



MSC 81Q50

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ КВАНТОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ДВУМЕРНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПО ПРАВИЛАМ ВЕЙЛЯ-МАККОЯ И БОРНА-ЙОРДАНА

Н.Н. Чеканова^{1,2)}, И.К. Кириченко²⁾, Н.А. Чеканов^{3,4)}

¹⁾Харьковский институт банковского дела,
пр-т Победы, 55, 61174, Харьков, Украина, e-mail: Chekanova76@list.ru

²⁾Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, 61003, Харьков, Украина, e-mail: ikir238@rambler.ru,

³⁾Белгородский юридический институт МВД России,
ул. Горького, 71, 308024, Белгород, Россия, e-mail: Chekanov@bsu.edu.ru,

⁴⁾Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, 308015, Белгород, Россия

Аннотация. В работе исследована консервативная классическая гамильтонова система с двумя степенями свободы. На основе численных расчетов сечений Пуанкаре показано, что, в общем, система является неинтегрируемой и в ней реализуется динамический хаос, а также наблюдается переход регулярность–хаос–регулярность. Однако приведены условия, при которых рассматриваемая система является интегрируемой. Обнаружено, что в одном интегрируемом случае на поверхности потенциальной энергии имеются области с отрицательной гауссовой кривизной. Получена классическая нормальная форма и по правилам Борна-Йордана и Вейля-Маккоя построены ее квантовые аналоги, для которых решена задача на собственные значения и найдены приближенные формулы для энергетического спектра. Для частных значений параметров квантовых нормальных форм по этим формулам проведены численные расчеты нижних уровней энергии.

Ключевые слова: гамильтонова система, нормальная форма, правила квантования, энергетический спектр, компьютерное моделирование.

Введение. Нормализация гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы является одним из универсальных методов приближенного интегрирования уравнений классической механики. Существо метода нормальных форм состоит в выполнении канонических преобразований исходной классической функции Гамильтона и ее приведении к более простому нормальному виду. Тогда уравнения движения с новой функцией Гамильтона в нормальной форме, или непосредственно просто интегрируются в нерезонансном случае, или же существенно упрощаются по сравнению с исходной функцией Гамильтона в случае наличия в системе резонансов. К примеру, для резонансных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, после выполнения нормализации, исходная система приводится к интегрированию уже одномерной гамильтоновой системы. Исследование нерезонансных гамильтоновых систем в представлении их в нормальной форме широко использовал Дж. Биркгоф [1], а на случай наличия в системе резонансов такой подход был расширен Ф. Густавсоном [2] с конкретными расчетами на ЭВМ для теперь хорошо известной системы Хенона-Хейлеса. Необходимые канонические преобразования выполнялись при помощи производящей



функции, зависящей от исходных координат и новых импульсов, поэтому получение явных зависимостей исходных канонически сопряженных координат и импульсов от новых представляет крайне трудную практически невыполнимую ручную задачу.

На основе теории преобразований и рядов С. Ли независимо Дж. Хори [3] и А. Де-при [4] были предложены рекуррентные формулы для канонических преобразований, которые необходимы для приведения исходной функции Гамильтона к нормальной форме. В таком подходе исходные канонически сопряженные координаты и импульсы по этим формулам выражались посредством новых переменных и обратно по подобным рекуррентным формулам.

Простота выполнения рекуррентных преобразований имеет преимущество по сравнению со сложным «распутыванием» смешанных переменных в производящей функции в методе нормальных форм Биркгофа-Густавсона. В системе алгебраических преобразований REDUCE нами программно реализованы алгоритмы метода Биркгофа-Густавсона и метода Де-при-Хори в виде символьно-численных вычислений нормальной формы для классических гамильтоновых с произвольным конечным числом степеней свободы (программы GITA [5] и LINA [6], соответственно).

После основополагающих работ [1-4] были предложены различные улучшающие модификации первоначальных алгоритмов построения нормальной формы для заданной исходной функции Гамильтона (см. например, [8-10]).

В последнее время предложены новые подходы [11-13] к задаче нормализации гамильтоновых систем но, к сожалению, не реализованные в виде программных продуктов, что, собственно, позволяло бы провести сравнение с методами нормализации Биркгофа-Густавсона и Де-при-Хори.

После приведения исходной классической функции Гамильтона к нормальной форме, последняя представляется в виде суммы однородных полиномов по новым канонически сопряженным координатам и импульсам и может быть использована для получения приближенных решений исходной задачи классической механики. С другой стороны, представление исходной классической функции Гамильтона в нормальной форме в виде суммы однородных полиномов по канонически сопряженным координатам и импульсам позволяет провести ее квантовомеханическое описание.

Основные положения новой квантовой механики были открыты В. Гейзенбергом и опубликованы в 1925 году [14]. А спустя всего два месяца вышла статья М. Борна и П. Йордана [15], в которой, в частности, впервые получено коммутационное соотношение для квантовомеханических операторов координаты \hat{q} и импульса \hat{p} в виде

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = h/2\pi i, \quad (1)$$

а также правило сопоставления классическому моному вида $q^m p^n$, ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) его квантового аналога, которое запишем как

$$BJ\{q^m p^n = p^n q^m\} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \hat{p}^{n-k} \hat{q}^m \hat{p}^k. \quad (2)$$

К этому следует добавить результаты, полученные П.А.М. Дираком [16], который предложил правило квантования, при котором «разность гейзенберговских произведений



двух квантовых величин равна скобке Пуассона этих величин, умноженных на $i\hbar/2\pi$:

$$\{q, p\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{p}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}) = 1. \quad (3)$$

Здесь $\{q, p\}$ – скобки Пуассона, $[\hat{q}, \hat{p}]$ – коммутатор для операторов \hat{q}, \hat{p} и \hbar – постоянная Планка.

В 1927 году опубликована статья Г. Вейля [17], (см. также [18], гл. IV, пар. 14), в которой автор на основе теоретико-групповых представлений предложил в интегральной форме следующее правило соответствия между классическими и их квантовыми аналогами. Пусть классическая функция $f(q, p)$ определяется следующим интегралом Фурье

$$f(q, p) = \iint \exp(i\sigma p + i\tau q) \zeta(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (4)$$

тогда соответствующая функция $F(\hat{q}, \hat{p})$ в квантовой механике дается выражением

$$F(\hat{q}, \hat{p}) = \iint \exp(i\sigma \hat{p} + i\tau \hat{q}) \zeta(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (5)$$

а операторы \hat{q}, \hat{p} удовлетворяют коммутационному соотношению (1). На основе этих допущений для функций полиномиального вида $f(q, p) = q^m p^n$ Н. Маккой [19] получил ряд различных соотношений, одно из которых записывается как

$$WMc\{q^m p^n = p^n q^m\} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{p}^{n-k} \hat{q}^m \hat{p}^k \quad (6)$$

которое будем называть правилом квантования Вейля-Маккоя.

В монографии [20, с. 345] ее авторы получили правило соответствия в следующем виде

$$f(q)p^n \rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{p}^k f(\hat{q}) \hat{p}^{n-k}, \quad (7)$$

которое представили посредством повторяющихся антикоммутаторов $[\hat{a}, \hat{b}]_+ = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$ следующим образом:

$$f(q)p^n \rightarrow [[\dots[f(\hat{q}), \hat{p}]_+, \hat{p}]_+, \dots]_+. \quad (8)$$

Кроме упомянутых выше основных работ имеются публикации, в которых с разных позиций обсуждается проблема соответствия классических величин и их квантовых аналогов (см., например, [21]-[26]). Критический обзор различных правил квантования классических функций Гамильтона проведен в монографии [27, разд. 3.4–3.9]. В настоящей работе для гамильтоновой, в общем, неинтегрируемой системы с двумя степенями свободы получена классическая нормальная форма Биркгофа-Густавсона, для которой по правилам квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя получены соответствующие квантовые аналоги. Для этих квантовых аналогов, то есть операторов Шредингера найдены приближенные формулы для энергетических спектров. По этим формулам

для некоторых конкретных числовых значений параметров были проведены расчеты энергетических спектров и проведено их сравнение с имеющимися в литературе результатами, которые получены прямыми численными вычислениями.

Классическая динамика. В настоящей работе рассмотрена следующая консервативная классическая система с двумя степенями свободы, функция Гамильтона которой равна

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + b(q_1^2 q_2 + \frac{1}{3}q_1^3) + cq_1^2 q_2^2 + d(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (9)$$

где координаты (q_1, q_2) и импульсы (p_1, p_2) – канонически сопряженные переменные, b, c, d – безразмерные параметры, причем $d > 0$ и $c + 4d > 0$.

При произвольных значениях параметров эта система является неинтегрируемой и в ней реализуется динамический хаос [28]. Исследуемая нами гамильтонова система (9) отличается от изученных в литературе систем тем, что: 1) несмотря на наличие отрицательной гауссовой кривизны на поверхности потенциальной энергии ППЭ (9), она, например, при условии $c = 4d$ является интегрируемой; 2) в широком диапазоне параметров стационарные точки квадратичной части ППЭ являются вырожденными, то есть ее одно или оба собственных значения равны нулю [28].

На рис. 1 приведены изолинии ППЭ и линии нулевой гауссовой кривизны, а на рис. 2 – сечения Пуанкаре, соответственно, для этих ППЭ при различных значениях полной энергии E системы.

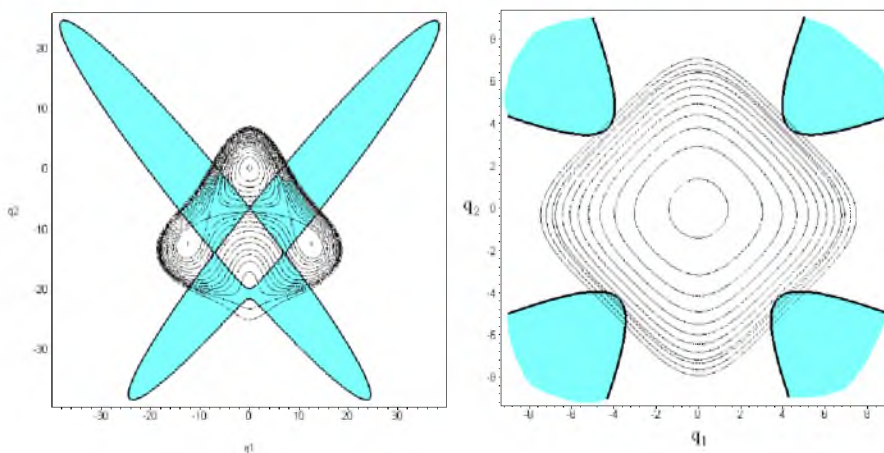


Рис. 1. (Слева). Изолинии ППЭ и линия нулевой гауссовой кривизны (области на ППЭ с отрицательной гауссовой кривизны затемнены) при следующих наборах параметров: $b = 0.1$, $c = 0.0023$, $d = 0.000625$, ($W = 16d/b^2 = 1$, $W_c = (2c + 8d)/b^2 = 0.96$, $c + 4d = 0.0048$). (Значение потенциальной энергии в начале координат является наименьшим по сравнению с ее величинами в остальных локальных минимумах). (Справа). Изолинии ППЭ и линия нулевой гауссовой кривизны при значениях параметров: $b = 1/20$, $c = 1/20$, $d = 1/200$, ($W = 16d/b^2 = 32$, $W_c = (2c + 8d)/b^2 = 56$, $c + 4d = 0.07$), (имеется единственный минимум в начале координат).

Как видно из сечений Пуанкаре (рис. 2), при указанных двух наборах значений параметров b, c, d , в исследуемой системе (9) существует хаотический режим движения.

Область отрицательной гауссовой кривизны, изображенная на рис. 1 (слева), является ограниченной, что приводит к существованию в системе перехода регулярность – хаос – регулярность (рис. 2), то есть с увеличением полной энергии регулярный режим движения восстанавливается, что было впервые обнаружен в других двумерных гамильтоновых системах [29]. Из рис. 1 (справа) видно, что область отрицательной гауссовой кривизны не ограничена и регулярный характер движения не восстанавливается с увеличением полной энергии.

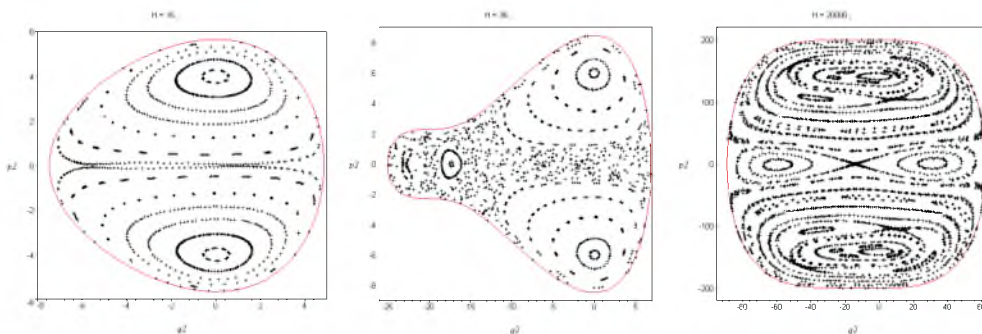


Рис. 2а. Сечения Пуанкаре: слева энергия $E = 16$, в центре – $E = 36$, справа – $E = 20000$.

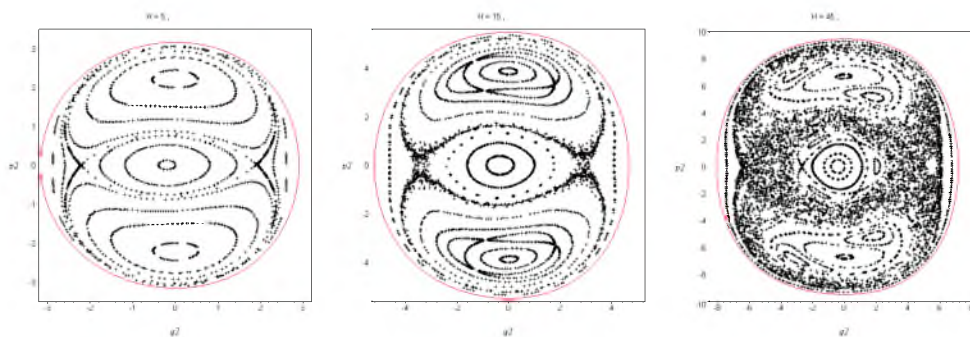


Рис. 26. Сечения Пуанкаре: слева энергия $E = 5$, в центре – $E = 15$, справа – $E = 45$.

Рассматриваемая здесь система имеет еще следующую особенность. На ППЭ (рис. 1) имеются четыре непересекающиеся неограниченные области с отрицательной гауссовой кривизной. Если вычислить критическую энергию E_{cr} перехода от регулярного движения к хаотическому согласно критерию по наличию отрицательной гауссовой кривизны (критерий ОГК), то ее значение равно $E_{cr} = 25(13 + 2\sqrt{2/3})/9 \approx 40.6$. Эта энергия равна минимальному значению потенциальной функции $V(q_1, q_2)$ на линии с нулевой гауссовой кривизной в четырех точках: $(q_1, q_2) = (\pm 5\sqrt{2/3}; \mp 5\sqrt{2/3})$, $(q_1, q_2) = (\pm 5\sqrt{2/3}; \pm 5\sqrt{2/3})$, $5\sqrt{2/3} \approx 4.082$. Однако, как показывают численные расчеты сечений Пуанкаре (см. рис. 2), хаотическое движение достаточно явно проявляется (см. рис. 2) уже при энергии примерно равной $E = 15$.

Таким образом, для рассматриваемой, в общем, неинтегрируемой гамильтоновой системы (9) критерий ОГК недостаточно точно предсказывает величину критической

энергии E_{cr} в отличие, например, от правильных предсказаний для других исследованных ранее систем [30].

Кроме того, в интегрируемых случаях, которые рассмотрим ниже, на ППЭ (9) имеются области отрицательной гауссовой кривизны, но, тем не менее, при всех энергиях классическое движение, конечно, является регулярным, то есть критерий ОГК вовсе не применим. Гамильтонова система (9) для трех наборов параметров b, c, d является интегрируемой.

1). Если $b \neq 0$ или $b = 0, c \neq 0, c = 4d$, то исследуемая система имеет, кроме энергии, второй интеграл движения [28]:

$$I_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2 + b(q_1 q_2^2 + q_2^3)/3 + 4d q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2). \quad (10)$$

На рис. 3, 4 приведены результаты численных расчетов изолиний ППЭ и линий нулевой гауссовой кривизны, а также сечений Пуанкаре при трех значениях полной энергии E для параметров $b = 1/4, c = 1/50, d = 1/200$.

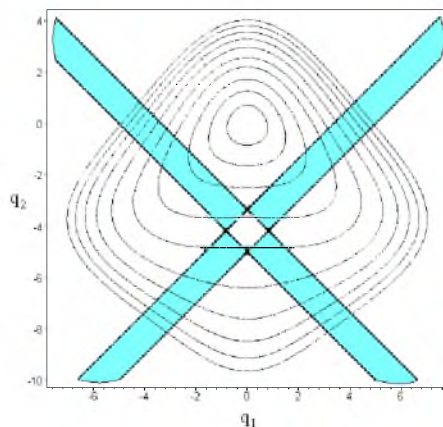


Рис. 3. Изолинии ППЭ и линии нулевой гауссовой кривизны (области отрицательной гауссовой кривизны затемнены).

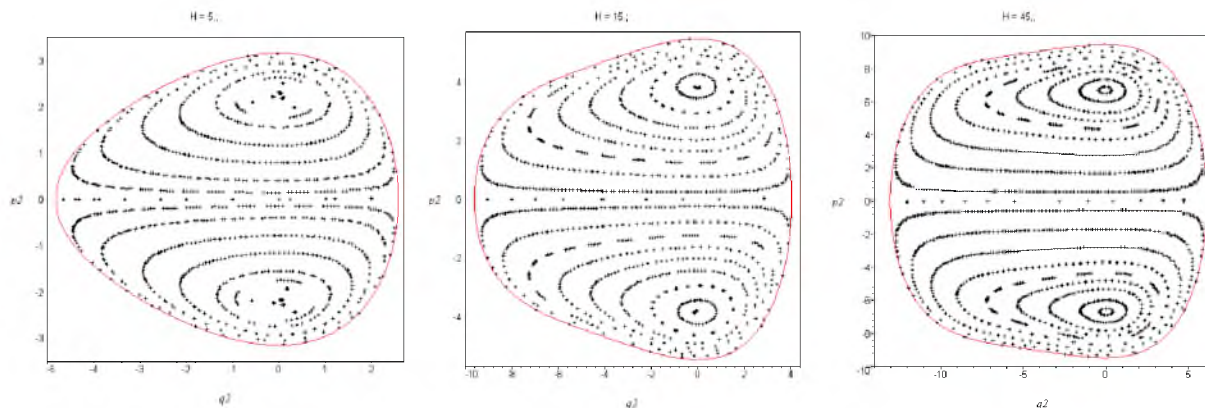


Рис. 4. Сечения Пуанкаре: слева энергия $E = 5$, в центре – $E = 15$, справа – $E = 45$.



Так как выполняются неравенства $d > 0$ и $c + 4d > 0$, то классическое движение финитно. Для приведенных выше значений параметров величины $W = 16d/b^2$ и $W_c = (2c + 8d)/b^2$, определяющие топологию ППЭ, одинаковы и равны $W = W_c = 32/25 = 1.28$. А так как выполняется неравенство $W > W_c > 1$, то на ППЭ (рис. 3) имеется единственный минимум в начале координат. Отметим, что равенство $W = W_c$ означает выполнение условия интегрируемости $c = 4d$.

Как уже было отмечено, одной из особенностей исследуемой двумерной гамильтоновой системы (9) является то, что, несмотря на наличие на ППЭ областей с отрицательной гауссовой кривизной, она является интегрируемой.

2). Если $b = c = 0$, $d \neq 0$, то функция Гамильтона (9) упрощается

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + d(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (11)$$

и, уже из ее вида, можно заключить, что в этом случае имеется закон сохранения момента импульса, то есть следующий интеграл движения

$$I_2 = q_1 p_1 - q_2 p_1. \quad (12)$$

Это непосредственно можно легко проверить, вычисляя скобку Пуассона, $\{H, I_2\} = 0$, что подтверждается проведенными численными расчетами сечений Пуанкаре при различных начальных данных. В этом интегрируемом случае областей отрицательной гауссовой кривизной не имеется.

3). Если $b = 0$, $c = -2d$, $d \neq 0$, то функция Гамильтона будет равна сумме двух одномерных ангармонических осцилляторов

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + dq_1^4, \quad H_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + dq_2^4 \quad (13)$$

и, следовательно, такая классическая система является интегрируемой. Энергии каждого из этих одномерных осцилляторов, к примеру, являются интегралами движения. Как и в интегрируемом случае 2) здесь также на соответствующей поверхности потенциальной поверхности областей с отрицательной гауссовой кривизной нет.

Нормализация классической функции гамильтона (9). Так как система (9) является резонансной с соотношением частот равным 1:1, то процедуру приведения к нормальной форме Биркгофа-Густавсона можно выполнить следующим образом. Предварительно для исходной функции Гамильтона применяем каноническое преобразование с валентностью равной мнимой единице [31]:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2i}(-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2), & q_2 &= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2), \\ p_1 &= \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2), & p_2 &= \frac{1}{2i}(Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2), \end{aligned} \quad (14)$$

а ему обратное преобразование запишется в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(q_2 - ip_2) + \frac{i}{2}(q_1 - ip_1), & Q_2 &= \frac{1}{2}(q_2 - ip_2) - \frac{i}{2}(q_1 - ip_1), \\ P_1 &= \frac{1}{2}(q_2 + ip_2) - \frac{i}{2}(q_1 + ip_1), & P_2 &= \frac{1}{2}(q_2 + ip_2) + \frac{i}{2}(q_1 + ip_1). \end{aligned} \quad (15)$$



Из выражений (15) непосредственно следует, что переменные Q_1, Q_2 комплексно сопряжены, соответственно, переменным P_1, P_2 .

Для исходной функции Гамильтона (9), выраженной в новых канонически сопряженных переменных Q_1, Q_2 и P_1, P_2 , выполняем последовательные канонические преобразования $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ при помощи производящей функции

$$F(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = Q_1\eta_1 + Q_2\eta_2 + \sum_{S=3}^{S_{max}} W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2), \quad (16)$$

где $W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = Q_1^{l_1} Q_2^{l_2} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2}$ – производящий однородный полином степени $S = l_1 + l_2 + m_1 + m_2$. В результате начальная функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ приводится к нормальной форме $G(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$, для которой выполняется условие

$$\hat{D}G(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0, \quad (17)$$

где так называемый дифференциальный оператор нормальной формы имеет вид

$$\hat{D} = \sum_{\nu=1}^2 \left(\xi_{\nu} \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu}} - \eta_{\nu} \frac{\partial}{\partial \eta_{\nu}} \right). \quad (18)$$

Из-за предварительного канонического преобразования (14) оператор (18) принимает диагональный вид, поэтому его действие на однородные мономы $W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = Q_1^{l_1} Q_2^{l_2} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2}$ является тривиальным:

$$\hat{D}W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = (l_1 + l_2 - m_1 - m_2)W^{(S)}(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2).$$

что упрощает трудоемкую процедуру нормализации. Затем, при помощи программы [5], находим модифицированную нормальную форму Биркгофа-Густавсона до степени $S_{max} = 6$ по каноническим переменным, которую представим в следующем виде

$$\begin{aligned} G_6(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = & i[Q_1P_1 + Q_2P_2 + C_{41}(Q_1P_1 + Q_2P_2)^2 - C_{42}(Q_1P_2 - Q_2P_1)^2 + \\ & C_{43}(Q_1P_1 - Q_2P_2)^2 + C_{61}(Q_1P_1 + Q_2P_2)^2 - C_{62}(Q_1P_2 - Q_2P_1)^3 - \\ & C_{63}(Q_1P_2 + Q_2P_1)(Q_1P_1 + Q_2P_2)^2 - C_{64}(Q_1P_1 + Q_2P_2)(Q_1P_2 - Q_2P_1)^2 + \\ & C_{65}(Q_1P_2 + Q_2P_1)(Q_1P_2 - Q_2P_1)^2 + C_{66}(Q_1P_1 + Q_2P_2)(Q_1P_1 - Q_2P_2)^2], \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{41} = \frac{3}{2}d - \frac{5}{12}b^2, \quad C_{42} = -\frac{5}{12}b^2 + \frac{3}{8}c, \quad C_{43} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{8}, \\ C_{61} = -\frac{235}{432}b^4 + \frac{173}{36}b^2d + \frac{13}{36}b^2c - \frac{17}{4}d^2, \quad C_{62} = -\frac{2}{9}b^2d + \frac{1}{18}b^2c, \\ C_{63} = -\frac{11}{9}b^2d + \frac{11}{36}b^2c, \quad C_{64} = -\frac{17}{64}c^2 + \frac{277}{36}b^2d + \frac{199}{72}b^2c - \frac{235}{144}b^4 - \frac{17}{8}cd, \\ C_{65} = \frac{11}{9}b^2d - \frac{11}{36}b^2c, \quad C_{66} = \frac{9}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{64}c^2 - \frac{1}{36}b^2d + \frac{1}{144}b^2c. \quad (20) \end{aligned}$$



Заметим, что в выражении (19) для конечных канонических переменных $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ из-за удобства при компьютерных вычислениях использованы те же обозначения, как и для начальных канонически сопряженных координат и импульсов, то есть переменные (Q_1, Q_2, P_1, P_2) .

Если для нормальной формы (19), (20) выполнить канонический переход к переменным действие-угол, то непосредственно из явного вида полученной функции Гамильтона можно увидеть, что исходная, в общем, неинтегрируемая двумерная система (9) приближенно будет представлена уже одномерной интегрируемой системой [28].

Введем следующие функции:

$$\Psi_0 = Q_1 P_1 + Q_2 P_2, \quad \Psi_1 = \frac{i}{2}(Q_1 P_2 - Q_2 P_1), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2}(Q_1 P_1 - Q_2 P_2), \quad \Psi_3 = \frac{1}{2}(Q_1 P_2 + Q_2 P_1), \quad (21)$$

для которых скобки Пуассона равны

$$\{\Psi_0, \Psi_\lambda\} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (22)$$

то модифицированная нормальная форма (19) перепишется в виде

$$G_6 = i[\Psi_0 + C_{41}\Psi_0^2 + 4C_{42}\Psi_1^2 + 4C_{43}\Psi_2^2 + C_{61}\Psi_0^3 - 8C_{62}\Psi_3^3 - 2C_{63}\Psi_0^2\Psi_3 + 4C_{64}\Psi_1^2\Psi_0 - 8C_{65}\Psi_1^2\Psi_3 + 4C_{66}\Psi_2^2\Psi_0], \quad (23)$$

в которой числовые коэффициенты определены по формулам (20).

Из (22) непосредственно следует, что нормальная форма (19) и (23) является интегрируемым приближением для неинтегрируемой, в общем случае, исходной системы (9), причем выполняется тождество

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = \Psi_0^2/4, \quad (24)$$

а также имеют место соотношения

$$\{\Psi_\lambda, \Psi_\mu\} = i\varepsilon_{\lambda\mu\nu}, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$ – полностью антисимметричный тензор третьего ранга (символ Леви-Чивита). Таким образом, функции (21) образуют замкнутую группу преобразований относительно скобок Пуассона.

Квантовые аналоги классической нормальной формы. Канонические преобразования (15), используя стандартную подстановку

$$p_\nu \rightarrow \hat{p}_\nu = -i\frac{\partial}{\partial q_\nu}, \quad q_\nu \rightarrow \hat{q}_\nu = q_\nu, \quad \nu = 1, 2 \quad (26)$$

с известным правилом коммутации (1) (постоянная Планка $\hbar = 1$)

$$[\hat{p}_\nu, \hat{q}_\nu] = i\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2 \quad (27)$$



($\delta_{\mu\nu}$ – символ Кронекера), запишем в операторном виде

$$\hat{Q}_1 = \hat{a}_2^\dagger + i\hat{a}_1^\dagger, \quad \hat{Q}_2 = \hat{a}_2^\dagger - i\hat{a}_1^\dagger, \quad \hat{P}_1 = \hat{a}_2 - i\hat{a}_1, \quad \hat{P}_2 = \hat{a}_2 + i\hat{a}_1, \quad (28)$$

где

$$\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{q}_1 - i\hat{p}_1), \quad \hat{a}_2^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{q}_2 - i\hat{p}_2), \quad \hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{q}_1 + i\hat{p}_1), \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{2}(\hat{q}_2 + i\hat{p}_2), \quad (29)$$

верхний символ «+» обозначает эрмитово сопряжение. С учетом выражений (27) легко проверить, что операторы (29) коммутируют по правилу

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\nu^\dagger] = \frac{i}{2}\delta_{\mu\nu}, \quad (30)$$

а операторы (28) подчиняются правилу

$$[\hat{P}_\mu, \hat{Q}_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}. \quad (31)$$

Впрочем, правило коммутации (31) непосредственно можно получить из условия квантования Дирака (3), если учесть, что классические канонические преобразования (14) и (15) имеют валентность равную мнимой единице i .

Из выражений (28), (29) следует, что операторы \hat{P}_ν и \hat{Q}_ν , ($\nu = 1, 2$), являются операторами уничтожения и рождения, соответственно.

Используя правила квантования (2) и (6), для классической нормальной формы (19), (20) получим, соответственно, два выражения ее квантовых аналогов \hat{G}_6^{BJ} и \hat{G}_6^{WMc} , и каждое выражение представим в виде суммы диагональной и недиагональной части $\hat{G}_6^{BJ} = \hat{G}_{diag}^{BJ} + \hat{G}_{nondiag}^{BJ}$ и $\hat{G}_6^{WMc} = \hat{G}_{diag}^{WMc} + \hat{G}_{nondiag}^{WMc}$. Ниже приведем только диагональные части:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{diag}^{BJ} = & \hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1 + C_{41} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)^2 + \frac{5}{2} \right] + \\ & + C_{42} \left(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 + \frac{1}{2} \right) + C_{43} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 - \hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{5}{2} \right] + \\ & + C_{61} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)^3 + \frac{1}{4}(\hat{Q}_1\hat{P}_1)^2 + \frac{1}{4}(\hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{27}{4}(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2) + \frac{13}{2} \right] - \\ & - C_{64} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 + 3) \right] + \\ & C_{66} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1) \left((\hat{Q}_1\hat{P}_1 - \hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{1}{4}(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2) \right) - \frac{1}{2}\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 \right]. \quad (32) \\ \hat{G}_{diag}^{WMc} = & \hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1 + C_{41} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \right] + \\ & + C_{42} \left(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{Q}_2\hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1\hat{P}_1\hat{Q}_2\hat{P}_2 + \frac{1}{2} \right) + C_{43} \left[(\hat{Q}_1\hat{P}_1 - \hat{Q}_2\hat{P}_2)^2 + \frac{1}{2} \right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+ C_{61} \left[(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1)^3 + 2(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) \right] - \\
 &- C_{64} \left[(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1)(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 2\hat{Q}_1 \hat{P}_1 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) \right] + \\
 &- C_{66} \left[(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) \left((\hat{Q}_1 \hat{P}_1)^2 + (\hat{Q}_2 \hat{P}_2)^2 - 2\hat{Q}_1 \hat{P}_1 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1 \right) \right]. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Заметим, что следующие векторы квантового состояния [32]

$$|N, L\rangle = \left[\left(\frac{N+L}{2} \right)! \left(\frac{N-L}{2} \right)! \right]^{-1/2} \hat{Q}_2^{(N-L)/2} \hat{Q}_1^{(N+L)/2} |0, 0\rangle, \quad \hat{P}_1 |0, 0\rangle = \hat{P}_2 |0, 0\rangle = 0, \quad (34)$$

где N – главное квантовое число, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, а L – орбитальное квантовое число, которое при заданном значении N принимает следующие значения: $L = \pm N, \pm(N-2), \pm(N-4), \dots, \pm 1(0)$, являются собственными векторами для диагональных частей квантовых аналогов (32) и (33). Наличие недиагональных членов в квантовых аналогах (32) и (33) связано с тем, что в исходной классической гамильтоновой системе (9) между частотами имеется резонансное соотношение $1 : 1$.

Вычисление энергетических спектров квантовых нормальных форм. Так как векторы (34) представляют ортонормированный базис, то энергетические спектры квантовых нормальных форм (32) и (33) определяются следующими выражениями:

$$E_{BJ}^{NL} = \langle N, L | \hat{G}_{diag}^{BJ} | N, L \rangle + \sum_{N', L'} \langle N', L' | \hat{G}_{nondiag}^{BJ} | N, L \rangle, \quad (35)$$

$$E_{WMc}^{NL} = \langle N, L | \hat{G}_{diag}^{WMc} | N, L \rangle + \sum_{N', L'} \langle N', L' | \hat{G}_{nondiag}^{WMc} | N, L \rangle. \quad (36)$$

Используя соотношения

$$\hat{Q}_1 \hat{P}_1 |N, L\rangle = \left(\frac{N+L}{2} \right) |N, L\rangle, \quad \hat{Q}_2 \hat{P}_2 |N, L\rangle = \left(\frac{N-L}{2} \right) |N, L\rangle, \quad (37)$$

из выражений (35) и (36) без учета недиагональных слагаемых получаем формулы для энергетических спектров:

$$\begin{aligned}
 E_{NL}^{BJ} = & N + 1 + \frac{1}{2} C_{41} (2N^2 + 4N + 7) + \frac{1}{2} C_{42} (N^2 + 2N - L^2 + 1) + \\
 & \frac{1}{2} C_{43} (2L^2 + 5) + \frac{1}{8} C_{61} (8N^3 + 25N^2 + 78N + L^2 + 60) - \\
 & \frac{1}{2} C_{64} (N^3 + 3N^2 + 8N - NL^2 - L^2 + 3) + \frac{1}{8} C_{66} (N^2 + 14N + 8NL^2 + 9L^2 + 12), \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{NL}^{WMc} = & N + 1 + \frac{1}{2} C_{41} (2N^2 + 4N + 3) + \frac{1}{2} C_{42} (N^2 + 2N - L^2 + 1) + \\
 & + \frac{1}{2} C_{43} (2L^2 + 1) + C_{61} (N^3 + 3N^2 + 5N + 3) - \frac{1}{2} C_{64} (N^3 + 3N^2 + 2N - NL^2 - L^2 + 1) +
 \end{aligned}$$



$$C_{66}(N + NL^2 + L^2 + 1). \quad (39)$$

Как видно, энергетический спектр в обоих случаях квантования вырожден по знаку орбитального квантового момента L . Кроме того, учет вкладов недиагональных слагаемых может привести к сдвигу уровней энергии, которые отличаются значением орбитального квантового числа на четыре и шесть единиц. Поэтому ожидается, что приближенные формулы (38), (39) с удовлетворительной точностью описывают энергетический спектр нижайших состояний в окрестности стационарной точки, расположенной в начале координат.

Из сравнения формул (38), (39) для энергетических спектров можно сделать общий вывод, что правила квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя предсказывают разные величины для энергии основного состояния, которые определяются числовыми значениями параметров b , c и d .

Более конкретные заключения можно получить из сравнения результатов численных расчетов по формулам (38), (39) с точными уровнями энергии, рассчитанными для каких-либо конкретных значений параметров гамильтониана, что будет выполнено в последующем разделе этой работы.

В случаях, когда классическая система (9) является интегрируемой приближенные формулы (38), (39), выраженные непосредственно через параметры b , c и d имеют следующие виды.

1). Если имеется соотношение $c = 4d$, а параметр b не равен или равен нулю, то энергетические спектры вычисляются по формулам:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + d \left(\frac{9}{4}N^2 + \frac{9}{2}N - \frac{3}{4}L^2 + 6 \right) - d^2 \left(\frac{85}{8}N^3 + \frac{1037}{32}N^2 + \frac{1479}{16}N - \frac{187}{32}L^2 - \frac{51}{8}NL^2 + \frac{561}{8} \right) - b^2 \left(\frac{5}{8}N^2 + \frac{5}{4}N - \frac{5}{24}L^2 + \frac{5}{3} \right) + db^2 \left(\frac{125}{8}N^3 + \frac{1525}{32}N^2 + \frac{2175}{16}N - \frac{275}{32}L^2 - \frac{75}{8}NL^2 + \frac{825}{8} \right) - b^4 \left(\frac{1175}{864}N^3 + \frac{14335}{3456}N^2 + \frac{6815}{576}N - \frac{2585}{3456}L^2 - \frac{235}{288}NL^2 + \frac{2585}{288} \right), \quad (40)$$

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + d \left(\frac{9}{4}N^2 + \frac{9}{2}N - \frac{3}{4}L^2 + 3 \right) - d^2 \left(\frac{17}{8}N^3 + \frac{51}{8}N^2 + \frac{17}{4}N - \frac{51}{8}L^2 - \frac{51}{8}NL^2 \right) - b^2 \left(\frac{5}{8}N^2 + \frac{5}{4}N - \frac{5}{24}L^2 + \frac{5}{6} \right) - db^2 \left(\frac{25}{8}N^3 + \frac{75}{8}N^2 + \frac{25}{4}N - \frac{75}{8}L^2 - \frac{75}{8}NL^2 \right) + b^4 \left(\frac{235}{864}N^3 + \frac{235}{288}N^2 + \frac{235}{432}N - \frac{235}{288}L^2 - \frac{235}{288}NL^2 \right). \quad (41)$$

2). Если параметры $b = c = 0$, но параметр $d > 0$, то формулы имеют вид:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + d \left(\frac{3}{2}N^2 + 3N - \frac{1}{2}L^2 + 4 \right) - d^2 \left(\frac{17}{4}N^3 + 13N^2 + \frac{75}{2}N - 2L^2 - \frac{9}{4}NL^2 + \frac{57}{2} \right), \quad (42)$$

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + d \left(\frac{3}{2}N^2 + 3N - \frac{1}{2}L^2 + 2 \right) - d^2 \left(\frac{17}{4}N^3 + \frac{51}{4}N^2 + 19N - \frac{9}{4}L^2 - \frac{9}{4}NL^2 + \frac{21}{2} \right). \quad (43)$$



3). Если параметры $b = 0, c = -2d, d > 0$, то получаем формулы:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + d \left(\frac{9}{8}N^2 + \frac{9}{4}N - \frac{3}{8}L^2 + 3 \right) - d^2 \left(\frac{85}{32}N^3 + \frac{1037}{128}N^2 + \frac{1479}{64}N - \frac{187}{128}L^2 - \frac{51}{32}NL^2 + \frac{561}{22} \right), \quad (44)$$

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + d \left(\frac{9}{8}N^2 + \frac{9}{4}N - \frac{3}{8}L^2 + \frac{3}{2} \right) - d^2 \left(\frac{187}{32}N^3 + \frac{561}{32}N^2 + \frac{391}{16}N - \frac{153}{32}L^2 - \frac{153}{32}NL^2 + \frac{51}{4} \right), \quad (45)$$

Результаты численных расчетов и сравнения энергетических спектров. К сожалению, точного спектра, полученного, например, прямыми численными расчетами уравнения Шредингера с его квантовым аналогом исходной функции Гамильтона (9), в которой нужно произвести известную замену $p_1 \rightarrow \hat{p}_1 = -i\frac{\partial}{\partial q_1}, p_2 \rightarrow \hat{p}_2 = -i\frac{\partial}{\partial q_2}, q_1 \rightarrow \hat{q}_1 = q_1, q_2 \rightarrow \hat{q}_2 = q_2$ при произвольных значениях его параметров, в настоящее время не имеется.

Прямые численные расчеты, даже на основе лучших программных пакетов, сталкиваются с трудностью решения задач на собственные значения какой является и задача интегрирования уравнения Шредингера для двух и более независимых переменных.

Ниже приведем результаты численных расчетов энергетических спектров для конкретных числовых значений параметров b, c, d в тех случаях, когда классическая система (9) является интегрируемой.

В табл. 1 приведены значения нижайших уровней энергии, вычисленных по приближенным формулам (40) и (41) в первом случае интегрируемости, то есть при условии $c = 4d$ и $b = 0$.

Таблица 1

Сравнение энергетических уровней, полученных при квантовании по правилам Вейля-Маккоя и Борна-Йордана при значениях параметров $b = 0, c = 0.02, d = 0.005, (c = 4d)$.

| №№ | $E_{N,L}$ | E_{NL}^{BJ} | E_{NL}^{WMc} | $E_{NL}^{BJ} - E_{NL}^{WMc}$ |
|----|---------------|---------------|----------------|------------------------------|
| 1. | $E_{0,0}$ | 1.028 | 1.015 | 0.013 |
| 2. | $E_{1,\pm 1}$ | 2.055 | 2.045 | 0.010 |
| 3. | $E_{2,\pm 2}$ | 3.095 | 3.089 | 0.006 |
| 4. | $E_{2,0}$ | 3.108 | 3.106 | 0.002 |
| 5. | $E_{3,\pm 3}$ | 4.147 | 4.147 | 0.000 |
| 6. | $E_{3,\pm 1}$ | 4.172 | 4.183 | -0.010 |
| 7. | $E_{4,\pm 4}$ | 5.212 | 5.219 | -0.007 |
| 8. | $E_{4,\pm 2}$ | 5.247 | 5.273 | -0.026 |
| 9. | $E_{4,0}$ | 5.259 | 5.291 | -0.032 |



Из табл. 1 следует, что правило квантования Вейля-Маккоя приводит к более низкому уровню энергии для основного состояния и большему расщеплению уровней по орбитальному моменту при данном значении главного квантового числа N . В рассматриваемом классически интегрируемом случае точных (аналитических или численных) значений энергетического спектра в текущей литературе не обнаружено.

Однако, в результате численных расчетов известен спектр [33] во втором классическом случае интегрируемости, когда параметры квантового аналога функции Гамильтона (9) равны $b = 0$, $c = 0$, $d > 0$.

Кроме того, известны с большой точностью значения энергетического спектра одномерного ангармонического осциллятора, в частности, с четвертой степенью в потенциальной энергии (например, [34, 35]). Зная этот спектр, можно построить приближенный спектр квантового аналога исходной функции Гамильтона (9), но уже двумерного гамильтониана при значениях параметров $b = 0$, $c = -2d$, $d > 0$, при которых в классическом случае система (9) является интегрируемой.

Ниже проведем сравнение этих известных надежных численных результатов для энергетических спектров с нашими результатами, которые вычислены по формулам (42)-(45) согласно правилам квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя.

Таблица 2

Сравнение уровней энергии E_{NL}^{BJ} и E_{NL}^{WMc} с их значениями из работы [33] при $d = 0.000005$

| №№ | $2E_{N,L}$ | E_{NL}^{BJ} | E_{NL}^{WMc} | Результаты [33] |
|-----|----------------|---------------|----------------|-------------------|
| 1. | $2E_{0,0}$ | 2.00004 | 2.0000199995 | 2.000019999550022 |
| 2. | $2E_{1,\pm 1}$ | 4.00008 | 4.0000599979 | 4.000059998050135 |
| 3. | $2E_{2,\pm 2}$ | 6.00014 | 6.0001199946 | 6.000119994900454 |
| 4. | $2E_{2,0}$ | 6.00016 | 6.0001399933 | 6.000139993550605 |
| 5. | $2E_{3,\pm 3}$ | 8.00022 | 8.0001999892 | – |
| 6. | $2E_{3,\pm 1}$ | 8.00026 | 8.0002399856 | 8.000239985901665 |
| 7. | $2E_{4,\pm 4}$ | 10.00032 | 10.000299981 | – |
| 8. | $2E_{4,\pm 2}$ | 10.00038 | 10.000359974 | 10.00035997450361 |
| 9. | $2E_{4,0}$ | 10.00040 | 10.000379971 | 10.00037997225402 |
| 10. | $2E_{5,\pm 5}$ | 12.00044 | 12.000419969 | – |
| 11. | $2E_{5,\pm 3}$ | 12.00052 | 12.000499958 | – |
| 12. | $2E_{5,\pm 1}$ | 12.00056 | 12.000539953 | 12.00053995335796 |
| 13. | $2E_{6,\pm 6}$ | 14.00058 | 14.000559953 | – |
| 14. | $2E_{6,\pm 4}$ | 14.00068 | 14.000659937 | – |
| 15. | $2E_{6,\pm 2}$ | 14.00074 | 14.000719928 | 14.00071992861397 |
| 16. | $2E_{6,0}$ | 14.00076 | 14.000739925 | – |

При значениях параметров $b = 0$, $c = 0$ и $d \neq 0$ уравнение Шредингера, соответствующее классической функции Гамильтона (9), допускает разделение переменных в полярных координатах, а энергетический спектр характеризуется радиальным квантовым числом n и орбитальным моментом l . В работе [33] разработан метод численного решения радиального уравнения Шредингера, на основе которого автором проведены расчеты энергетических уровней для значений квантовых чисел равных $n, l = 0, 1$ и 2



при значении параметра $d = 0.000005$. Квантовые числа n, l связаны с нашими числами N, L следующими соотношениями: $N = 2n + l, |L| = l$.

В табл. 2 приведены величины уровней энергии, полученные в работе [33], а также их значения, рассчитанные при том же значении параметра d по формулам (42) и (43) на основе квантования классической нормальной формы, соответственно, но правилам Борна-Йордапа и Вейля-Маккоя. Из нее видно, что очень хорошее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля-Маккоя. В частности, энергия основного состояния, полученная на основе квантования Вейля-Маккоя отличается от результата из работы [33] на $0.5 \cdot 10^{-7}\%$, а при квантовании по правилу Борна-Йордана – на 0.001% . В тоже время, для энергии 14 уровня эти погрешности равны, соответственно, $0.4 \cdot 10^{-8}\%$ и 0.0001% , то есть предсказание по правилу Борна-Йордана улучшается.

В третьем случае ($b = 0, c = -2d, d \neq 0$) интегрируемости классической системы (9) при ее квантовомеханическом описании необходимо решить следующее двумерное уравнение Шредингера

$$(\hat{H}_1 + \hat{H}_2)\psi = 2E\psi, \quad \hat{H}_k = -\frac{d^2}{dq_k^2} + q_k^2 + 2dq_k^A, \quad k = 1, 2, \quad (46)$$

где переменные разделены. Поэтому его решение сводится к решению двух одинаковых одномерных уравнений для ангармонического осциллятора, а энергетический спектр находится в виде следующей суммы $2E = 2E_1 + 2E_2$.

Квантовые числа изотропного двумерного осциллятора (N, L) связаны с квантовыми числами (n_1, n_2) одномерных осцилляторов следующими соотношениями: $N = n_1 + n_2$ и $L = n_1 - n_2$. Заметим, что упорядочение значений уровней энергетического спектра по величине квантовых чисел (N, L) по сравнению с другой нумерацией состояний имеет то преимущество, что значения уровней энергетического спектра, пронумерованные квантовыми числами (N, L) , растут с увеличением главного квантового числа.

Используя численные результаты работ [34] и [35] для квантового одномерного ангармонического осциллятора, нами была вычислена нижняя часть энергетического спектра двумерного уравнения Шредингера (46), представленная в последнем столбце табл. 3. В этой же таблице приведены значения уровней энергий E_{NL}^{BJ} и E_{NL}^{WMc} , полученных по формулам (44) и (45). Заметим, что численные значения энергетического спектра, полученные в работе [34], для первых десяти уровней совпадают с результатами более поздней работы [35] до 13 знаков после десятичной точки.

В табл. 3. приведены значения первых уровней энергии, вычисленных с использованием данных работ [34], [35] для одномерного ангармонического осциллятора, а также по формулам (44) и (45), полученных в результате квантования нормальной формы, соответственно, но правилам Борна-Йордана и Вейля-Маккоя. И в этом случае лучшее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля-Маккоя, однако с увеличением величины квантовых чисел погрешность для значений E_{NL}^{BJ} уменьшается, то есть для больших квантовых чисел расхождение между значениями E_{NL}^{WMc} и E_{NL}^{BJ} уменьшается.



Выводы. В работе исследована предложенная авторами классическая система (9), которая имеет ряд отличительных свойств, выраженных в характере стационарных точек и наличии отрицательной гауссовой кривизны ее поверхности потенциальной энергии. Показано, что, в общем случае, система является неинтегрируемой, и в ней реализуется динамический хаос. При определенных значениях параметров система является интегрируемой и для них получены интегралы движения.

Таблица 3

Сравнение полученных нами величин энергий для двумерного изотропного осциллятора при значениях параметров $b = 0$, $c = -2d$, $d = 0.0005$.

| №№ | $2E_{N,L}$ | E_{NL}^{BJ} | E_{NL}^{WMc} | Из работ [34],[35] |
|-----|----------------|---------------|----------------|--------------------|
| 1. | $2E_{0,0}$ | 2.002 | 2.001493 | 2.001497 |
| 2. | $2E_{1,\pm 1}$ | 4.006 | 4.00447 | 4.004488 |
| 3. | $2E_{2,\pm 2}$ | 6.010 | 6.009 | 6.010460 |
| 4. | $2E_{2,0}$ | 6.012 | 6.010 | 6.007479 |
| 5. | $2E_{3,\pm 3}$ | 8.016 | 8.015 | 8.019401 |
| 6. | $2E_{3,\pm 1}$ | 8.019 | 8.018 | 8.013451 |
| 7. | $2E_{4,\pm 4}$ | 10.024 | 10.022 | 10.031298 |
| 8. | $2E_{4,\pm 2}$ | 10.028 | 10.027 | 10.022392 |
| 9. | $2E_{4,0}$ | 10.030 | 10.028 | 10.019423 |
| 10. | $2E_{5,\pm 5}$ | 12.033 | 12.031 | 12.046139 |
| 11. | $2E_{5,\pm 3}$ | 12.039 | 12.037 | 12.034289 |
| 12. | $2E_{5,\pm 1}$ | 12.042 | 12.040 | 12.028364 |

Для изучаемой системы получена классическая нормальная форма в подходе Биркгофа-Густавсона, для которой построены ее квантовые аналоги согласно правилам квантования Борна-Йордана и Вейля-Маккоя. Для этих квантовых аналогов, которые являются приближенными выражениями для точного оператора Шредингера, была решена задача на собственные значения и найдены формулы энергетических спектров. По этим формулам, в двух частных случаях, были выполнены расчеты нижних энергетических уровней и проведено сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе данными других авторов. Обнаружено, что наилучшее и хорошее согласие с известными результатами расчета энергетического спектра имеется при использовании правила квантования Вейля-Маккоя, но сравнению с правилом Борна-Йордана.

Литература

1. Биркгоф Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф. – Москва-Ижевск: РХД, 2002. – 406 с.
2. Gustavson F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point // Astronom. J. – 1966. – 71. – №8. – P.670-686.
3. Hori G. Theory of general perturbation with unspecified canonical variable // J. Japan Astron. Soc. – 1966. – 18. – P.287-296.
4. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter // Celest. Mech. – 1969. – 1. – №1. – P.12-30.
5. Basios V., Chekanov N.A., Markovski B.L., Rostovtsev V.A., Vinitsky S.I. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians // Comp. Phys. Commun. – 1995. – 90. – P.355-368.



6. Ukolov Yu.A., Chekanov N.A., Gusev A.A., Rostovtsev V.A., Vinitzky S.I., Uwano Y. LINA01: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians // *Comp.Phys.Commun.* – 2005. – 166. – №1. – P.66-80.
7. А.А. Гусев, Н.А. Чеканов, В.А. Ростовцев, С.И. Веницкий, И. Увано Сравнение алгоритмов для нормализации и квантования полиномиальных гамильтонианов // *Программирование.* – 2004. – №30. – С.27-36.
8. Найфе А. Методы возмущений / М.: Мир, 1976. – 456 с.
9. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / М.: Наука, 1979. – 320 с.
10. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике / М.: Наука, 1978. – 312 с.
11. Журавлев В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // *ПММ.* – 2002. – 66. – Вып.3. – С.356-365.
12. Петров А.Г. Асимптотические методы решения уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований // *Дифференциальные уравнения.* – 2004. – 40. – №5. – С.626-638.
13. А.Д. Брюно, А.Г. Петров О вычислении нормальной формы // *Докл. РАН.* – 2006. – 410. – № 3. – С.1-5.
14. Heisenberg W. Uber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen // *Zeits. fur Phys.* – 1925. – 33. – P.879-93. (Имеется пер. с нем. Гейзенберг В. О квантотеоретическом истолковании кинематических и механических соотношений // *УФН.* – 1977. – №122. – Вып.8. – С.574-586.
15. M. Born, P. Jordan Zur Quantenmechanik // *Zeits. fur Phys.* – 1925. – 34. – P.858-888. (Имеется пер. с нем. М. Борн, П. Йордан О квантовой механике // *УФН.* – 1977. – №122. – Вып.8. – С.586-611.
16. Dirac P.A.M. Fundamental Equations of Quantum Mechanics // *Proc. Roy Soc. (Lnd.).* – 1925. – A109. – №A752. – P.642-653. (Имеется пер. с англ. Дирак П.А.М. Основные уравнения квантовой механики // *УФН.* – 1977. – №122. – Вып.8. – С.611-621).
17. Weyl H. Quantenmechanik und Gruppentheorie // *Zeits. fur Phys.* – 1927. – 46. – S.1-46.
18. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 496 с. (см. Гл. IV, параграф 14).
19. McCoy N.H. On the function in quantum mechanics which corresponds to a given function in classical mechanics // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 1932. – 18. – P.674-676.
20. De Groot S.R., L.G. Suttorp. Foundations of Electrodynamics / Amsterdam: North-Holland publishing company, 1972. – 535 p.
21. Argyers A.N. The Bohr-Sommerfeld quantization rule and the Weyl correspondence // *Physics.* – 1965. – 2. – P.131.
22. Castellani L. Quantization rules and Dirac's correspondence // *Il Nuovo Cimento.* – 1978. – A48. – P.359-68.
23. Crehan P. The parametrisation of quantisation rules equivalent to operator orderings, and the effect of different rules on the physical spectrum // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1989. – 22. – P.811-822.
24. Crehan P. The proper quantum analogue of the Birkhoff-Gustavson method of normal forms // *J.Phys. A: Math. Gen.* – 1990. – 23. – №24. – P.5815-5828.
25. Fedak W.A., J.J. Prentis The 1925 Born and Jordan paper 'On quantum mechanics' // *Am. J. Phys.* – 2009. – 77. – P.128-139.
26. Gosson M.A. Born–Jordan quantization and the uncertainty principle // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2013. – 46. – P.445301, (17 pp).
27. Razavy M. Heisenberg's quantum mechanics / Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011. – 678 p.



28. Чеканов Н.А., И.К. Кириченко, В.Е. Богачев, Н.Н. Чеканова Компьютерные расчеты динамических свойств для одной модели классической системы с двумя степенями свободы // Научные ведомости БелГУ, сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2014. – №1(172); 29/1. – С.94-99.
29. Bolotin Yu.L., N.A. Chekanov, V.Yu. Gonchar, V.N. Tarasov The transition regularity–chaos–regularity and statistical properties of energy spectra // Physics Letters. – 1989. – A135. – P.29-32.
30. Болотин Ю.Л. и др. Стохастическая ядерная динамика // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1989. – 20. – Вып.4. – С.878-929.
31. Чеканов Н.А. Квантование нормальной формы Биркгофа-Густавсона // Ядерная физика. – 1989. – 50. – Вып.8. – С.344-346.
32. Чеканова Н.Н., И.К. Кириченко, В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов Классический и квантовый подход в исследовании нелинейной гамильтоновой системы // Вестник ТамбГУ. Сер. Естественные и технические науки. – 2015. – 20. – Вып.1. – С.120-137.
33. Taseli H. On the Exact Solution of the Schrodinger Equation with a Quartic Anharmonicity // International Journal of Quantum Chemistry. - 1996. - 57. - P.63-71.
34. Banerjee K. General anharmonic oscillator // Proc. R. Soc. - 1978. - A364. - P.265-275.
35. Taseli H., M. Demiralp Studies on algebraic methods to solve linear eigenvalue problems: generalised anharmonic oscillators // J. Phys. A: Math. Gen., 1988. – 21. – P.3903-3919.
36. Kauffmann S.K. Unambiguous quantization from the maximum classical correspondence that is self-consistent: the slightly stronger canonical commutation rule Dirac missed // Found. Phys. - 2011. – 41. – P.805-918.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF QUANTIZATIONS
OF THE CLASSICAL TWO-DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEM
ACCORDING TO WEYL-MCCOY's AND BORN-JORDAN's RULES**

N.N. Chekanova^{1,2)}, I.K. Kirichenko²⁾, N.A. Chekanov^{3,4)}

¹⁾Kharkov Institute of Banking,

Pobedy av., 55, 61174, Kharkov, Ukraine, e-mail: Chekanova76@list.ru

²⁾Ukrainian Engineering Pedagogics Academy,

Universitetskaj str., 16, 61003, Kharkov, Ukraine, e-mail: ikir238@rambler.ru,

³⁾Belgorod Law Institute of the Ministry of the Interior of the Russian Federation,
Gorky str., 71, 308024, Belgorod, Russia, e-mail: Chekanov@bsu.edu.ru,

⁴⁾Belgorod State National Research University,
Pobedy str., 85, 308015, Belgorod, Russia

Abstract. The conservative classical Hamiltonian system with two degrees of freedom is investigated. On the basis of the numerical calculations of Poincare sections it is shown that, in general, the system is nonintegrable, and there is the dynamic chaos, as well as, transition regularity – chaos – regularity. However, there are some conditions under which the system is integrable. It is found that in the integrable case the potential energy surface contains regions with negative Gaussian curvature. The classical normal form is constructed and according to the Born-Jordan and the Weyl-McCoy quantization rules its quantum analogues are built. The eigenvalue problem is solved for them and the approximate formulas for the energy spectrum are found. Numerical calculations of lower energy levels for concrete values of the parameters in these formulas are performed.

Key words: hamiltonian system, normal form, quantization rules, energy spectrum, computer modeling.