MSC 44A05

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА-ЭРДЕЙИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. В обзоре рассматриваются операторы преобразования Бушмана-Эрдейи, ядра которых выражаются через функции Лежандра. Приводятся исторические сведения об этом классе операторов преобразования, их классификация и основные свойства. Выделяются несколько классов определяемых операторов: операторы преобразования Бушмана-Эрдейи трёх родов, операторы преобразования Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сонина-Катрахова и Пуассона-Катрахова. Рассматриваются приложения введённых классов операторов преобразования Бушмана-Эрдейи к различным задачам дифференциальных уравнений и теории функций.

Ключевые слова: операторы преобразования, операторы Бушмана-Эрдейи, оператор Бесселя.

1. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи

Обзор посвящен теории операторов преобразования Бушмана-Эрдейи, ядра которых выражаются через функции Лежандра. В первом разделе рассматриваются основные определения теории операторов преобразования, приводятся исторические сведения об интегральных операторах Бушмана-Эрдейи. Во втором разделе вводятся и изучаются операторы преобразования Бушмана-Эрдейи первого рода, а также их предельный подкласс – операторы нулевого порядка гладкости. Ядра операторов этого класса выражаются через функции Лежандра первого рода. Частными случаями являются известные операторы преобразования Сонина и Пуассона, а также некоторые классические интегральные преобразования. В третьем разделе вводятся операторы преобразования Бушмана-Эрдейи второго рода, ядра которых выражаются через функции Лежандра второго рода. В четвёртом разделе вначале излагается общая схема построения операторов преобразования композиционным методом, на основе комбинирования классических операторов преобразования с произвольными мультипликаторами. Затем рассматривается пример применения композиционного метода к определению и изучению операторов преобразования Бушмана-Эрдейи третьего рода, определяемых степенными мультипликаторами. Показано, что к этому классу относятся унитарные операторы преобразования Сонина-Катрахова и Пуассона-Катрахова. В заключительном разделе кратко рассматриваются некоторые приложения операторов Бушмана-Эрдейи: формулы связи для решений сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных, эквивалентность норм в пространствах И.А. Киприянова и С.Л. Соболева, обобщения неравенств Харди и условий унитарности «сдвинутых» неравенств Харди, приложения к теории преобразования Радона.

2. Основные понятия теории операторов преобразования

Теория операторов преобразования – это существенное обобщение теории подобия конечномерных матриц. Дадим основное определение.

Определение 1. *Пусть дана пара операторов* (A, B). *Оператор* T *называется «оператором преобразования»* (ОП, сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator), если на элементах подходящих функциональных пространств выполняется соотношение

$$T\,A = B\,T. \tag{1}$$

Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры. Но ОП *не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам*, так как сплетаемые операторы как правило являются неограниченными в естественных пространствах, к тому же обратный к ОП не обязан существовать, действовать в том же пространстве или быть ограниченным. Так что спектры операторов, сплетаемых ОП, как правило не совпадают. Кроме того, сами ОП могут быть неограниченными. Это имеет место, например, в теории преобразований Дарбу, предметом которой является нахождение дифференциальных операторов преобразования (подстановок или замен) между парой дифференциальных же операторов, таким образом в этом случае все три рассматриваемых оператора являются неограниченными в естественных пространствах. При этом теория преобразований Дарбу как соответствующий раздел теории дифференциальных уравнений также вписывается в общую схему теории операторов преобразования при её расширенном понимании. Кроме того, можно рассматривать операторы преобразования не только для пары дифференциальных операторов. В теории ОП встречаются задачи для следующих разнообразных типов операторов: интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных (например, типа Дункла), дифференциальных или интегро-дифференциальных бесконечного порядка (например, в вопросах, связанных с леммой Шура о дополняемости), общих линейных в фиксированных функциональных пространствах, псевдодифференциальных и операторно-дифференциальных (абстрактных дифференциальных).

Возможность того, чтобы исходная и преобразованная функции принадлежали различным пространствам, что принято подчёркивать использованием различных обозначений для переменных, позволяет включить в общую схему ОП все классические интегральные преобразования: Фурье, Лапласа (на самом деле, Петцваля), Меллина, Ханкеля, Вейерштрасса, Конторовича-Лебедева, Мелера-Фока, Станковича и другие. В общую схему ОП также включаются конечные интегральные преобразования Г.А. Гринберга.

В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шрёдингера и задач теории рассеяния встречается специальный класс ОП — волновые операторы.

Коммутирующие операторы любой природы также подходят под определение ОП. Наиболее близко к духу и задачам теории ОП относится изучение операторов, коммутирующих с производными. Сами ОП в этом случае зачастую представляются формальными рядами, псевдо-дифференциальными операторами или дифференциальными операторами бесконечного порядка. Описание коммутантов напрямую связано с описанием всего семейства ОП для заданной пары по его единственному представителю. В этом классе задач фундаментальные приложения нашла теория операторных свёрток, особенно свертки Берга-Димовски. Начинают находить приложения в теории ОП и результаты для коммутирующих дифференциальных операторов, восходящие к классическим работам Бёрчнела и Чонди (J.L. Burchnall, T.W. Chaundy). Теория ОП также связана с вопросами факторизации дифференциальных операторов.

Отдельный класс ОП составляют преобразования, которые для одного и того же уравнения связывают краевые условия различных типов, например, Неймана и Дирихле.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A. При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B. Тогда, если существует ОП (**??**), то часто удаётся перенести свойства модельного оператора B и на A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A, то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (**??**), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu, g = Tf$. Поэтому, если второе уравнение с оператором B является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены монографии [1]- [12], а также подробные обзоры автора [13]- [14].

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин «transmutation», восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин "transformation" при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля и другими подобными им. Приведём дословную цитату из [3]: «Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems "magical" at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation».

В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегродифференицрования. Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом её приложений. Методы операторов преобразования применяются в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Левитана; в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается другое знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер операторов преобразования отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов. Определёнными разновидностями операторов преобразования являются части теорий обобщённых аналитических функций, операторов обобщённого сдвига и обобщённых операторных свёрток, метод преобразования Дарбу. В теории уравнений с частными производными методы операторов преобразования применяются для построения явных выражений для решений возмущённых задач через решения невозмущённых, изучении сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с существенными особенностями на части границы во внутренних или угловых точках, оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория операторов преобразования позволяет дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в том числе различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения операторов преобразования к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли-Винера, построению различных конструкций обобщённого сдвига и основанным на них обобщённых вариантов гармонического анализа. Методы теории операторов преобразования с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста в квантовой теории рассеяния, обратных задачах, исследовании системы Дирака и других матричных систем дифференциальных уравнений, операторных и дифференциально-операторных уравнениях, различных интегральных уравнениях, в том числе со специальными функциями в ядрах, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики. Кроме уже известных для метода Лакса и преобразований Дарбу всё время увеличивается число новых приложений ОП к нелинейным дифференциальным уравнениям и исследованию солитонов.

Фактически современная теория операторов преобразования возникла из двух примеров, ставших классическими [13]- [14]. Первым примером являются ОП, переводящие оператор Штурма-Лиувилля с некоторым потенциалом $q(x)$ во вторую производную:

$$D^2y(x) + q(x)y(x) = D^2Ty(x)\,, \quad D^2y(x) = y''(x) \tag{2}$$

при некотором выборе естественных краевых условий [7]- [11].

Второй пример – задача о преобразовании оператора Бесселя во вторую производную:

$$TB_\nu f = D^2Tf\,, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D\,, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}\,, \quad \nu \in \mathbb{C}\,. \tag{3}$$

На этом пути возникли ОП Сонина-Пуассона-Дельсарта, Бушмана-Эрдейи и их многочисленные обобщения [1]- [3], [13]- [15]. Такие операторы преобразования находят многочисленные приложения при изучении уравнений с частными производными с особенностями.

2. Исторические сведения об операторах Бушмана-Эрдейи

Операторы Бушмана-Эрдейи имеют многочисленные модификации. Автором предложена удобная классификация их различных вариантов. Операторы Бушмана-Эрдейи первого рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра первого рода. Их предельным случаем являются операторы нулевого порядка гладкости, играющие важную роль в различных приложениях. Операторы Бушмана-Эрдейи второго рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра второго рода. Комбинация операторов первого и второго родов приводит к операторам Бушмана-Эрдейи третьего рода. При специальном выборе параметров они сводятся к унитарным операторам преобразованиям, которые автор назвал унитарными операторами преобразования Сонина-Катрахова и Пуассона-Катрахова, в честь В.В. Катрахова, начавшего их изучение.

Рассмотрим важный класс интегральных операторов, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП Сонина-Пуассона-Дельсарта и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля и Эрдейи-Кобера, а также интегральных преобразований Мелера-Фока.

Определение 2. *Операторами Бушмана-Эрдейи первого рода называются интегральные операторы*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt\,, \tag{4}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt\,, \tag{5}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt\,, \tag{6}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt\,. \tag{7}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$ – функция Лежандра первого рода [16], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$ – та же функция на разрезе $-1 \le t \le 1$, $f(x)$– локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0, x \to \infty$. Параметры μ, ν – комплексные числа, $\mathrm{Re}\mu < 1$, можно ограничиться значениями $\mathrm{Re}\nu \ge -1/2$.

Интегральные операторы Бушмана-Эрдейи возникли впервые в теории уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в 1957 году в работе Копсона [17], см. также [18]. Приведём соответствующий результат, имеющий в том числе исторический интерес, который мы назовём «Лемма Копсона».

Лемма 1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с двумя переменными:*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

(обобщённое уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу или B-гиперболическое уравнение по терминологии И.А. Киприянова) в открытой четверти плоскости $x>0$, $y>0$ при положительных параметрах $\beta>\alpha>0$ с краевыми условиями на осях координат (характеристиках)

$$u(x,0)=f(x)\,,\quad u(0,y)=g(y)\,,\quad f(0)=g(0)\,.$$

Пусть решение u(x,y) является непрерывно дифференцируемым в замкнутом первом квадранте, имеет непрерывные вторые производные в открытом квадранте, граничные функции $f(x),g(y)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Тогда, если решение поставленной задачи существует, то для него выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0\,,\quad y=0\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0\,,\quad x=0\,, \tag{8}$$

$$2^{\beta}\Gamma(\beta+\frac{1}{2})\int_0^1 f(xt)t^{\alpha+\beta+1}1-t^{2\frac{\beta-1}{2}}P_{-\alpha}^{1-\beta}t\,dt= \tag{9}$$

$$=2^{\alpha}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\int_0^1 g(xt)t^{\alpha+\beta+1}1-t^{2\frac{\alpha-1}{2}}P_{-\beta}^{1-\alpha}t\,dt\,,$$

$$\Downarrow$$

$$g(y)=\frac{2\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\beta-\alpha)}y^{1-2\beta}\int_0^y x^{2\alpha-1}f(x)y^2-x^{2^{\beta-\alpha-1}}x\,dx\,, \tag{10}$$

где $P_{\nu}^{\mu}(z)$ – функция Лежандра первого рода [16].

Таким образом, содержание леммы Копсона сводится к тому, что начальные данные на характеристиках нельзя задавать произвольно, они должны быть связаны операторами Бушмана-Эрдейи первого рода. Более подробное обсуждение этой леммы и соответствующие ссылки см. в [13]- [14], [19]- [20]. Доказательства в работе Копсона носят нестрогий характер, из приведённой леммы не следует формула обращения для операторов Бушмана-Эрдейи.

Поэтому справедливо считается, что изучение данного класса интегральных операторов было проведено впервые в ряде работ Р. Бушмана и А. Эрдейи [22]- [25]. Эти результаты изложены в монографии [21], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается. Операторы Бушмана-Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T.P. Higgins, Ta Li, E.R. Love, Динь Хоанг Ань, В.И. Смирнова, В.В. Катрахова, Н.А. Вирченко, А.А. Килбаса, О.В. Скоромник, Б. Рубина и ряде других. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения, см. [26]- [29].

Автором было замечено новое основное свойство интегральных операторов Бушмана-Эрдейи, которое заключается в том, что они являются ОП и сплетают вторую производную с оператором Бесселя [30]- [31]. Затем в работах автора этот класс операторов преобразования и их приложения были подробно изучены, см. [13], [19]- [20], [30]- [40].

Важность операторов Бушмана-Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении но сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана-Эрдейи но радиальной переменной, при исследовании краевых задач для уравнений с особенностями внутри области, см. [13]- [14], [19]- [20].

3. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи первого рода

Приведём основные свойства введённых выше ОП (4). Вначале распространим определение 2 на случай значения параметра $\mu = 1$.

Определение 3. *Введём при $\mu = 1$ операторы Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам*

$$lB_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx}\int_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt\,, \tag{11}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\,dt\,, \tag{12}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \left(-\frac{df(t)}{dt}\right)dt\,, \tag{13}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt\,, \tag{14}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ – функция Лежандра.

Теорема 1. *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана-Эрдейи иа подходящих функциях через дробные интегралы Римаиа-Лиувилля и Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости:*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu}\ {}_1S_{0+}^{\nu} f,\ \ B_{-}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{-}^{\nu}\ I_{-}^{1-\mu} f\,, \tag{15}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{0+}^{\nu}\ I_{0+}^{1-\mu} f,\ \ E_{-}^{\nu,\mu} f = I_{-}^{1-\mu}\ {}_1S_{-}^{\nu} f\,. \tag{16}$$

Эти формулы позволяют «разделить» параметры ν и μ. Мы докажем, что операторы (11-14) являются изоморфизмами пространств $L_2(0,\infty)$, если ν не равно некоторым исключительным значениям. Поэтому операторы (11-14) по действию в пространствах типа L_2 в определённом смысле подобны операторам дробного интегродиффенцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$. Далее операторы Бушмана-Эрдейи будут доопределены при всех значениях μ.

Исходя из этого, введём следующее

Определение 3. *Число $\rho = 1 - \operatorname{Re}\mu$ назовём порядком гладкости операторов Бушмана-Эрдейи* (11-14)

Таким образом, при $\rho > 0$ (то есть при $\operatorname{Re}\mu > 1$) операторы Бушмана-Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (то есть при $Re\,\mu < 1$) уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0,\infty)$. Операторы (11)-(14), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана-Эрдейи первого рода (11-14) с функцией Лежандра I рода в ядре. При некоторых специальных значениях параметров ν, μ операторы Бушмана-Эрдейи сводятся к более простым. Так при значениях $\mu = -\nu$ или $\mu = \nu + 2$ они являются операторами Эрдейи-Кобера; при $\nu = 0$ операторами дробного интегродифференцирования $I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_{-}^{1-\mu}$; при $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu = 0$ или $\mu = 1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu = 0$, $x = 1$, $v = it - \frac{1}{2}$ оператор $B_{-}^{\nu,0}$ лишь на постоянную отличается от преобразования Мелера-Фока.

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right), \tag{17}$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливает

Теорема 2. *Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетают L_ν и вторую производиую:*

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu\,, \qquad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu\,. \tag{18}$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}\,, \quad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}\,. \tag{19}$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетают оператор Бесселя и вторую производиую:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu\,, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu\,. \tag{20}$$

Теорема 3. *Пусть $Re\,\mu \le 1$. Тогда оператор $B_{0+}^{\nu,\mu}$ является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет иа подходящих функциях соотношению* (18).

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана-Эрдейи. При этом $E_{-}^{\nu,\mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu,\mu}$ и $B_{-}^{\nu,\mu}$ – операторами типа Пуассона.

Теперь сделаем важное замечание. Из приведённой теоремы следует, что ОП Бушмана-Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана-Эрдейи переводят тригонометрические или экспоненциальные функции в приведённые функции Бесселя, а другая половина наоборот. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона и представляют существенный интерес. Ещё раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана-Эрдейи, и могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

Важнейшим свойством операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν. Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике, параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения.

Теорема 4. *Для унитарности в L_2 операторов (11-14) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S^\nu_{0+}, {}_1P^\nu_-)$ и $({}_1S^\nu_-, {}_1P^\nu_{0+})$ взаимно обратны.*

4. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи второго рода

Теперь определим и изучим операторы Бушмана-Эрдейи второго рода.

Определение 3. *Введём новую пару операторов Бушмаиа-Эрдейи с функциями Лежандра второго рода в ядре*

$$ {}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q^1_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy + \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}^1_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy\right), \tag{21} $$

$$ {}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}^1_\nu\left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q^1_\nu\left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy\right). \tag{22} $$

Эти операторы являются аналогами операторов первого рода нулевого порядка гладкости. При $y \to x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (21) будет типа Сонина, (22) – типа Пуассона).

Теорема 5. *Справедливы формулы для норм*

$$ \|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\nu}), \tag{23} $$

$$ \|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\nu}). \tag{24} $$

Оператор ${}_2S^\nu$ ограничен при всех ν. Оператор ${}_2P^\nu$ не является непрерывным тогда и только тогда, когда $\sin\pi\nu = -1$.

Для унитарности в L_2 операторов ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ необходимо и достаточно, чтобы параметр ν был целым числом.

Операторы второго рода связаны с преобразованиями Гильберта на полуоси.

Теорема 6. *Справедливы представления*

$$ {}_2S^0 f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y}{x^2-y^2} f(y)\,dy, \tag{25} $$

$$ {}_2S^{-1}f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2-y^2}f(y)\,dy. \tag{26} $$

Для операторов второго рода введём также более общие аналоги операторов преобразования Бушмана-Эрдейи первого рода с двумя параметрами по формулам:

$$ {}_2S^{\nu,\mu}f = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^x (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}}e^{-\mu\pi i}Q_\nu^\mu(\frac{x}{y})f(y)\,dy + \right. $$

$$ \left. + \int\limits_x^\infty (y^2+x^2)^{-\frac{\mu}{2}}\mathbb{Q}_\nu^\mu(\frac{x}{y})f(y)\,dy\right), \tag{27} $$

где $Q_\nu^\mu(z)$ – функция Лежандра второго рода, $\mathbb{Q}_\nu^\mu(z)$ – значение этой функции па разрезе, $\operatorname{Re}\nu < 1$. Второй подобный оператор определяется как формально сопряжённый в $L_2(0,\infty)$ к (27).

5. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи третьего рода

Перейдём к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν. Такие операторы определяются по формулам:

$$ S_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2S^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1S_-^\nu f\,, \tag{28} $$

$$ P_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2P^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1P_-^\nu f\,. \tag{29} $$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмапа-Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости. Их можно отнести к операторам Бушмапа-Эрдейи третьего рода (см. ниже). В интегральной форме эти операторы имеют вид:

$$ S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\frac{x}{y}f(y)\,dy + \tag{30} $$

$$ +\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\frac{x}{y}f(y)\,dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\frac{x}{y}f(y)\,dy\right), $$

$$ P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\frac{y}{x}\left(\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy - \tag{31} $$

$$ -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\frac{y}{x}f(y)\,dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\frac{y}{x}f(y)\,dy\right). $$

Теорема 7. *Операторы (28-29), (30-31) при всех $\nu \in \mathbb{R}$ являются унитарными, взаимно сопряжёиными и обратными в L_2. Они являются сплетающими и действуют ио формулам (17). При этом S_U^ν является оператором типа Сонина (Сониua-Катрахова), а P_U^ν — типа Пуассона (Пуассона-Катрахова).*

ОП в форме подобной (30)-(31), по только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 г. В.В. Катраховым. Поэтому автор предлагает названия: операторы преобразования Сопипа-Катрахова и Пуассона-Катрахова. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено автором, кроме того их удаётся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом [35]- [38]. При этом основными становятся наиболее простые формулы факторизации вида (28-29). На этом пути построение подобных операторов перестаёт быть специальным искусным приёмом, а встраивается в общую методику построения целых классов подобных операторов преобразования композиционным методом, схему которого мы сейчас кратко рассмотрим.

Рассмотрим синус и косинус-преобразования Фурье и обратные к ним

$$F_c f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(y) \cos(ty)\, dy\,, \qquad F_c^{-1} = F_c, \tag{32}$$

$$F_s f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(y) \sin(ty)\, dy\,, \qquad F_s^{-1} = F_s\,. \tag{33}$$

Определим преобразование Фурье-Бесселя по формулам

$$F_\nu f = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int\limits_0^\infty f(y)\, j_\nu(ty)\, y^{2\nu+1}\, dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(y) \frac{J_\nu(ty)}{(ty)^\nu}\, y^{2\nu+1}\, dy = \frac{1}{t^\nu} \int\limits_0^\infty f(y) J_\nu(ty)\, y^{\nu+1}\, dy, \tag{34}$$

$$F_\nu^{-1} f = \frac{1}{(y)^\nu} \int\limits_0^\infty f(t) J_\nu(yt)\, t^{\nu+1}\, dt. \tag{35}$$

Здесь $J_\nu(\cdot)$ – обычная [16], а $j_\nu(\cdot)$ – нормированная [15] функции Бесселя. Операторы 1-2 самосопряженные унитарные в $L_2(0,\infty)$. Операторы 3-4 самосопряженные унитарные в $L_{2,\nu}(0,\infty)$.

Тогда первая пара операторов преобразования Бушмапа-Эрдейи третьего рода па подходящих функциях с произвольной весовой функцией определяется формулами

$$S_{\nu,c}^{(\varphi)} = F_c^{-1}\left([\varphi(t)]^{-1} F_\nu\right)\,, \tag{36}$$

$$P_{\nu,c}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t) F_c\right)\,, \tag{37}$$

а вторая пара – формулами

$$S_{\nu,s}^{(\varphi)} = F_s^{-1}\left([\varphi(t)]^{-1}F_\nu\right), \tag{38}$$

$$P_{\nu,s}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t)F_s\right), \tag{39}$$

где $\varphi(t)$ – произвольная весовая функция.

Введенные операторы преобразования па подходящих функциях сплетают B_ν и D^2. можно дать их интегральное представление.

Теорема 8. *Определим операторы преобразования, сплетающие B_ν и D^2, согласно формулам*

$$S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\substack{s\\c}\right\}} = F^{-1}_{\left\{\substack{s\\c}\right\}}\Big([\varphi(t)]^{-1}F_\nu\Big), \quad P^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\substack{s\\c}\right\}} = F_\nu^{-1}\Big(\varphi(t)F_{\left\{\substack{s\\c}\right\}}\Big).$$

Тогда для оператора типа Сонииа справедливо представление (формальное)

$$\left(S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\substack{s\\c}\right\}} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty K(x,y)f(y)\,dy, \tag{40}$$

где

$$K(x,y) = y^{\nu+1}\int_0^\infty [\varphi(t)\,t^\nu]^{-1}\begin{Bmatrix}\sin(xt)\\ \cos(xt)\end{Bmatrix}J_\nu(yt)dt.$$

Представление для оператора типа Пуассона имеет вид

$$\left(P^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\substack{s\\c}\right\}} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty G(x,y)f(y)\,dy, \tag{41}$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{x^\nu}\int_0^\infty \varphi(t)\,t^{\nu+1}\begin{Bmatrix}\sin(yt)\\ \cos(yt)\end{Bmatrix}J_\nu(xt)dt.$$

Частным случаем введённых операторов третьего рода являются определённые выше унитарные операторы Сонипа-Катрахова и Пуассона-Катрахова, которые получаются при выборе весовой функции $\varphi(t)$ в виде некоторой зависящей от параметра ν степени.

6. Приложения операторов Бушмана-Эрдейи

Приведём краткий список приложений, подробное изложение в [13]- [14], [19]- [20].

• С помощью ОП Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном «фольклоре» – *пространства*

И.А.Киприянова изоморфны весовым пространствам С.Л.Соболева. Разумеется, с помощью ОП Бушмана-Эрдейи рассмотрен только самый простой случай, результаты можно обобщать на другие виды нормировок, многомерный случай, замену неограниченных областей на ограниченные, что ещё предстоит рассмотреть в будущем, но это не изменит принципиально основного вывода. Сказанное ни в коем случае не умаляет ни существенного значения, ни необходимости использования пространств И.А. Киприянова для подходящего круга задач теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. Принципиальная важность пространств И.А. Киприянова для теории уравнений в частных производных различных типов с операторами Бесселя отражает общий методологический подход, который выразил в виде афоризма чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцев:

«**Каждое уравнение должно изучаться в своём собственном пространстве!**»

Полученные вложения могут быть использованы для прямого переноса известных оценок для решений B-эллиптических уравнений в пространствах И.А. Киприянова [15] на оценки в весовых пространствах С.Л. Соболева, это непосредственное применение приведённых в статье условий ограниченности и сплетающих свойств операторов преобразования Бушмана-Эрдейи.

• Построенные операторы преобразования позволяют выписывать явные формулы, выражающие решения уравнений в частных производных с операторами Бесселя через невозмущённые уравнения. Примером служит B-эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\ldots,x_n) = f\,, \tag{42}$$

аналогичные B-гиперболические и B-параболические уравнения [15]. Эта идея ранее осуществлялась с использованием операторов преобразования Сонина-Пуассона-Дельсарта, см. [41]- [46]. Новые типы операторов преобразования позволяют получить новые классы подобных формул соответствия.

• Рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу в полупространстве

$$B_{\alpha,t}u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + F(t,x)\,,$$

где $t>0,\ x\in\mathbb{R}^n$. Дадим нестрогое описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t=0$ единым методом. Образуем по формулам (17) операторы преобразования $X_{\alpha,t}$ и $Y_{\alpha,t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha,t}u = v(t,x)$, $X_{\alpha,t}F = G(t,x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + G,\ v|_{t=0} = \varphi(x),\ v'_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{43}$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда в предположении, что $Y_{\alpha,t} = X_{\alpha,t}^{-1}$ получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_\alpha u|_{t=0} = a(x),\ (X_\alpha u)'|_{t=0} = b(x)\,. \tag{44}$$

При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сонина-Пуассона-Дельсарта, Бушмана-Эрдейи первого, второго, третьего родов, Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сонипа-Катрахова и Пуассона-Катрахова, обобщенные операторы Бушмапа-Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике в каждом конкретном случае их можно привести к более простым аналитическим формулам.

Описанная схема обобщается па дифференциальные уравнения с большим числом переменных, но которым могут действовать операторы Бесселя с различными параметрами, а также уравнения других типов. Применение операторов преобразований позволяет сводить сингулярные (или иначе вырождающиеся) уравнения с операторами Бесселя но одной или нескольким переменным (уравнения ЭПД, сингулярное уравнение теплопроводности, B-эллиптические уравнения но определению И.А. Киприянова, уравнения обобщённой осесимметрической теории потенциала – теории $GASPT$ (*Generalized Axially Symmetric Potential Theory*) – А. Вайнстейна и другие) к несингулярным. При этом априорные оценки для сингулярного случая получаются как следствия соответствующих априорных оценок для регулярных уравнений, если только удалось оценить сами операторы преобразования в нужных функциональных пространствах. Значительное число подобных оценок было приведено выше.

• Класс операторов обобщённого сдвига введён и подробно изучен в работах Б.М. Левитана. Он имеет многочисленные применения в теории операторов с частными производными, в том числе с операторами Бесселя, позволяя в частности переносить особенность в уравнениях из начала координат в любую точку. Операторы обобщённого сдвига по явным формулам выражаются через операторы преобразования. Поэтому новые классы операторов преобразования позволяют построить и изучать новые классы операторов обобщённого сдвига.

• В последнее время значительное развитие получила теория операторов Дункла. Это в существенном дифференциально–разностные операторы, содержащие линейные комбинации обычных производных и конечных разностей. В высших размерностях операторы Дункла связаны с алгебрами Ли и группами отражений и симметрий. Для этого класса операторов значительное развитие получила теория операторов преобразования, как классических, так в отдельных работах и Бушмана-Эрдейи.

• Известно, что в силу результатов Людвига [19]- [20] преобразование Радона при описании через сферические гармоники действует на каждой гармонике но радиальной переменной в нашей терминологии как некоторый оператор Бушмана-Эрдейи первого рода. Отметим, что именно эта формула в двумерном случае была использована А. Кормаком для расчёта первого томографа, за что впоследствии он был удостоен Нобелевской премии.

Частными случаями формулы Людвига, полученной в 1966 году, являются явные формулы, описывающие действие преобразования Радона по любой сферической гармонике, в частности, на чисто радиальных функциях. На этом пути следствием полученных выше результатов являются интегральные представления, оценки норм в функциональных пространствах, формулы обращения для преобразования Радона. Результаты формулируются в терминах операторов Сонина-Пуассона-Дельсарта, Эрдейи-Кобера, Бушмана-Эрдейи. Например, становится понятным, что по существу многие формулы обращения преобразования Радона совпадают с различными вариантами формул для обращения операторов Бушмана-Эрдейи первого рода.

• Ещё с 1950-х годов специалистам было известно, что никакой новой теории для построения полиномиальных решений B-эллиптических уравнений не требуется. Это следует из простого факта, что уже операторы преобразования Сонина-Пуассона-Дельсарта переводят степень в степень. Следовательно, они переводят B-гармонические полиномы в гармонические и наоборот по явным формулам. Поэтому и обобщённые сферические гармоники строятся по явным формулам из обычных, так как они являются сужениями соответствующих полиномов на единичную сферу. Данный подход подробно изложен, например, в работах Б. Рубина [29]. Операторы Бушмана-Эрдейи добавляют новую степень свободы ко всем этим построениям.

• Унитарность сдвинутых на единичный классических операторов Харди – это известный результат, он получается как частный случай из приведённых выше теорем. Подстановка других натуральных значений параметра приводит к новому бесконечному семейству интегральных операторов простого вида, унитарных в $L_2(0,\infty)$.

Теорема 8. *Следующие операторы образуют пары взаимно обратных унитарных операторов в* $L_2(0,\infty)$*:*

$$
\begin{aligned}
U_3 f &= f + \int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y}\,, & U_4 f &= f + \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy\,,\\
U_5 f &= f + 3x\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2}\,, & U_6 f &= f - \frac{3}{x^2}\int_0^x y f(y)\,dy\,,\\
U_7 f &= f + \frac{3}{x^2}\int_x^\infty y f(y)\,dy\,, & U_8 f &= f - 3x\int_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2}\,,\\
U_9 f &= f + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y}\right) f(y)\,dy\,, & U_{10} f &= f + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) f(y)\,dy\,.
\end{aligned}
$$

Литература

1. Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations / North Holland, 1979. – 245 p.
2. Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / North Holland, 1982. – 457 p.
3. Carroll R. Transmutation Theory and Applications / North Holland, 1986. – 351 p.
4. Gilbert R., Begehr H. Transformations, Transmutations and Kernel Functions. Vol. 1-2 / Longman, Pitman, 1992.
5. Trimeche Kh. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators // Mathematical Reports, V.4, Part 1) / Harwood Academic Publishers, 1988. – 282 p.
6. Фаге Д.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / Новосибирск: Наука, 1977. – 280 с.
7. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля / Киев: Наукова Думка, 1972. – 220 с.
8. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / Киев: Наукова Думка, 1977. – 331 с.

9. Левитан Б.М. Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения / М.: ГИФМЛ, 1962. – 324 с.
10. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля / М.: Наука, 1984. – 240 с.
11. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака / М.: Наука, 1988. – 432 с.
12. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – 10. – С.3-163.
13. Ситник С.М. Обзор: Операторы преобразования и их приложения // «Исследования по современному анализу и математическому моделированию» (Ред. Коробейник Ю.Ф., Кусраев А.Г.) / Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2008. – С.226-293.
14. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey / arXiv: 1012.3741, 2012. – 141 p.
15. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука,-Физматлит, 1997. – 204 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т.1. / М.: Наука, 1973. – 296 с.
17. Copson E.T. On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic Type // Arch. Ration.Mech. and Analysis 1. – 1957. – 1. – P.349-356.
18. Copson E.T., Erdelyi A. On a Partial Differential Equation with Two Singular Lines // Arch. Ration.Mech. and Analysis 2. – 1958. – 1. – P.76-86.
19. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Ed. M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin) / Cambridge Scientific Publishers, 2013. – P.171-201.
20. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // arXiv: 1304.2114v1. – 2013. – 65 p.
21. Килбас А.А., Маричев О.И., Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
22. Buschman R.G. An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Review. – 1963. – 5;3. – P.232-233.
23. Buschman R.G. An inversion integral for a Legendre transformation // Amer. Math. Mon. – 1962. – 69;4. – P.288-289.
24. Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions // SIAM Review. – 1964. – 1;15. – P.30.
25. Erdelyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. – 1967. – 8;1. – P.50-54.
26. Килбас А.А., Скоромник О.В. Интегральное уравнение типа Абеля с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области // Тезисы докладов международной конференции АМАДЕ. Минск, 2009. – С.83.
27. Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications / World Scientific, 2001. – 220 p.
28. Катрахов В.В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1980. – 251;5. – С.1048-1051.
29. Rubin B. Weighted spherical harmonics and generalized spherical convolutions // 1999/2000. – The Hebrew University of Jerusalem, Preprint No.2. –38 p.
30. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт ИАПУ ДВО РАН. – Владивосток, 1990. – 45 с.
31. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // ДАН СССР. – 1991. – 320;6. – С.1326-1330.
32. Ляховецкий Г.В., Ситник С.М. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи // Препринт ИАПУ ДВО РАН. – Владивосток, 1991. – 11 с.

33. Ситник С.М. Об одной паре операторов преобразования // В сб. «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики» (Ред. В.Н. Врагов) / Новосибирск, 1987. – С.168-173.
34. Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР. – 1984. – 278;4. – С.797-799.
35. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод факторизации в теории операторов преобразования // «Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа» (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова, отв. ред. В.Н. Врагов) / Новосибирск, 1990. – С.104-122.
36. Катрахов В.В., Ситник С.М. Композиционный метод построения B-эллиптических, B-гиперболических и B-параболических операторов преобразования // ДАН СССР. – 1994. – 337;3. – С.307-311.
37. Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ). Естественнонаучная серия. – 2008. – 8/1;(67). – С.237-248.
38. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина-Пуассона // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – 5(76);18. – С.135-153.
39. Sitnik S.M. Some problems in the modern theory of transmutations // Spectral theory and differential equations. International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday / Kharkiv, 2012. – P.101-102.
40. Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations: classification, analytical properties and applications to differential equations and integral transforms // International Conference «Mathematics Days in Sofia». 7th Minisymposium Transform Methods and Special Functions '14 (TMSF-14) in frames of MDS-2014. Dedicated to the 80th Anniversary of Professor Ivan Dimovski, Corr.-Member of Bulgarian Academy of Sciences / Sofia, 2014. – P.20-21.
41. Delsarte J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéares aux dèrivées partielles du seconde ordre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1938. – 206. – P.1780-1782.
42. Delsarte J. Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation // Colloques Internat. Nancy. – 1956. – P.29-44.
43. Lions J.L. Opérateurs de Delsarte et problème mixte // Bull. Soc. Math. France. – 1956. – 84. – P.9-95.
44. Lions J.L. Quelques applications d'opérateurs de transmutations // Colloques Internat. Nancy. – 1956. – P.125-142.
45. Delsarte J., Lions J.L. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe // Comm. Math. Helv. – 1957. – 32. – P.113-128.
46. Левитан Б.М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. – 1951. – 6;2. – С.102-143.

BUSCHMAN-ERDELYI's TRANSMUTATIONS: CLASSIFICATION, BASIC PROPERTIES, APPLICATIONS.

S.M. Sitnik

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av., 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. Buschmann-Erdelyi's transmutation operators with Legendre function kernels are under consideration in the survey. It is given the brief historical review, the classification of operators and their main properties. The following classes of Buschmann-Erdelyi transmutations are defined: operators of 1st, 2nd and 3rd kinds, zero smoothness operators, Sonine-Katrakhov and Poisson-Katrakhov unitary operators. Some applications to different problems of differential equations and function theory are proposed.

Key words: transmutations, Buschman-Erdelyi's transmutations, Bessel operator.