) + b_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(\tau) + \ldots + b_{js}\eta_k^s(\tau))d\tau + \int_{t_k}^{t} g^j(\tau)d\tau + w^j(t)\,,$$

Для такого типа уравнений тоже есть аналитическая формула для решений

$$\eta_k^j(t) = \int_{t_k}^{t} e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}}\frac{dw_\tau^j}{a_{jj}} + \int_{t_k}^{t} e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}}\left[\frac{1}{a_{jj}}\,g^j(\tau) + \frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}}\,\eta_k^{j+1}(\tau) + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{b_{js}}{a_{jj}}\,\eta_k^s(\tau) - \frac{b_{jj}}{a_{jj}^2}\,(a_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(\tau) + \ldots + a_{js}\eta_k^s(\tau))\right]d\tau - \frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}}\,\eta_k^{j+1} - \ldots - \frac{a_{js}}{a_{jj}}\,\eta_k^s\,.$$

Суммируя все $\eta_k^j(t)$, получим формулу для вычисления $\eta^j(t)$

$$\eta^j(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{b_{jj}(t-t_k)/a_{jj}}Q\tilde{\zeta}_k(\omega)\chi(t-t_k) + \int_0^t e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}}\frac{dw_\tau^j}{a_{jj}} +$$
$$+ \int_0^t e^{b_{jj}(t-\tau)/a_{jj}}\left[\frac{1}{a_{jj}}\,g^j(\tau) + \frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}}\,\eta_k^{j+1}(\tau) + \ldots + \frac{b_{js}}{a_{jj}}\,\eta_k^s(\tau)\right.$$
$$\left. - \frac{b_{jj}}{a_{jj}^2}\,(a_{j,j+1}\eta_k^{j+1}(\tau) + \ldots + a_{js}\eta_k^s(\tau))\right]d\tau - \frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}}\,\eta_k^{j+1} - \ldots - \frac{a_{js}}{a_{jj}}\,\eta_k^s\,, \qquad (9)$$

где из произведения $Q\tilde{\zeta}_k(\omega)$ берется только элемент из j строки.

Компоненты процесса η_k, соответствующие нулевым диагональным блокам, соберем в одно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{p,p+1} & a_{p,p+2} & \ldots & a_{ps} \\ 0 & 0 & a_{p+1,p+2} & \ldots & a_{p+1,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^p(t) \\ \eta_k^{p+1}(t) \\ \vdots \\ \eta_k^s(t) \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & a_{p,p+1} & a_{p,p+2} & \ldots & a_{ps} \\ 0 & 0 & a_{p+1,p+2} & \ldots & a_{p+1,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^p(t_k) \\ \eta_k^{p+1}(t_k) \\ \vdots \\ \eta_k^s(t_k) \end{pmatrix} =$$
$$= \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} b_{pp} & b_{p,p+1} & \ldots & b_{ps} \\ 0 & b_{p+1,p+1} & \ldots & b_{p+1,s} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k^p(\tau) \\ \eta_k^{p+1}(\tau) \\ \vdots \\ \eta_k^s(\tau) \end{pmatrix} d\tau +$$
$$+ \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} g^p(\tau) \\ g^{p+1}(\tau) \\ \vdots \\ g^s(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \\ \vdots \\ w^s(t) \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

Из последнего уравнения системы (10) получаем, что

$$\int_{t_k}^{t} b_{ss}\eta_k^s(\tau)d\tau = -\int_{t_k}^{t} g^s(\tau)d\tau - w^s(t)\,.$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\eta_k^s(t)$ применением к обеим частям производной D_S^w. Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D_*^w (и, следовательно, D_S^w) к интегралу в левой части дает одинаковый результат $\eta_k^s(t)$. Таким образом, в соответствии с Леммой 1, мы получаем, что

$$\eta_k^s(t) = -\frac{1}{b_{ss}}\,g^s(t) - \frac{1}{b_{ss}}\,D_S w^s(t) = -\frac{1}{b_{ss}}\,g^s(t) - \frac{1}{b_{ss}}\cdot\frac{w^s(t)}{2t}\,. \tag{11}$$

Из предпоследнего уравнения системы (10) мы получаем, что

$$a_{s-1,s}\eta_k^s = \int_{t_k}^{t}(b_{s-1,s-1}\eta_k^{s-1}(\tau) + b_{s-1,s}\eta_k^s(\tau))d\tau + \int_{t_k}^{t} g^{s-1}(\tau)d\tau + w^{s-1}(t)\,,$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, выводим

$$\eta_k^{s-1}(t) = \frac{a_{s-1,s}}{b_{s-1,s-1}}D_S\eta_k^s - \frac{b_{s-1,s}}{b_{s-1,s-1}}\eta_k^s - \frac{1}{b_{s-1,s-1}}g^{s-1}(t) - \frac{1}{b_{s-1,s-1}}D_S w^{s-1}(t)\,.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $\eta_k^s(t)$ и использовав Лемму 1, получаем

$$\eta_k^{s-1}(t) = -\frac{a_{s-1,s}}{b_{ss}b_{s-1,s-1}}\frac{dg^s(t)}{dt} + \frac{a_{s-1,s}}{b_{ss}b_{s-1,s-1}}\frac{w^s(t)}{4t^2} +$$
$$+\frac{b_{s-1,s}}{b_{ss}b_{s-1,s-1}}g^s(t) + \frac{b_{s-1,s}}{b_{ss}b_{s-1,s-1}}\frac{w^s(t)}{2t} - \frac{1}{b_{s-1,s-1}}g^{s-1}(t) - \frac{1}{b_{s-1,s-1}}\frac{w^{s-1}(t)}{2t}\,.$$

В точности также, для $p \le l \le s-1$ получаем формулу для определения $\eta_k^l(t)$

$$D_S(a_{l,l+1}\eta_k^{l+1} + a_{l,l+2}\eta_k^{l+2} + \ldots + a_{ls}\eta_k^s) = b_{ll}\eta_k^l + b_{l,l+1}\eta_k^{l+1} + \ldots$$
$$+ b_{l,s}\eta_k^s + g^l(t) + D_S w^l(t)\,. \tag{12}$$

С помощью Леммы 1 и формулы (12) нетрудно получить явное выражение для любого $\eta_k^l(t)$. Стало быть, компоненты процесса $\eta^l(t)$, соответствующие нулевым диагональным блокам в A, находятся из следующих соотношений

$$\eta^s(t) = -\frac{1}{b_{ss}}\,g^s(t) - \frac{1}{b_{ss}}\cdot\frac{w^s(t)}{2t}\,, \tag{13}$$

$$D_S(a_{l,l+1}\eta^{l+1} + a_{l,l+2}\eta^{l+2} + \ldots + a_{ls}\eta^s) = b_{ll}\eta^l + b_{l,l+1}\eta^{l+1} + \ldots + b_{l,s}\eta^s + g^l(t) + D_S w^l(t)\,, \tag{14}$$

где в точках t_k эти компоненты должны удовлетворять ограничениям (7).

Клеткам L_l соответствует уравнение, которое в координатной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(t) \\ \varsigma_k^2(t) \\ \vdots \\ \varsigma_k^l(t) \\ \varsigma_k^{l+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(t_k) \\ \varsigma_k^2(t_k) \\ \vdots \\ \varsigma_k^l(t_k) \\ \varsigma_k^{l+1}(t_k) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_k^1(\tau) \\ \varsigma_k^2(\tau) \\ \vdots \\ \varsigma_k^l(\tau) \\ \varsigma_k^{l+1}(\tau) \end{pmatrix} d\tau +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} u^1(\tau) \\ u^2(\tau) \\ \vdots \\ u^{l-1}(\tau) \\ u^l(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^{l-1}(t) \\ w^l(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

т.е.

$$\begin{cases} \varsigma_k^2(t) - \varsigma_k^2(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} (\varsigma_k^1(\tau) + u^1(\tau))d\tau + w^1 \,, \\ \varsigma_k^3(t) - \varsigma_k^3(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} (\varsigma_k^2(\tau) + u^2(\tau))d\tau + w^2 \,, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \varsigma_k^{l+1}(t) - \varsigma_k^{l+1}(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} (\varsigma_k^l(\tau) + u^l(\tau))d\tau \,. \end{cases}$$

Это означает, что можно взять в качестве ς_k^{l+1} произвольный случайный процесс, для которого можно вычислить симметрическую производную порядка l, а потом рекурентно получить все остальные компоненты процесса ς_k. Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т. е. система недоопределена. Аналогично случаю первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\varsigma_k^l(t) = D_S^w \varsigma_k^{l+1} - D_S^w w^l - u^l(t) = D_S^w \varsigma_k^{l+1} - \frac{w^l(t)}{2t} - u^l(t) \,,$$

$$\varsigma_k^l(t) = \int_{t_k}^{t} (\varsigma_k^{l-1}(s) + u^{l-1}(s))ds + w^{l-1} \,,$$

$$\varsigma_k^{l-1}(t) = D_S^w \varsigma_k^l - D_S^w w^{l-1} - u^{l-1}(t) = D_S^2 \varsigma_k^{l+1} + \frac{w^l(t)}{4t^2} - \frac{w^{l-1}}{2t} - u^{l-1} \,.$$

Точно также, для $1 \le i \le l$ получаем

$$\varsigma_k^i(t) = D_S^w \varsigma_k^{i+1} - D_S^w w^i(t) - u^i(t)\,. \tag{16}$$

С помощью Леммы 1, по формулам (16), несложно получить явное выражение для любого $\varsigma_k^i(t)$. Таким образом, для вычисления $\varsigma(t)$ имеет место формула

$$\varsigma^i(t) = D_S^w \varsigma^{i+1} - D_S^w w^i(t) - u^i(t)\,, \tag{17}$$

причем, все вычисленные компоненты $\varsigma^i(t)$ должны удовлетворять ограничениям (7).

И, наконец, для клеток L_r^T имеем систему, которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^1(t) \\ \theta_k^2(t) \\ \vdots \\ \theta_k^{r-1}(t) \\ \theta_k^r(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^1(t_k) \\ \theta_k^2(t_k) \\ \vdots \\ \theta_k^{r-1}(t_k) \\ \theta_k^r(t_k) \end{pmatrix} =$$

$$\int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^1(\tau) \\ \theta_k^2(\tau) \\ \vdots \\ \theta_k^{r-1}(\tau) \\ \theta_k^r(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_k}^{t} \begin{pmatrix} v^1(\tau) \\ v^2(\tau) \\ \vdots \\ v^r(\tau) \\ v^{r+1}(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^r \\ w^{r+1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

или

$$\begin{cases} 0 = \displaystyle\int_{t_k}^{t} (\theta_k^1(\tau) + v^1(\tau))d\tau + w^1\,, \\ \theta_k^1(t) - \theta_k^1(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} (\theta_k^2(\tau) + v^2(\tau))d\tau + w^2\,, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \theta_k^{r-1}(t) - \theta_k^{r-1}(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} (\theta_k^r(\tau) + v^r(\tau))d\tau + w^r\,, \\ \theta_k^r(t) - \theta_k^r(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} v^{r+1}(\tau)d\tau + w^{r+1}\,. \end{cases}$$

Начиная с первого уравнения, последовательно получаем

$$\theta_k^1(t) = -v^1(t) - D_S^w w^1 = -v^1 - \frac{w^1(t)}{2t}\,, \tag{19}$$

$$\theta_k^2(t) = -v^2(t) + D_S^w \theta_k^1 - D_S^w w^2(t) = -v^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} + \frac{w^1(t)}{4t^2} - \frac{w^2(t)}{2t}\,,$$

$$\theta_k^r(t) = -v^r(t) - \frac{dv^{r-1}(t)}{dt} - \dots - \frac{d^{r-1}v^1(t)}{dt^{r-1}} - D_S w^r(t) - D_S^2 w^{r-1}(t) - \dots - D_S^r w^1(t)\,,$$

а также условие согласования

$$\int_{t_k}^{t} v^{r+1}(s)ds + w^{r+1}(t) = -v^r(t) - \frac{dv^{r-1}(t)}{dt} - \ldots - \frac{d^{r-1}v^1(t)}{dt^{r-1}} - \\ - D_S w^r(t) - D_S^2 w^{r-1}(t) - \ldots - D_S^r w^1(t)\,. \quad (20)$$

Если компоненты w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т. е. данная подсистема переопределена. Как и ранее, для $2 \le i \le r$ имеет место рекурентная формула

$$\theta_k^i(t) = -v^i(t) + D_S^w \theta_k^{i-1} - D_S^w w^i(t)\,. \quad (21)$$

Следовательно, имеют место соотношения для определения компонент $\theta^i(t)$

$$\theta^1 = -v^1 - \frac{w^1}{2t}\,, \quad (22)$$

$$\theta^i(t) = -v^i(t) + D_S^w \theta^{i-1} - D_S^w w^i(t)\,, \quad (23)$$

причем, прежде чем воспользоваться этой формулой, сначала проверяем условия согласования (20). Кроме всего, вычисленные компоненты $\theta^i(t)$ должны удовлетворять ограничениям (7).

Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях (при $k = 0$) для решений систем (10), (15) и (18). Из определения симметрических производных в среднем видно, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы, как приращения по времени вправо, так и влево. Принимая во внимание Лемму 1, а также формулы (11) и (12), (16), (19) и (21), нетрудно видеть, что полученные выше решения $\eta^i(t)$, $\varsigma^i(t)$, и $\theta^i(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \ge 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют.

Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, & \text{если } 0 \le t \le t_0\,; \\ t, & \text{если } t_0 \le t\,. \end{cases}$$

Элементы $w^j(t)/t^k$ при вычислении $\eta^i(t)$, $\varsigma^i(t)$ и $\theta^i(t)$ по формулам (13) и (14), (17), (22) и (23) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями (10), (15) и (18) только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п. н. совпадают.

Таким образом, суммируя выше сказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *При условиях, указанных выше, уравнение (2) с нулевыми начальными условиями трансформируется к каноническому уравнению (4) с нулевыми начальными* *условиями, формулы для вычисления решений которого имеют вид* (8), (9), (13) *и* (14), (17), (22) *и* (23).

Литература

1. Vlasenko L.A., Lyshko S.L., Rutkas A.G. On a stochastic impulsive system // ISSN 1025-6415 Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2012. – №2. – P.50-55.
2. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / М.: Комкнига, 2005. – 416 с.
3. Гликлих Ю.Е., Машков Е.Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2013. – 6,№2. – С.25-39.
4. Машков Е. Ю. Сингулярные стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов // Научные Ведомости Белгородского государственного университета. Математика и Физика. - 2014. – №5(176), Вып.34. – С.49-60.
5. Партасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / М.: Мир, 1988. - 343 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Физматлит, 1967. – 575 с.
7. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / М.: Мир, 2001. – 435 с.
8. Машков Е.Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа / Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика и Математика. – 2014. – №3. – С.121-128.

ON A CERTAIN APPROACH TO INVESTIGATION OF SINGULAR STOCHASTIC LEONTIEFF's TYPE EQUATIONS WITH IMPULSIVE INFLUENCE

Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov

Voronezh State University,
Univesitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: yeg@math.vsu.ru
Kursk State University,
Radishcheva St., 33, Kursk, 305000, Russia, e-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Abstract. Stochastic Leontieff type equation with singular pencil of constant matrices and with impulsive influence in the right-hand side is investigated. For the study of solutions of such equations it is necessary to use high order derivatives of free terms in the right-hand side including the Wiener process. For differentiation of the Wiener process, the machinery of Nelson's mean derivatives of stochastic processes is applied. It allows us to avoid using the generalized functions theory. As a result, we obtain analytical formulae for solutions in terms of mean derivatives of stochastic processes.

Key words: mean deivative, current velocity, Wiener process, differential-algebraic equation, Leontieff's type equation.