MSC 35M10

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.Б. Сабитов

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан,
ул. Одесская, 68, г. Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Аннотация. Для одного класса уравнений смешанного типа в прямоугольной области изучена начально-граничная задача с краевыми условиями третьего рода. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость ряда. При условии, когда отношение сторон прямоугольника, являющегося областью гиперболичности, является рациональным числом, показана сходимость ряда в классе регулярных решений. После чего приведены постановки обратных задач для данного уравнения смешанного типа с неизвестными коэффициентами при неизвестной функции и граничных условиях. Опираясь на теорию обратных задач Штурма-Лиувилля доказаны теоремы единственности поставленных обратных задач и для некоторых из них приведены необходимые и достаточные условия их разрешимости.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, прямая и обратные задачи, единственность, существование.

§1. Прямая начально-граничная задача

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + q(x)u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < \pi, -\alpha < t < \beta\}$, где α и β – заданные положительные числа. Потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ – определенная на $[0,\pi]$ достаточно гладкая функция, причем $q(x) \geq 0$.

В начале рассмотрим случай, когда потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ известен, т.е. изучим следующую прямую начально-граничную задачу.

Начально-граничная задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2_x(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) + Hu(\pi,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{5}$$

где h и H – заданные положительные постоянные, $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования с граничными условиями (4):

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) = 0. \tag{6}$$

Отметим, что предложенная начально-граничная задача (2)-(5) впервые изучена в нашей работе [1] при $q(x) = b^2 =$const, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $-\alpha \le t \le \beta$, где установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

На необходимость изучения задач с условиями сопряжения для волнового уравнения в одной части области и уравнения диффузии в остальной части области было указано Гельфандом И.М. [2]. Стручина Г.М. [3], Уфлянд Я.С. [4], Золина Л.А. [5] показали важные приложения этих задач в различных областях. Затем краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами [6, 7] (см. приведенную там библиографию). В последние годы значительные результаты получены в работах Капустина Н.Ю. [8]. В этих работах краевые задачи изучались в смешанной области, у которой гиперболическая часть представляет характеристический треугольник. Теоремы единственности доказывались на основании принципа максимума или метода интегральных тождеств, а существование – методом интегральных уравнений или априорных оценок.

В этом параграфе единственность решения задачи (2)-(5) доказана на основании свойства полноты соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Ранее такой подход применялся в работах Смолицкого Х.Л. [9], Ильина В.А. [10, 11] при доказательстве единственности решения начально-граничных (смешанных) задач для уравнений гиперболического и параболического типов. Существование решения задачи (2)-(5) построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При обосновании сходимости возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость ряда. При условии, когда число α/π является рациональным, получена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя. Эта оценка при определенных условиях на функции $q(x)$ и $\varphi(x)$ позволяет доказать сходимость построенного ряда в пространстве функций (2).

1.2. Единственность решения задачи. В уравнении (1), разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \; 0 < x < \pi, \tag{7}$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \; X'(\pi) + HX(\pi) = 0. \tag{8}$$

Как известно [12, §2], что при $q(x) \in C^1[0,\pi]$ задача (7) и (8) имеет счетное множество положительных собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, все они являются простыми, а соответствующая система собственных функций $\{X_n(x)\} = \{X(x,\lambda_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,\pi]$, и поэтому в нем образует ортогональный базис. При этом справедливы следующие асимптотические формулы при больших n:

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{9}$$

$$X_n(x) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{10}$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi X_n^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx\,, \quad \xi_n(x) = \sin nx\left(-\frac{\omega x}{\pi} + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau\right),$$

числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ называются спектральными данными задачи (7) и (8).

Справедлива также теорема В.А. Стеклова о разложении |13, с. 173 |: если функция $f(x) \in C^1[0,\pi]$ и удовлетворяет граничным условиям (6), то справедливо разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n X_n(x), \quad f_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi f(x)X_n(x)\,dx,$$

причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, и справедливо равенство замкнутости системы $X_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f_n^2 = \int_0^\pi f^2(x)\,dx.$$

Пусть существует решение $u(x,t)$ задачи (2)–(5). Рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int_0^\pi X_n(x)u(x,t)\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Дифференцирую равенство (11) по t при $t > 0$ один раз, при $t < 0$ два раза, затем учитывая уравнение (1) и интегрирую но частям два раза интеграла, содержащего производную u_{xx}, с учетом граничных условий (4) и (8), получим

$$u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, \quad t > 0, \tag{12}$$

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, \quad t < 0. \tag{13}$$

Дифференциальные уравнения (12) и (13) имеют соответственно общие решения

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\lambda_n t}, & t > 0, \\ a_n \cos\rho_n t + b_n \sin\rho_n t, & t < 0, \end{cases} \tag{14}$$

где a_n, b_n и c_n – произвольные постоянные.В силу (2) для функций (14) справедливы условия сопряжения

$$u_n(0+0) = u_n(0-0), \quad u_n'(0+0) = u_n'(0-0). \tag{15}$$

Удовлетворяя функции (14) условиям (15), получим $a_n = c_n$, $b_n = -c_n\rho_n$. Тогда функции (14) примут вид

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n e^{-\rho_n^2 t}, & t > 0, \\ c_n(\cos\rho_n t - \rho_n \sin\rho_n t), & t < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Теперь для нахождения постоянных c_n воспользуемся граничным условием (5) и формулой (11):

$$u_n(-\alpha) = \int\limits_0^\pi \varphi(x) X_n(x)\, dx = \varphi_n. \tag{17}$$

Тогда удовлетворяя (16) к граничному условию (17), найдем

$$c_n = \frac{\varphi_n}{\delta_\alpha(n)}\ , \tag{18}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\delta_\alpha(n) = \cos\rho_n\alpha + \rho_n \sin\rho_n\alpha \neq 0. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (16) найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \begin{cases} \varphi_n \delta_\alpha^{-1}(n) e^{-\rho_n^2 t}, & t > 0, \\ \varphi_n \delta_\alpha^{-1}(n)[\cos\rho_n t - \rho_n \sin\rho_n t], & t < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Докажем теорему единственности решения задачи (2)–(5). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\varphi_n \equiv 0$ и из формул (20) и (11) следует, что

$$\int\limits_0^\pi u(x,t) X_n(x)\, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Отсюда в силу полноты системы $\{X_n(x)\}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,\pi]$ при любом $t \in [\alpha,\beta]$. Поскольку $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α и $n = p \in \mathbb{N}_0$ нарушено условие (19), т.е. $\delta_\alpha(p) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\rho_p^2 t} X_p(x), & t > 0, \\ (\cos\rho_p t - \mu_p \sin\rho_p t) X_p(x), & t < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Возникает вопрос о существовании нулей уравнения $\delta_\alpha(p) = 0$. Для этого его представим в виде

$$\delta_\alpha(p) = \sqrt{1 + \rho_p^2} \sin(\rho_p\alpha + \gamma_p) = 0, \tag{22}$$

где $\gamma_p = \arcsin 1/\sqrt{1+\rho_p^2}$. Отсюда видно, что уравнение (22) имеет счетное множество нулей относительно α:

$$\alpha = \frac{\pi k}{\rho_p} - \frac{\gamma_p}{\rho_p}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Таким образом, нами установлен критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)-(5), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$.*

1.3. Существование решения задачи. Поскольку α – любое положительно число, то выражение $\delta_\alpha(n)$ при больших n может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема "малых знаменателей"[1]. Поэтому для обоснования существования решения задачи (2)-(5) надо показать существование чисел α, при которых выражение $\delta_\alpha(n)$ при больших n отделено от нуля.

Лемма 1. *Если $\widetilde{\alpha} = \alpha/\pi$ является рациональным числом, то существуют положительные постоянные C_0 и n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}_0$), такие, что при $n > n_0$ справедлива оценка*

$$|\delta_\alpha(n)| \geq C_0 > 0. \tag{24}$$

□ На основании представлений (9) и (22) при больших n имеем

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n\left|\sin\left(\widetilde{\alpha}\pi\mu_n + \gamma_n\right)\right| = n\left|\sin\left(\pi n\widetilde{\alpha} + \frac{\widetilde{\alpha}\omega}{n} + \gamma_n\right)\right|. \tag{25}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$. Тогда выражение (25) примет вид

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n\left|\sin\left(\frac{p\omega}{n} + \gamma_n\right)\right|.$$

Отсюда на основании неравенства $\sin x > 2x/\pi$, $0 < x < \pi/2$, при больших n, получим

$$|\delta_\alpha(n)| > \frac{2n}{\pi}\left(\frac{p\omega}{n} + \gamma_n\right) > \frac{2p(h+H)}{\pi},$$

так как $n\gamma_n \to 1$ при $n \to +\infty$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{N}$. Разделим np на q с остатком: $np = sq + r$, где $s, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < q$. Если $r = 0$, то этот случай сводится к предыдущему, когда $\widetilde{\alpha}$ – натуральное число. Пусть $r > 0$. Тогда $1 \leq n \leq q-1$, $q \geq 2$, и из (25) будем иметь

$$|\delta_\alpha(n)| \geq n\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p\omega}{n} + \gamma_n\right)\right|. \tag{26}$$

Поскольку последовательность γ_n – бесконечно малая, то существует конечный предел

$$\lim_n \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{p\omega}{qn} + \gamma_n\right)\right| = \left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| = \sin\frac{\pi r}{q} \geq \sin\frac{\pi}{q} > 0. \tag{27}$$

Тогда из соотношений (26) и (27) следует, что

$$|\delta_\alpha(n)| > n\sin\frac{\pi}{q} \geq \sin\frac{\pi}{q} > 0.$$

Тем самым справедливость оценки (24) установлена. ■

Отметим, что если $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным числом, то на основании множества (23) можно подобрать такие числа, которые являются нулями $\delta_\alpha(n) = 0$.

Если теперь для чисел $\widetilde{\alpha}$ из Леммы 1 выполнены условия (19) при $n \in [0, n_0]$ и оценка (24) при $n > n_0$, то решение задачи (2)-(5) можно определить как сумму ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{28}$$

где $u_n(t)$ определяются по формулам (20), а $X_n(x)$ – система собственных функций задачи (7), (8).

Лемма 2. *Пусть выполнена оценка* (24) *при* $n > n_0$. *Тогда для таких* n *справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leq C_1 n|\varphi_n|, \;\; |u_n'(t)| \leq C_2 n^2|\varphi_n|, \;\; -\alpha \leq t \leq \beta\,,$$
$$|u_n''(t)| \leq C_3 n^3|\varphi_n|, \;\; -\alpha \leq t \leq 0\,,$$

где C_i *– здесь и далее положительные постоянные, независящие от* x, t, $\varphi(x)$ *и* n.

Доказательство этих оценок, в силу Леммы 1, непосредственно следует из формулы (20).

Ряд (28) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ мажорируются числовым рядом

$$C_4\sum_{n=0}^{+\infty} n^2|\varphi_n|. \tag{30}$$

В силу теоремы Стеклова ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n X_n(x)\,. \tag{30}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, когда $\varphi(x) \in C^3[0,\pi]$, $q(x) \in C^1[0,\pi]$ и

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \;\; \varphi'''(0) - h\varphi''(0) = 0, \;\; \varphi'''(\pi) + H\varphi''(\pi) = 0\,. \tag{31}$$

Действительно, в силу условий (6)-(8) имеем

$$\lambda_n\varphi_n = \int_0^\pi \varphi(x)\lambda_n X_n(x)\,dx = \int_0^\pi \varphi(x)[q(x)X_n(x) - X_n''(x)]\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \varphi(x)q(x)X_n(x)\,dx - \int_0^\pi \varphi(x)X_n''(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi [\varphi(x)q(x) - \varphi''(x)]X_n(x)\,dx = \int_0^\pi \psi(x)X_n(x)\,dx = \psi_n\,.$$

Поскольку функция $\psi(x) \in C^1[0,\pi]$ и в силу (31) удовлетворяет условиям (6), то на основании теоремы Стеклова ряд (30) сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Отсюда следует сходимость ряда (29), так как из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \psi_n^2$ (см.[13, с. 184]) получим, что

$$|\psi_n| = \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty. \tag{32}$$

Тогда из (31) и (32) найдем оценку:

$$n^2|\varphi_n| \leq \lambda_n|\varphi_n| = |\psi_n| = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\lambda_n}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_n} + \varepsilon_n^2\right),$$

из которой вытекает уже сходимость ряда (29).

Ряды из производных второго порядка но x и t соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ мажорируются рядом

$$C_5 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^3|\varphi_n|. \tag{33}$$

Для обоснования сходимости ряда (33) рассмотрим равенство

$$\lambda_n\varphi_n^{(2)} = \int_0^\pi \varphi''(x)\lambda_n X_n(x)\,dx = \int_0^\pi \varphi''(x)[q(x)X_n(x) - X_n''(x)]\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \varphi''(x)q(x)X_n(x)\,dx - \int_0^\pi \varphi''(x)X_n''(x)\,dx. \tag{34}$$

Последний интеграл интегрируя два раза но частям, с учетом условий (8) и (31), будем иметь

$$\int_0^\pi \varphi''(x)X_n''(x)\,dx = \int_0^\pi \varphi^{IV}(x)X_n(x)\,dx. \tag{35}$$

Тогда из равенств (34) и (35), получим

$$\lambda_n\varphi_n^{(2)} = \int_0^\pi [q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x)]X_n(x)\,dx = \int_0^\pi g(x)X_n(x)\,dx.$$

Если функция $g(x) = q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x) \in C^1[0,\pi]$ и удовлетворяет условиям (6), т.е. когда $\varphi(x) \in C^5[0,\pi]$ и $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$, $\varphi^{(5)}(0) - h\varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi^{(5)}(\pi) + H\varphi^{(4)}(\pi) = 0$, то по теореме Стеклова ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n^{(2)} X_n(x) \tag{36}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Из равенства (31) следует, что

$$\lambda_n \varphi_n = f_n - \varphi_n^{(2)}, \tag{37}$$

где $f_n = \int\limits_0^\pi q(x)\varphi(x)X_n(x)dx$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n X_n(x)$ – сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$ к функции $f(x) = q(x)\varphi(x)$, так как $f(x) \in C^1[0,\pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$.

Подставляя (37) в ряд (36), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_n f_n - \lambda_n^2 \varphi_n) X_n(x). \tag{38}$$

Если функция $f(x) \in C^3[0,\pi]$ и удовлетворяет условиям (6), т.е. когда $q(x) \in C^3[0,\pi]$, $q'(0) = q'(\pi) = 0$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (6), то аналогично обоснованию сходимости ряда (30) получим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f_n X_n(x) \tag{39}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Тогда из рядов (38) и (39) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 \varphi_n X_n(x),$$

из которого вытекает сходимость ряда (33).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$, указанных в лемме 1, при некоторых $n = n_1, n_2, ..., n_m$, где $0 \leq n_1 < n_2 < ... < n_m \leq n_0$, n_i, $i = \overline{1,m}$, и m – заданные неотрицательные целые числа, выполняется равенство $\Delta_\alpha(n) = 0$, то для разрешимости задачи (2) – (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_n = \int\limits_0^\pi \varphi(x) X_n(x) dx = 0, \; n = n_1, n_2, ..., n_m. \tag{40}$$

В этом случае решение задачи (2) – (5) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \left(\sum_{n=0}^{n_1-1} + ... + \sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m-1} + \sum_{n=n_m+1}^{+\infty} \right) u_n(t) X_n(x) + \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{41}$$

где в последней сумме p принимает значения $n_1, n_2, ..., n_m$, A_p – произвольные постоянные, функции $u_p(x,t)$ определяются по формуле (21), если в конечных суммах в правой части (41) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $q(x) \in C^3[0,\pi]$,$\varphi(x) \in C^5[0,\pi]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(\pi) = 0$, $j = 1,2,3$; $\varphi^{(5)}(0) - h\varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi^{(5)}(\pi) + H\varphi^{(4)}(\pi) = 0$ *и выполнена оценка* (24) *при* $n > n_0$. *Тогда если* $\delta_\alpha(n) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{0, n_0}$, *то существует единственное решение задачи* (2)-(5), *и оно определяется рядом* (28); *если* $\delta_\alpha(n) = 0$ *при некоторых* $n = n_1, n_2, ..., n_m \leq n_0$, *то задача* (2)–(5) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (40) *и решение определяется рядом* (41).

§2. Обратные задачи

Отметим, что различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных, т.е. для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучены достаточно полно; усилиями многих математиков создана теория обратных задач (см. монографии [14-20] и приведенную там обширную библиографию). А также отметим работы [21, 22], посвященные вопросам разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнений параболического типа.

Пусть теперь в постановке задачи (2)-(5) неизвестны функции $u(x,t)$, $q(x)$ и постоянные h и H. В связи с этим надо ввести дополнительные условия. Эти условия могут быть заданы по разному. На основании теории обратной задачи Штурма-Лиувилля [23, 12, 24] будем предполагать выполнение одного из следующих условий (A_i), $i = \overline{1,4}$:

– известны спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ задачи (7), (8) с неизвестным потенциалом из класса $C^3[0,\pi]$ и неизвестными коэффициентами h и H (условие (A_1));

– известны собственные значения λ_n и μ_n соответственно спектральных задач (7), (8) и (7),

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0\,, \quad X'(\pi) - HX(\pi) = 0\,, \tag{42}$$

здесь h_1 и H – действительные числа, $h_1 \neq h$ (условие (A_2));

– известна дополнительная информация о решении задачи (2)-(5) на стороне $x = \pi$:

$$u(\pi,t) = \psi(t)\,, \quad -\alpha \leq t \leq \beta\,, \tag{A_3}$$

или на стороне $x = 0$:

$$u(0,t) = \psi_0(t)\,, \quad -\alpha \leq t \leq \beta\,, \tag{A_4}$$

где $\psi(t)$ и $\psi_0(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

На основании условий (A_1)–(A_4) можно поставить следующие обратные задачи для уравнения (1) в области D.

Первая обратная задача. Найти функцию $u(x,t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H, удовлетворяющие условиям (2)–(5) и (A_1).

Вторая обратная задача. Найти функцию $u(x,t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H, удовлетворяющие условиям (2)–(5) и (A_2).

Третья обратная задача. Найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и число h, удовлетворяющие условиям (2), (3), (5), (A_3) и

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \;\; u_x(\pi,t) = \mu(t), \;\; -\alpha \leq t \leq \beta\,, \tag{43}$$

где $\mu(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Четвертая обратная задача. Найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, удовлетворяющие условиям (2), (3), (5), (43) и (A_4), здесь h – известная постоянная.

Отметим, что постановка задач 3 и 4 исходит из работы [18, с. 159-163], где для уравнения теплопроводности рассмотрены аналоги этих задач при $h = H = 0$ и доказаны соответствующие теоремы единственности.

Приведем для удобства дальнейшего изложения точные формулировки теорем единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля [23, 12, 25].

Теорема 3. *Пусть $q(x)$ и $\widetilde{q}(x)$ непрерывные на $[0,\pi]$ функции, а наборы чисел $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\widetilde{\lambda}_n,\widetilde{\alpha}_n\}_{n\geq 0}$ – спектральные данные задачи (7), (8) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h, H и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$. Тогда если $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ и $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$ и $H = \widetilde{H}$.*

Отметим, что в случае симметричности функции $q(x)$ относительно точки $x = \pi/2$, т.е. когда $q(\pi - x) = q(x)$, и $H = h$ для определения потенциала $q(x)$ и коэффициента h достаточно задать только спектр $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$.

Теорема 4. *Если $q(x) = q(\pi - x)$, $\widetilde{q}(x) = \widetilde{q}(\pi - x)$, $H = h$, $\widetilde{H} = \widetilde{h}$ и $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $n \geq 0$, то $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$ и $h = \widetilde{h}$.*

Теорема 5. *Пусть $q(x)$ и $\widetilde{q}(x)$ – непрерывные на $[0,\pi]$ функции, а $\{\lambda_n\}$ и $\{\widetilde{\lambda}_n\}$ – собственные значения задачи (7) и (8) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h, H и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$; $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\widetilde{\mu}_n\}_{n\geq 0}$ – собственные значения задачи (7), (42) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h_1, H и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}_1$, $\widetilde{H}$. Тогда если $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ и $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$.*

Теорема 6. Пусть $u(x,t)$, $q(x)$, h, H и $\widetilde{u}(x,t)$, $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$ – решения первой обратной задачи и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ и $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ на $\overline{D}$.

□ В силу теоремы 3 по спектральным данным $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяются коэффициенты задачи (7) и (8), т.е. $q(x) \equiv \widetilde{q}(x)$, $h = \widetilde{h}$ и $H = \widetilde{H}$. Тогда из теоремы 1 при условии (19) следует, что $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ в $\overline{D}$. ■

Теорема 7. *Пусть $u(x,t)$, $q(x)$, h, H и $\widetilde{u}(x,t)$, $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$ – решения второй обратной задачи и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \widetilde{q}(x)$ на $[0,\pi]$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ и $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ в $\overline{D}$.*

□ Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6 с применением теорем 5 и 1. ■

Теорема 8. *Пусть $u_1(x,t)$, $q_1(x)$, h_1 и $u_2(x,t)$, $q_2(x)$, h_2 – решения третьей обратной задачи и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0,\pi]$ и $h_1 = h_2$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\overline{D}$.*

□ Пусть $u(x,t)$, $q(x)$ и h – решение третьей обратной задачи. Следуя [18, с. 160] введем функцию

$$v_n(x,p) = \int\limits_{-\alpha}^{\beta} e^{-pt}\xi_n(t)u(x,t)\,dt\,, \tag{44}$$

где p – комплексный параметр, $\xi_n(t) \in C^\infty(-\alpha,\beta)$, $0 \le \xi_n(t) \le 1$, $\xi_n(t) = 0$ при $t \in [-\alpha, 1/(2n)] \cup [\beta - 1/2, \beta]$ и $\xi_n(t) = 1$ при $t \in [1/n, \beta - 1/n]$. В силу определения функции $\xi_n(t)$ интеграл (44) примет вид

$$v_n(x,p) = \int\limits_{0}^{\beta} e^{-pt}\xi_n(t)u(x,t)\,dt\,,$$

который является решением уравнения

$$v_n''(x,p) = (q(x)+p)\,v_n(x,p) - \int\limits_{0}^{\beta} e^{-\beta t}u(x,t)\xi_n'(t)\,dt\,.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$v''(x,p) - (q(x)+p)v(x,p) = 0,\ \ 0 < x < \pi\,, \tag{45}$$

$$v'(0,p) - hv(0,p) = 0\,, \tag{46}$$

$$v'(\pi,p) = \int\limits_{0}^{\beta} e^{-pt}\mu(t)\,dt = \nu(p)\,. \tag{47}$$

Рассмотрим функцию $w(x,p)$, которая является решением задачи Коши для уравнения (45) с начальными условиями

$$w(0,p) = 1,\ \ w'(0,p) = h\,. \tag{48}$$

Функции $v(x,p)$ и $w(x,p)$ являются решениями уравнения (45) и определитель Вронского в точке $x = 0$:

$$W[w,v] = \begin{vmatrix} w & v \\ w' & v' \end{vmatrix} = w(0,p)v'(0,p) - v(0,p)w'(0,p) = v'(0,p) - hv(0,p) = 0$$

в силу граничного условия (46). Тогда они линейно зависимы на $[0,\pi]$, поэтому $v(x,p) = c(p)w(x,p)$. Используя граничное условие (47), найдем

$$c(p) = \frac{\nu(p)}{w'(\pi,p)}$$

и

$$v(x,p) = \frac{\nu(p)w(x,p)}{w'(\pi,p)}\ . \tag{49}$$

Пусть $q_i(x)$, $u_i(x,t)$ и h_i, $i = 1,2$, – решения обратной задачи (2), (3), (5), (43), (A_3); $v_i(x,p) = \int\limits_0^\beta e^{-pt}u_i(x,t)\,dt$, $w_i(x,t)$ – решения задачи Коши для уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$ и начальными условиями (48) с $h = h_i$. Из дополнительного условия (A_3) следует, что $v_1(\pi,p) = v_2(\pi,p)$. Тогда в силу формулы (49) имеем

$$\frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}\,. \tag{50}$$

Поскольку функции $w_i(x,p)$ являются решениями уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$ и начальными условиями (48) с $h = h_i$, то $w_i(x,p)$ и $w_i'(x,p)$ при фиксированном x как функции комплексной переменной p являются аналитическими во всей комплексной плоскости. Тогда отношения

$$\frac{w_i(x,p)}{w_i'(x,p)}$$

также являются аналитическими на комплексной плоскости, за исключением нулей $w_i'(x,p)$, являющихся особыми точками. Из равенства (50) следует, что нули и особые точки функций

$$\frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} \quad \text{и} \quad \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$$

совпадают. Покажем, что нули функций $w_1(\pi,p)$ и $w_1'(\pi,p)$ не совпадают. Допустим, что при $p = p_0$

$$w_1(\pi,p_0) = w_1'(\pi,p_0) = 0\,. \tag{51}$$

По построению функция $w_1(x,p_0)$ является решением уравнения (45) с $q(x) = q_1(x)$ и удовлетворяет нулевым начальным условиям (51). Тогда $w_1(x,p_0) = 0$ на $[0,\pi]$, что противоречит тому, что $w_1(0,p_0) = 1$. Таким образом, нули функций $w_1(\pi,p)$ и $w_1'(\pi,p)$ не совпадают. Аналогично не совпадают нули функций $w_2(\pi,p)$ и $w_2'(\pi,p)$. Тогда из (50) следует, что все нули функций $w_1(\pi,p)$ и $w_2(\pi,p)$ совпадают, также совпадают все нули функций $w_1'(\pi,p)$ и $w_2'(\pi,p)$.

Пусть $p = p_0^i$ является нулем функции $w_i(\pi,p)$, $i = 1,2$. Покажем, что $\lambda_0^i = -p_0^i$ являются собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q_i(x)y = \lambda_i y\,, \tag{52}$$

$$y'(0) - h_i y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0\,. \tag{53}$$

В самом деле, поскольку функция $w_i(x,p)$ является решением уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$ и $p = p_0^i$, то функция $y_i(x) = w_i(x,p_0^i)$ является решением уравнения (52) с $\lambda = \lambda_0^i = -p_0^i$. Первое граничное условие из (53) следует из (48), а второе из того, что p_0^i нуль функции $w_i(\pi,p)$. Это решение ненулевое, так как в силу (48) $y_i(0) = w_i(0,p_0^i) = 1$. Следовательно, λ_0^i являются собственным значением задачи (52), (53), т.е. любой нуль функции $w_i(\pi,p)$, взятый со знаком минус, является собственным значением этой задачи. Справедливо и обратное утверждение. Если λ_0^i являются собственным значением, а $y_i(x)$ – соответствующей собственной функцией задачи (52), (53), то $p_0^i = -\lambda_0^i$ является нулем функции $w_i(\pi, p)$. Таким образом, существует биекция между нулями функции $w_i(\pi, p)$ собственными значениями задачи (52), (53) с $q(x) = q_i(x)$ и $h = h_i$. Аналогично, можно показать, что существует биекция между нулями функции $w_i'(\pi, p)$ и собственными значениями спектральной задачи для уравнения (52) с граничными условиями

$$y'(0) - h_i y(0) = 0, y'(\pi) = 0\,. \tag{54}$$

Пусть λ_n^i, $n = 0, 1, 2, ...$, собственные значения задачи (52), (53), а μ_n^i – собственные значения задачи (52), (54). Из совпадения нулей функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ следует равенство $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, а из совпадения нулей функций $w_1'(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$ следует, что $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, спектральные задачи (52), (53) и (52), (54) с $q_1(x)$, h_1 и $q_2(x)$, h_2 имеют одинаковые собственные значения. Тогда в силу теоремы 5 получим, что $q_1(x) \equiv q_2(x)$ при $x \in [0, \pi]$ и $h_1 = h_2$. При $q_1(x) = q_2(x) = q(x)$, $h_1 = h_2 = h$ и функции $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, являются решениями задачи (2), (3), (5) и (43). Их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является решением однородной задачи (2), (3), (5), (42) с $\mu(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Теперь, применяя теорему 1 при условии (19), получим, что $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\overline{D}$. ■

Теорема 9. *Пусть $u_i(x, t)$ и $q_i(x)$, $i = 1, 2$, решения четвертой обратной задачи с $q_i(x) = q_i(\pi - x)$ и $h = H = 0$, и выполнены условия (19) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$ и $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\overline{D}$.*

□ Доказательство аналогично обоснованию теоремы 8. Аналогично вводится функция (44) и для предельной функции $v(x, p)$ получаем задачу (45)–(47). Точно также определяется функция $w(x, p)$ и устанавливается справедливость равенства (49). Из условия переопределения (A_4) имеем, что $v_1(0, p) = v_2(0, p)$. Тогда из представления (49) с учетом условия $w_1(0, p) = w_2(0, p) = 1$, получим

$$\frac{1}{w_1'(\pi, p)} = \frac{1}{w_2'(\pi, p)}\,, \tag{55}$$

где $w_i(x, p)$ – решения задачи Коши для уравнения (45) с $q(x) = q_i(x)$, $i = 1, 2$, и начальными условиями (48). Из равенства (55) аналогично доказательству теоремы 8 получим совпадение собственных значений: $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, задачи (52), (54) с $q(x) = q_i(x)$, $i = 1, 2$. Тогда на основании теоремы 4 о единственности решения обратной задачи с потенциалом, симметричным относительно точки $\pi/2$, получим, что $q_1(x) = q_2(x)$ на $[0, \pi]$. После чего аналогично Теореме 8 имеем, что $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\overline{D}$. ■

Отметим, что установленные выше теоремы 6-9 являются утверждениями о единственности решения рассматриваемых нами обратных задач. Теперь остановимся на вопросах существования решения поставленных обратных задач 1 и 2. Для этого снова обратимся к теории обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Приведем следующую теорему [22, с. 45], которая позволяет строить алгоритм решения обратной задачи (7) и (8) с неизвестными коэффициентами $q(x)$, h и H, и в ней приведены необходимые и достаточные условия ее разрешимости по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$.

Теорема 10. *Для того вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ были спектральными данными обратной задачи (7) и (8) с $q(x) \in L_2[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы вы-*

полнялись равенства

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}\,, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \text{ при } n \neq m\,,$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + + \frac{\varkappa_{1n}}{n}, \;\; \alpha_n > 0,$$

где

$$\varkappa_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(t)\cos 2nt\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\,, \quad \varkappa_{1n} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - t)q(t)\sin 2nt\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Кроме того, $q(x) \in C^3[0,\pi]$ тогда и только тогда, когда для $\sqrt{\lambda_n}$ и α_n справедливы представления

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{i=1}^{4}\frac{\omega_i}{n^i} + \frac{\omega_n}{n^4}, \;\; \omega_1 = \frac{\omega}{\pi}, \;\; \omega_{2p} = 0, \;\; p \geq 1, \;\; \lambda_n \neq \lambda_m \text{ при } n \neq m; \tag{56}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{4}\frac{\omega_i^+}{n^i} + \frac{\omega_{1n}}{n^4}\,, \;\; \omega_{2p+1}^+ = 0\,, \quad p \geq 0\,, \;\; \alpha_n > 0\,, \tag{57}$$

где $\omega_n, \omega_{1n} \in l_2$, при этом функция $h(x)$ и числа h, H строятся по следующему алгоритму:

1. *По заданным числам $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ строится функция*

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}\right)\,,$$

здесь $\alpha_n^0 = \pi/2$ при $n > 0$ и $\alpha_n^0 = \pi$ при $n = 0$.

2. *Находим функцию $G(x,t)$ из интегрального уравнения Гельфанда-Левитана*

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds = 0\,, \quad 0 < t < x\,,$$

которое имеет единственное решение в $L_2[0,x]$ при любом фиксированном $x \in (0,\pi]$.

3. *Вычисляем $q(x)$, h и H по формулам*

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}G(x,x)\,, \quad h = G(0,0)\,, \quad H = \omega - h - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt\,.$$

Таким образом, если для чисел $\sqrt{\lambda_n}$ и α_n выполнены условия (56) и (57), то по указанному алгоритму восстанавливаются коэффициенты $q(x)$, h и H, при этом $q(x) \in C^3[0,\pi]$. Тогда на основании теоремы 2 находим функцию $u(x,t)$.

Теперь приведем условия разрешимости второй обратной задачи по двум известным спектрам λ_n и μ_n соответственно задач (7), (8) и (7), (42) [12, гл. VI, § 11], [23].

Теорема 11. *Для того чтобы вещественные числа λ_n и μ_n, $n \geq 0$, были соответственно спектрами задач (7), (8) и (7), (42) с $q(x) \in C^3[0,\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (56) и*

$$\sqrt{\mu_n} = n + \sum_{i=1}^{4} \frac{\omega_i'}{n^i} + \frac{\omega_n'}{n^4}, \quad \omega_1' = \frac{\omega'}{\pi}, \quad \omega_{2p}' = 0, \quad p \geq 1, \tag{58}$$

где $\omega' = h_1 + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx$,

$$\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{59}$$

При этом функция $q(x)$ и числа h и H строятся по следующему алгоритму:
1) *по заданным числам λ_n и μ_n находятся числа*

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \mu_n}; \tag{60}$$

2) *по числам λ_n и μ_n по указанному в теореме 10 алгоритму строится $q(x)$, h и H.*

Отметим, что в теореме 11 самым сложным является вычисление α_n по формуле (60). В работах [12, гл. V, § 11], [25] получены асимптотические формулы для чисел α_n в виде формул (57).

В заключение отметим, что вопросы о разрешимости обратных задач 3 и 4 остаются открытыми.

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273-279.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. 14. № 3. С. 3–19.
3. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. 1961. Т. 4. № 11. С. 99–104.
4. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. 1966. Т. 7. № 1. С. 89–92.
5. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения параболо-гиперболического типа // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
6. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Изд-во "Фан". 1986. 220 с.
7. Сабитов К.Б. К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.

8. Капустин Н.Ю. Задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках. Автореферат ... доктора ф.-м.н. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2012. 29 с.
9. Смолицкий Х.Л. Предельная задача для волнового уравнения. Дисс. ... доктора ф.-м.н. Л.: Ленингр. Краснознам. воен.-воздуш. инж. акад. 1950. 138 с.
10. Ильин В.А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Мат. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 91–101.
11. Ильин В.А. Теорема о единственности и принадлежности классу W_2^1 классического решения смешанной задачи для несамосопряженного гиперболического уравнения в произвольном цилиндре // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 60–65.
12. Левитан Б.М., Саргсян Н.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.:Наука. 1988. 432 с.
13. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука. 1983. 432 с. (изд. 2).
14. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука. СО. 1972. 164 с.
15. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука. 1980. 286 с.
16. Иванов В.К., Васин В.В., Танан В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.
17. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука. СО. 1982. 88 с.
18. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ. 1994. 208 с.
19. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc. 2000.
20. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009. 457 с. (изд. 2)
21. Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 46. № 5. С. 1053–1071.
22. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Доклады Академии наук. 2006. Т. 409. № 6. С. 740–743.
23. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука. 1984.
24. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит. 2007. 384 с.
25. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19. № 2 (116). С. 3–63.

THE INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED PARABOLA-HYPERBOLIC TYPE

K.B. Sabitov

Applied researches institute of of Bashkortostan Republic,
Odessa St., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Abstract. For a class of equations of mixed type in a rectangular area is studied initial-boundary value problem with boundary conditions of the third kind. The criterion of uniqueness. The solution is built as the sum of series on the system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. There are small denominators when convergence of series is justified. When the aspect ratio of the rectangle which is the region of hyperbolicity, is a rational number, it is shown the convergence of the series in the class of regular solutions. Then the above formulation of the inverse problems for the mixed type equation with unknown coefficients at the unknown function and boundary conditions. Based on the theory of Sturm-Liouville's inverse problems, it is proved sufficient conditions for their solvability.

Key words: equation of mixed type, direct and inverse problems, uniqueness, existence.