MSC 37J05

ОБРАТИМЫЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Производится анализ понятия обратимости в широком смысле конечномерных автономных динамических систем. Доказывается теорема эквивалентности локальной и глобальной обратимости в широком смысле таких динамических систем. Вводится понятие сигнатуры обратимой в широком смысле динамической системы.

Ключевые слова: диффеоморфизм, обратимые динамические системы, локальная обратимость, касательная динамическая система, сигнатура.

1. Введение. Будем рассматривать конечномерные автономные динамические системы размерности n. Не ограничивая общности, будем считать, что фазовым пространством каждой из таких систем, является $\mathbb{R}^n$. Обозначим $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ точки этого пространства и $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – некоторый диффеоморфизм. Динамической системой, соответствующей диффеоморфизму F, называется система дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \mathsf{F}(X)\,. \tag{1}$$

В настоящем сообщении мы докажем утверждения общего характера, касающиеся класса обратимых систем вида (1). Исходя из аналогии со свойствами обратимости гамильтоновых динамических систем, нами в предыдущем сообщении [1] были введены понятия *локальной* и *глобальной обратимостей*.

Определение 1. *Систему (1) назовем локально-обратимой в широком смысле, если существует диффеоморфизм V такой, который переводит (1) в систему*

$$\dot{Y} = -\mathsf{F}(Y)\,, \qquad Y = \mathsf{V}(X) \tag{2}$$

и при этом $\mathsf{V}^2 = \mathbf{1}$, то есть $\mathsf{V}(\mathsf{V}(X)) = X$ для любой точки $X \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2. *Система (1) называется глобально-обратимой в широком смысле, если существует диффеоморфизм U такой, что $\mathsf{U}^2 = \mathbf{1}$ и для каждого решения $X = \mathsf{X}(t; X_0)$ системы (1) с начальными данными X_0 имеет место*

$$\mathsf{U}(X_0) = \mathsf{X}(t, \mathsf{U}(X(t)))\,. \tag{3}$$

В настоящем сообщении мы докажем, что эти понятия совпадают и дадим общую классификацию специального класса аналитических обратимых в широком смысле систем на основе понятия сигнатуры.

2. Теорема эквивалентности. Докажем утверждение об эквивалентности понятий локальной и глобальной обратимости.

Введем матрицу $\mathsf{W}(X)$ в $\mathbb{R}^n$ с компонентами

$$W_{ij} = \frac{\partial V_i(X)}{\partial X_j}\,, \quad \mathsf{V}(X) = \langle V_1(X), ..., V_n(X)\rangle\,,$$

которая, вообще говоря, зависит от точки $\mathbb{R}^n$ фазового пространства. Так как для каждой точки $X \in \mathbb{R}^n$, согласно определению, выполняется $\mathsf{V}(\mathsf{V}(X)) = X$, то имеет место матричное равенство $\mathsf{W}(\mathsf{V}(X))\mathsf{W}(X) = \mathbf{1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} W_{ik}(\mathsf{V}(X))W_{kj}(X) = \delta_{ij}\,, \qquad i,j = 1 \div n\,. \tag{4}$$

Отсюда следует, что матрица $\mathsf{W}(X)$ в любой точке $X \in \mathbb{R}^n$ не вырождена, $\det \mathsf{W}(X) \neq 0$. Умножая (4) на $\mathsf{W}(\mathsf{V}(X))$ справа, получим, что имеет место также равенство $\mathsf{W}(X)\mathsf{W}(\mathsf{V}(X)) = \mathbf{1}$.

Пусть для системы (1) существует диффеоморфизм V, указанный в Определении 1. Тогда, используя матрицу $\mathsf{W}(X)$ систему (2) представим в виде, не содержащем производной по времени,

$$\mathsf{W}(X)\mathsf{F}(X) = -\mathsf{F}(\mathsf{V}(X))\,, \tag{5}$$

который является необходимым и достаточным условием локальной обратимости системы (1).

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) была глобально обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была обратимой локально.*

□ Необходимость. Нужно, на основании выполнимости уравнения (3), доказать, что имеет место (5) для подходящим образом выбранного отображения $\mathsf{V}(\cdot)$

Пусть равенство (3) выполняется для любого решения системы (1) с начальным значением X_0. Возьмем решение $X(t)$ с начальной произвольно выбранной точкой. Тогда при $\Delta \to 0$ имеем

$$X(\Delta) = \mathsf{X}(\Delta; X_0) = X_0 + \mathsf{F}(X_0)\Delta + o(\Delta)\,. \tag{6}$$

С другой стороны, из (3) следует, что

$$\mathsf{U}(X_0) = \mathsf{X}(\Delta; \mathsf{U}(X(\Delta)))\,,$$

то есть

$$\mathsf{U}(X_0) = \mathsf{U}(X(\Delta)) + \mathsf{F}(\mathsf{U}(X(\Delta)))\Delta + o(\Delta)\,. \tag{7}$$

Учитывая, что U – диффеоморфизм, находим, что имеет место

$$\mathsf{U}(X(\Delta)) = \mathsf{U}(X_0) + (\nabla\mathsf{U})(X_0)\mathsf{F}(X_0)\Delta + o(\Delta)\,.$$

Подставляя это разложение в (7), имеем

$$\mathsf{U}(X_0) = \mathsf{U}(X_0) + [(\nabla\mathsf{U})_{X_0}\mathsf{F}(X_0) + \mathsf{F}(\mathsf{U}(X(\Delta)))]\,\Delta + o(\Delta)\,.$$

Ввиду произвольности Δ, выполняется

$$(\nabla \mathsf{U})_{X_0}\mathsf{F}(X_0) = -\mathsf{F}(\mathsf{U}(X_0))\,.$$

Так как, согласно Определению 2, $\mathsf{U}^2 = \mathbf{1}$ и, в силу произвольности точки X_0, можно положить, что диффеоморфизм V в Определении 1 совпадает с U и $\mathsf{W}(X) = \partial\mathsf{U}(X)/\partial X$, что означает локальную обратимость системы.

Достаточность. Пусть для системы (1) существует отображение V такое, что $\mathsf{V}^2 = \mathbf{1}$, и выполняется соотношение (5). Построим оператор $\mathsf{S}(\Delta;\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\mathsf{S}(\Delta; X) = X + \mathsf{F}(X)\Delta\,.$$

Пусть $Y = \mathsf{S}(\Delta; X)$. Тогда

$$X = Y - \mathsf{F}(X)\Delta = Y - \mathsf{F}(Y - \Delta\mathsf{F}(X))\Delta = Y - \mathsf{F}(Y)\Delta + o(\Delta)\,,$$

и поэтому

$$X = Y + \mathsf{W}^{-1}(Y)\mathsf{F}(\mathsf{V}(Y))\Delta + o(\Delta)\,.$$

Отсюда следует

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{V}\Big(Y + \mathsf{W}^{-1}(Y)\mathsf{F}(\mathsf{V}(Y))\Delta + o(\Delta)\Big) = \mathsf{V}(Y) + (\nabla\mathsf{V})_Y\mathsf{W}^{-1}(Y)\mathsf{F}(\mathsf{V}(Y))\Delta + o(\Delta)$$

и так как $(\nabla\mathsf{V})_Y = \mathsf{W}(Y)$, то

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{V}(Y) + \mathsf{F}(\mathsf{V}(Y))\Delta + o(\Delta)\,.$$

Это означает, что

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{S}(\Delta; \mathsf{V}(Y)) + o(\Delta)\,.$$

Определим $X((n+1)\Delta) = \mathsf{S}(\Delta; X(n\Delta))$, и, вместе с тем,

$$\mathsf{V}(X(n\Delta)) = \mathsf{S}(\Delta; \mathsf{V}(X((n+1)\Delta))) + o(\Delta)\,.$$

Следовательно, проводя последовательно n итераций на основе этих рекуррентных связей,

$$X(n\Delta) = \mathsf{S}(n\Delta; X_0) + n\cdot o(\Delta)\,,$$

$$\mathsf{V}(X((N-n)\Delta)) = \mathsf{S}(n\Delta; \mathsf{V}(N\Delta)) + n\cdot o(\Delta)\,.$$

Тогда, положив $N = t/\Delta$, получим

$$X(N\Delta) = \mathsf{S}(N\Delta; X_0) + N\cdot o(\Delta)\,,$$

$$\mathsf{V}(X_0) = \mathsf{S}(N\Delta; \mathsf{V}(N\Delta)) + N\cdot o(\Delta)\,.$$

Так как $N\cdot o(\Delta) = o(1)$, в результате, находим

$$X(t) = \lim_{\Delta\to 0} X(N\Delta) = \mathsf{X}(t; X_0)\,.$$

$$\mathsf{V}(X_0) = \lim_{\Delta\to 0} \mathsf{S}(N\Delta; \mathsf{V}(N\Delta)) = \mathsf{X}(t; \mathsf{V}(X(t)))\,.$$

Таким образом, соотношение (7) имеет место при $\mathsf{V} = \mathsf{U}$. ■

Покажем, что свойство обратимости системы не зависит от выбора координатной системы, на основе которой описывается динамика.

Теорема 2. *Всякая динамическая система, получаемая из обратимой в широком смысле динамической системы посредством замены ее координат, которая осуществляется диффеоморфизмом, является обратимой.*

□ Пусть имеется система (1), для которой существует такой диффеоморфизм V, $\mathsf{V}^2 = \mathbf{1}$, что имеет место (5). Пусть, далее, G – произвольный диффеоморфизм. Произведем на его основе замену координат $X = \mathsf{G}(X')$. В этом случае система (1) перейдет в следующую

$$\dot{X}' = \mathsf{F}'(X')\,,$$

где $\mathsf{F}'(X') = \mathsf{H}^{-1}(X')(\mathsf{F}(\mathsf{G}^{-1}))(X')$, $\mathsf{H}(X') = \partial\mathsf{G}(X')/\partial X'$ – матрица. Определим диффеоморфизм $\mathsf{V}' = \mathsf{G}^{-1}\mathsf{V}\mathsf{G}$. Он обладает свойством

$$\mathsf{V}'^2 = (\mathsf{G}^{-1}\mathsf{V}\mathsf{G})(\mathsf{G}^{-1}\mathsf{V}\mathsf{G}) = \mathsf{G}^{-1}\mathsf{V}(\mathsf{G}\mathsf{G}^{-1})\mathsf{V}\mathsf{G} = \mathsf{G}^{-1}(\mathsf{V}\mathsf{V})\mathsf{G} = \mathsf{G}^{-1}\mathsf{G} = \mathbf{1}.$$

Рассмотрим выражение

$$(\mathsf{F}'\mathsf{V}')(X') = \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}(X'))(\mathsf{F}\mathsf{G}\mathsf{V}')(X') = \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}(X'))(\mathsf{F}\mathsf{V})(X) = -\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}(X'))\mathsf{W}(X)\mathsf{F}(X)\,, \tag{8}$$

где мы воспользовались свойством (5) обратимости системы (1) и тем, что $(\mathsf{G}\mathsf{V}')(X') = (\mathsf{G}(\mathsf{G}^{-1}\mathsf{V}\mathsf{G}))(X') = \mathsf{V}(X)$.

Согласно определению диффеоморфизма F', имеем $\mathsf{F}(X) = (\mathsf{F}\mathsf{G})(X') = \mathsf{H}(X')\mathsf{F}'(X')$. Подставляя последнее выражение в (8) вместо $\mathsf{F}(X)$, находим

$$(\mathsf{F}'\mathsf{V}')(X') = -\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}(X'))\mathsf{W}(X)\mathsf{H}(X')\mathsf{F}'(X') = -\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}(X'))\mathsf{W}(\mathsf{G}(X'))\mathsf{H}(X')\mathsf{F}'(X')\,. \tag{9}$$

Так как $(\mathsf{G}^{-1}\mathsf{G})(X') = X'$, то

$$\left(\frac{\partial\mathsf{G}^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X'\Rightarrow\mathsf{G}(X')}\mathsf{H}(X') = \mathbf{1}\,.$$

Поэтому для обратной матрицы

$$\mathsf{H}^{-1}(X') = \left(\frac{\partial\mathsf{G}^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X'\Rightarrow\mathsf{G}(X')}$$

имеет место

$$\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{G}^{-1}(X')) = \frac{\partial\mathsf{G}^{-1}(X')}{\partial X'}\,,$$

и поэтому

$$\left(\frac{\partial\mathsf{G}^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X'\Rightarrow(\mathsf{V}\mathsf{G})(X')} = \mathsf{H}^{-1}((\mathsf{G}^{-1}\mathsf{V}\mathsf{G})(X')) = \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X'))\,.$$

Следовательно,

$$\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X'))\mathsf{W}(\mathsf{G}(X'))\mathsf{H}(X') = \left(\frac{\partial \mathsf{G}^{-1}(X')}{\partial X'}\right)_{X'\Rightarrow(\mathsf{VG})(X')}\mathsf{W}(\mathsf{G}(X'))\mathsf{H}(X') =$$

$$= \frac{\partial}{\partial X'}(\mathsf{G}^{-1}\mathsf{VG})(X') = \frac{\partial \mathsf{V}(X')}{\partial X'} \equiv \mathsf{W}'(X')\,.$$

Подставляя это выражение в правую часть (9), приходим к соотношению $\mathsf{W}'(X')\mathsf{F}'(X') = -\mathsf{F}'(\mathsf{V}'(X'))$. ■

3. Сигнатура обратимой динамической системы. Теорема 1 позволяет при поиске наличия свойства обратимости динамической системы ограничиваться исследованием выполнимости локального соотношения (5). С этой целью нужно сначала исследовать возможность построения отображений V, удовлетворяющих условию $\mathsf{V}^2 = \mathbf{1}$, которое накладывает определенные ограничения на тип отображений V. Далее, мы ограничимся исследованием соотношения (5) в том случае, когда отображение F аналитически зависит от точки X. Это условие автоматически накладывает дополнительное ограничение на выбор отображений V в требовании их аналитичности. В этих условиях можно дать общую классификацию обратимых в широком смысле динамических систем, которой мы посвятим этот раздел. Сначала, проиллюстрируем сказанное на примере одномерных систем.

Пример. В одномерном случае отображение $\mathsf{V}(\cdot)$ превращается в функцию $v(\cdot)$, а условие $\mathsf{V}^2 = \mathbf{1}$ превращается функциональное урне авнение $v(v(x)) = x$. Этому условию удовлетворяет любая мотононная функция, совпадающая с обратной к ней функцией. Последнее означает, что графики таких функций должны быть симметричными относительно прямой $y = x$ на плоскости $\langle x, y\rangle$. Среди возрастающих функций имеется только одна функция $v(x) = x$, которая не имеет отношения к построению одномерных систем, обратимых в широком смысле. Монотонно убывающие функции, графики которых обладают указанной симметрией могут быть, все-таки, довольно разнообразны, однако, если наложить условие аналитичности, то класс допустимых функций $v(x)$ резко сужается. В самом деле, так как график симметричной относительно прямой $y = x$ аналитической функции $v(x)$ должен пересекать эту прямую, то эта функция обладает неподвижной точкой x_*, $v(x_*) = x_*$. Рассмотрим разложение в степенной ряд около этой точки.

Из $v(v(x)) = x$ вытекает функционально-дифференциальное уравнение.

$$v'\Big(v(x)\Big)v'(x) = 1\,. \tag{8}$$

В точке x_* получаем $\big(v'(x_*)\big)^2 = 1$, $v'(x_*) = \pm 1$. Далее, по индукции устанавливается, что все производные $v^{(n)}(x_*) = 0$ при $n \geq 2$. В самом деле, если все эти производные вплоть до m-й равны нулю, то так как m-я производная тождества (8) имеет вид

$$v^{(m+1)}\big(v(x)\big)\big(v'(x)\big)^{m+1} + v^{(m+1)}(x)v'\big(v(x)\big) + R_m(v^{(2)}, v^{(3)}, ..., v^{(m)}) = 0\,,$$

где R_n – полином от указанных производных, вычисленных в точках x b и. Оп обращается в нуль при равенстве нулю всех аргументов. Тогда, полагая $x = x_*$, $v(x_*) = x_*$, получим, что, согласно предположению индукции $v^{(n)}(x_*) = 0$, $n = 2, 3, ..., m$, $R_m(v^{(2)}, v^{(3)}, ..., v^{(m)}) = 0$. Следовательно, $v^{(m+1)}(x_*) = 0$.

В результате, класс аналитических функций $v(x)$, удовлетворяющих (8), состоит из линейных функций $v(x) = a - x$.

В общем случае, когда фазовым пространством динамической системы является $\mathbb{R}^n$ с $n > 1$, отображение V, с качественной точки зрения, может быть устроено очень сложно. Мы в этом сообщении рассмотрим общие свойства обратимых динамических систем, у которых отображение V качественно устроено аналогично тому, что наблюдается при $n = 1$. С этой целью дадим следующее

Определение. *Обратимую динамическую систему назовем простой, если соответствующее ей отображение* V *обладает единственной неподвижной точкой.*

Далее, мы будем рассматривать только простые обратимые динамические системы и дадим их предварительную классификацию на основе свойств матрицы $\mathsf{W}(X)$. Пусть, не ограничивая общности, неподвижной точкой отображения V простой обратимой динамической системы является 0. Обозначим $\mathsf{W} \equiv \mathsf{W}(0)$. Положим $X = 0$ в (5). Тогда имеем $\mathsf{W}^2 = \mathbf{1}$.

Лемма. *Если матрица* W *обладает свойством* $\mathsf{W}^2 = \mathbf{1}$, *то она имеет скалярный тип (имеет полную систему собственных векторов) и все ее собственные числа равны* ± 1.

□ Пусть λ – собственное число матрицы W с собственным вектором Y, то есть $\mathsf{W}Y = \lambda Y$. Тогда, применяя W дважды к вектору Y, получим, па основании тождества $\mathsf{W}^2 = \mathbf{1}$, что $\lambda^2 = 1$. Таким образом, $\lambda = \pm 1$.

Пусть матрица W, посредством некоторого линейного преобразования SWS^{-1}, $\det \mathsf{S} \neq 0$, приведена к каноническому жорданову представлению, которое состоит из клеток Жордана $\mathsf{T}(\lambda_i)$, $i = 1, ..., s$ так, что $\mathsf{SWS}^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathsf{T}(\lambda_i)$. Тогда матрица W^2 состоит из клеток $\mathsf{T}^2(\lambda_i)$, то есть $\mathsf{SW}^2\mathsf{S}^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathsf{T}^2(\lambda_i)$. Но если клетка Жордана $\mathsf{T}(\lambda)$ имеет порядок, больший 1, то $\mathsf{T}^2(\lambda)$ не совпадает с единичной матрицей той же размерности, что противоречит тождеству $\mathsf{SW}^2\mathsf{S}^{-1} = \mathbf{1}$. ■

Следствием доказанной леммы является то, что матрица $\mathsf{W} = \mathsf{W}(0)$ обладает полным набором собственных чисел, равных ± 1. Причем, по крайней мере одно из них должно быть равно -1. Это следует из Определения 1. В самом деле, из уравнения (5), положив в нем $X = 0$, находим $\mathsf{WF}(0) = -\mathsf{F}(0)$, то есть W имеет собственный вектор $\mathsf{F}(0)$ с собственным значением -1.

Если ограничиться рассмотрением только таких обратимых динамических систем, у которых F – аналитическое отображение, то для каждой из таких систем отображение V, реализующее (5), также должно быть аналитическим. В этом случае, матрицфункция $\mathsf{W}(X)$ является аналитической. Для нее сигнатура не может изменяться при изменении точки X, так как для перемены знака у какого-либо из собственных чисел оно, в процессе изменения X, должно: либо обратиться в нуль, что невозможно, так как в каждой точке X выполняется $\det \mathsf{W}(X) \neq 0$, либо одновременно пара совпадающих собственных значения превратиться во взаимно сопряженную пару, что будет означать существование точки ветвления у матриц-функции $\mathsf{W}(X)$.

Ввиду неизменности чисел $n_\pm$ собственных значений ± 1 у матрицы $\mathsf{W}(X)$, связанной с аналитическим отображением V, они являются характеристикой обратимой в широком смысле динамической системы. В связи с этим, введем понятие *сигнатуры* и *характеристического класса* простой обратимой динамической системы. Сигнатурой мы будем называть упорядоченную пару $\langle n_-, n_+ \rangle$ натуральных чисел, равных, соответственно, числу собственных значений -1 и $+1$ матрицы W. Соответственно, простые обратимые динамические системы мы будем относить к одному и тому же характеристическому классу, если они обладают одной и той же сигнатурой.

Изучение каждого характеристического класса заключается в разбиении его на семейства динамических систем, которые обладают качественно одинаковым дифференциально-топологическим поведением. Основой для разработки такой классификации обратимых динамических систем, является следующее утверждение.

Теорема 3. *Аналитический диффеоморфизм обратимой динамической системы не изменяет ее сигнатуры.*

$\square$ Пусть аналитический диффеоморфизм G переводит обратимую в широком смысле систему (1), удовлетворяющую (5) с аналитическим отображением V, $\mathsf{V}^2 = \mathbf{1}$, $\mathsf{V}(0) = 0$, посредством замены координат $X = \mathsf{G}(X')$, в обратимую в широком смысле систему $\dot{X}' = \mathsf{F}'(X')$, которая удовлетворяет $\mathsf{W}'(X)\mathsf{F}'(X') = -\mathsf{F}'(\mathsf{V}'(X'))$, $\mathsf{V}'^2 = \mathbf{1}$. Здесь $\mathsf{W}'(X') = \partial \mathsf{V}'(X')/\partial X'$ и имеет место связь $\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X'))\mathsf{W}(X')\mathsf{H}(X') = \mathsf{W}'(X')$.

Положим $\mathsf{G}^{-1}(0) = X_0$. Эта точка является неподвижной для отображения V', $\mathsf{V}'(X_0) = X_0$ и для матрицы $\mathsf{W}(X_0)$ выполняется

$$\mathsf{W}'^2(X_0) = \big(\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X_0))\mathsf{W}(\mathsf{G}(X_0))\mathsf{H}(X_0)\big)\big(\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X_0))\mathsf{W}(\mathsf{G}(X_0))\mathsf{H}(X_0)\big) =$$

$$= \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X_0))\mathsf{W}(0)\mathsf{W}(0)\mathsf{H}(X_0) = \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X_0))\mathsf{H}(X_0) = \mathbf{1}\,.$$

Положим Y – собственный вектор матрицы $\mathsf{W}(0)$ с собственным значением λ. Тогда $\mathsf{H}^{-1}(X_0)Y$ – собственный вектор с тем же собственным значением для матрицы $\mathsf{W}'(X_0)$, так как

$$\mathsf{W}'(X_0)\mathsf{H}(X_0)Y = \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{V}'(X_0))\mathsf{W}(\mathsf{G}(X_0))Y = \mathsf{H}^{-1}(0)\mathsf{W}(0)Y = \lambda \mathsf{H}^{-1}(0)Y\,.$$

Следовательно, числа $n_\pm$ в преобразованной динамической системе совпадают со значениями в исходной. $\blacksquare$

В приведенном доказательстве требование аналитичности в формулировке теоремы нужно только по той причине, что само понятие сигнатуры дано нами только для случая аналитических диффеоморфизмов F.

Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2015. – 5(202);38. – С.138-147.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
3. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.337-341.

REVERSIBLE SYSTEMS IN WIDE SENSE

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch48@bsu.edu.ru

Abstract. The concept analysis of the reversibility in wide sense of finite dimensional autonomous dynamical systems is developed. It is proved the theorem about the equivalence of local reversibility in wide sense and the global one for such systems. It is introduced the concept of signature of dynamic system being reversible in wide sense.

Key words: diffeomorphism, reversible dynamic systems, local reversibility, tangential dynamic system, signature.