MSC 81P20

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ. 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Конструируется гауссовское случайное поле, описывающее стохастическое электромагнитное ноле в диэлектрической среде, связанное с ее тепловыми флуктуациями. Случайное поле порождается стохастической динамической системой, эволюционными уравнениями которой являются уравнения Максвелла с аддитивным шумом.

Ключевые слова: стохастическое электромагнитное поле, гауссовское поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция.

1. Постановка задачи. В предыдущей публикации авторов была поставлена задача о построении подходящей модели стохастического электромагнитного ноля для математического описания тепловых электромагнитных флуктуаций при решении теоретических задач, связанных с переносом излучения в твердотельной среде. Теоретический подход, основанный па построении вероятностных моделей для описания тепловых флуктуаций электромагнитного ноля был ранее предложен в [2, 3]. В рамках такого полуфеноменологического подхода не учитываются конкретные микроскопические механизмы, посредством которых осуществляется перенос излучения, однако, оп позволяет описывать теплоперенос внутри среды посредством излучения уже с учетом его волновых свойств, в отличие от традиционной теории переноса излучения, основанной на представлениях геометрической оптики (см., например, [4]). В работе [1] нами была построена, по нашему мнению, одна из простейших моделей стохастического электромагнитного ноля, в рамках которой допустимо статистическое изучение радиационно-кондуктивного теплообмена в твердых диэлектриках. Стохастическое электромагнитное ноле в этой модели определяется как решение системы стохастических дифференциальных уравнений Максвелла, в котором имеются распределенные стохастические источники, но своему физическому смыслу, описывающие на микроуровне флуктуационные электрические токи. В этом случае статистические свойства стохастического электромагнитного ноля полностью определяются статистическими свойствами плотности флуктуационного электрического тока. Ввиду линейности уравнений Максвелла, стохастические дифференциальные уравнения, определяющие ноле, являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Тогда, так как стохастические источники описываются гауссовским случайным нолем, то случайное ноле, определяемое решениями уравнений Максвелла, также является гауссовским. Более того, оно обладает нулевым средним значением. Распределение вероятностей такого ноля полностью определяется набором всех возможных парных корреляционных функций. В настоящей, второй части работы мы вычислим эти корреляционные функции. При этом мы будем существенно использовать результаты первой части и ссылаться в тексте па выписанные в пей формулы, необходимые в процессе изложения. Эти ссылки мы будем давать в скобках номерами формул из первой части и сопровождать его меткой I.

2. Вычисление корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle$. Имея явные выражения из первой части работы для траекторий процесса, мы в состоянии подсчитать корреляционные функции электромагнитного поля. Ввиду определения флуктуационного тока (см. (12), (15), I), имеем $\langle \tilde{\tilde{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k}, s)\rangle = 0$. Парные же корреляционные функции поперечного тока $\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k}, t)$ определяются корреляционными функциями поля $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$,

$$\langle \psi_{l_1}(\mathbf{k}_1)\psi_{l_2}(\mathbf{k}_2)\rangle = L_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,, \quad \langle \psi_{l_1}(\mathbf{k}_1)\psi^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\rangle = K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,.$$

Ввиду свойства $\boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\psi}(-\mathbf{k})$, имеющего место с вероятностью единица, эти корреляционные функции не являются независимыми, а, наоборот, выполняется соотношение

$$L_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2)\,.$$

Поэтому, в дальнейшем, мы будем использовать только корреляционную функцию $K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и, соответственно, корреляционную функцию $\langle \tilde{\tilde{j}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\tilde{j}}_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle$, которая, ввиду (12), равна

$$\langle \tilde{\tilde{j}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\tilde{j}}_{l_2}{}^*(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle = \delta(t_1 - t_2) K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,. \tag{1}$$

Вычислим корреляционную функцию поперечного тока

$$\langle (\tilde{\tilde{j}}_\perp)_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)(\tilde{\tilde{j}}_\perp)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle = \delta(s_1 - s_2) K^\perp_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,,$$

где, согласно определению (см. (15), I), имеем

$$K^\perp_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left[\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2\right]^{-1} \left\langle \left[\,\mathbf{k}_1, \left[\,\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)\right]\right]_{l_1} \left[\,\mathbf{k}_2, \left[\,\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{k}_2)\right]\right]_{l_2} \right\rangle.$$

Выполняя вычисления согласно правилам тензорной алгебры, получим выражение

$$K^\perp_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left(\delta_{l_1 m_1} - \frac{(\mathbf{k}_1)_{l_1}(\mathbf{k}_1)_{m_1}}{\mathbf{k}_1^2}\right)\left(\delta_{l_2 m_2} - \frac{(\mathbf{k}_2)_{l_2}(\mathbf{k}_2)_{m_2}}{\mathbf{k}_2^2}\right) K_{m_1 m_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,. \tag{2}$$

Приступим к вычислению корреляционных функций $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle$, $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle$, $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle$. Начнем с первой корреляционной функции из этого списка. Согласно формулам, определяющим решение стохастических уравнений движения (см. (24), I),

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_1} \big(\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1)\tilde{\tilde{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k}_1, s_1)\big)_{l_1} ds_1 \Big] \times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\big(\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k}_2,s_2)\big)^*_{l_2}ds_2\Big]\Big\rangle\ .$$

Принимая во внимание равенство нулю среднего значение тока,

$$\langle\bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle=$$

$$=\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\big)^*_{l_2m_2}\big(\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\big)^*_{l_2m_2}\big(\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle+$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s_1)\int_0^{t_2}\mathsf{S}^{(E)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\langle\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle ds_1ds_2\,.$$

Далее, не ограничивая общности, ввиду симметрии выражений относительно перестановок значений индексов 1 и 2, будем полагать, что $t_2>t_1$. Используя (1), преобразуем это выражение,

$$\langle\bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle=$$

$$=\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\big)_{l_2m_2}\big(\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{m_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\big)_{l_2m_2}\big(\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{m_2}(\mathbf{k}_2)\Big]^*\Big\rangle+$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2K^\perp_{m_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(E)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds \qquad (3)$$

Подставляя явные выражения (см.(26), (28), I) для операторов $\mathsf{S}^{(E)}(t)$, $\mathsf{S}^{(EH)}(t)$, вычислим последний интеграл в последней формуле.

$$\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(E)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds=\frac{\delta_{l_1m_1}}{2r(\mathbf{k}_1)}\cdot\frac{\delta_{l_2m_2}}{2r^*(\mathbf{k}_2)}\times$$

$$\times\Big[r_+(\mathbf{k}_1)r^*_+(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\ +$$

$$+\ r_-(\mathbf{k}_1)r^*_-(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\ -$$

$$-\ r_+(\mathbf{k}_1)r^*_-(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\ -$$

$$-\ r_-(\mathbf{k}_1)r^*_+(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)+r_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)\big)ds\Big]. \qquad (4)$$

Интегралы, входящие в это выражение вычисляются явно,

$$\int_0^{t_1}\exp\big(r_\alpha(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_\beta(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds=$$

$$= \exp\left(r^*_\beta(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)\right)\int_0^{t_1}\exp\left[\left(r_\alpha(\mathbf{k}_1)+r^*_\beta(\mathbf{k}_2)\right)(t_1-s)\right]ds =$$

$$= -\frac{e^{r^*_\beta(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_\alpha(\mathbf{k}_1)+r^*_\beta(\mathbf{k}_2)}\left(1-e^{\left(r_\alpha(\mathbf{k}_1)+r^*_\beta(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right), \quad (5)$$

где введены обозначения $\alpha, \beta \in \{\pm\}$.

Заметим, что $\operatorname{Re} r_\pm(\mathbf{k}_i) < 0$, $i=1,2$. Это становится очевидным после подстановки явных выражений для $r_\pm(\mathbf{k}_i)$, $i=1,2$,

$$r_\pm(\mathbf{k}_i) = -\frac{\gamma}{2} \pm \left[\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - a^2\mathbf{k}_i^2\right]^{1/2}.$$

В связи с этим, существуют предельные значения для вычисленных интегралов при $t_1\to\infty$, $t_2-t_1=\text{const}$, равные

$$\lim_{\substack{t_1\to\infty,\\ t_2-t_1=\text{const}}}\int_0^{t_1}\exp\left(r_\alpha(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_\beta(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\right)ds = -\frac{e^{r^*_\beta(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_\alpha(\mathbf{k}_1)+r^*_\beta(\mathbf{k}_2)}. \quad (6)$$

Подставим результаты вычислений в формулу для корреляционной функции (3)

$$\langle \bar F_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar F^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle\Big[\left(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\right)_{l_1m_1}\left(\bar{\mathbf{F}}_0\right)_{m_1}(\mathbf{k}_1)+\left(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\right)_{l_1m_1}\left(\bar{\mathbf{H}}_0\right)_{m_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\left(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\right)_{l_2m_2}\left(\bar{\mathbf{F}}_0\right)_{m_2}(\mathbf{k}_2)+\left(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\right)_{l_2m_2}\left(\bar{\mathbf{H}}_0\right)_{m_2}(\mathbf{k}_2)\Big]^*\Big\rangle -$$

$$-\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\frac{K^\perp_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{4r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)}\left[\frac{r_+(\mathbf{k}_1)r^*_+(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)}e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\left(1-e^{\left(r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)+\right.$$

$$+\frac{r^*_-(\mathbf{k}_2)r_-(\mathbf{k}_1)}{r^*_-(\mathbf{k}_2)+r_-(\mathbf{k}_1)}e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\left(1-e^{\left(r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)-$$

$$-\frac{r_-(\mathbf{k}_1)r^*_+(\mathbf{k}_2)}{r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)}e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\left(1-e^{\left(r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)-$$

$$\left.-\frac{r_+(\mathbf{k}_1)r^*_-(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)}e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\left(1-e^{\left(r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)\right]. \quad (7)$$

Полученная формула дает выражение для корреляционной функции $\langle \bar F_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar F^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2. Однако, для физических приложений, особый интерес представляет ее выражение в пределе при $t_1\to\infty$, $t_2-t_1=\text{const}$, $t_2>t_1$. Это важно во всех задачах, в которых электромагнитное поле (в данном случае стохастическое) обладает очень большой типичной частотой.

При таком предельном переходе, с математической точки зрения, изучаемый гауссовский случайный процесс флуктуационных электромагнитных колебаний приближается к стационарному гауссовскому случайному процессу.

Перейдем в полученном выражении (7) к указанному пределу, то есть получим корреляционную функцию $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle$ для стационарного случайного процесса стохастического электромагнитного поля. Так как $r_\pm(\mathbf{k}_i) < 0$, $i = 1, 2$, то из формул ((26), (28), I) следует, что $\big(\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1)\big)_{lm} \to 0$, $\big(\mathsf{S}^{(EH)}(\mathbf{k}_1, t_1)\big)_{lm} \to 0$ при $t_1 \to \infty$. Тогда из (7) получаем предельную корреляционную функцию, которую мы пометим нижним индексом ∞,

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle_\infty =$$

$$= \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K^\perp_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{4r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \left[\left(\frac{r_-(\mathbf{k}_1)r^*_+(\mathbf{k}_2)}{r_-(\mathbf{k}_1) + r^*_+(\mathbf{k}_2)} - \frac{r_+(\mathbf{k}_1)r^*_+(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1) + r^*_+(\mathbf{k}_2)}\right) e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_+(\mathbf{k}_1)r^*_-(\mathbf{k}_2)}{r_+(\mathbf{k}_1) + r^*_-(\mathbf{k}_2)} - \frac{r^*_-(\mathbf{k}_2)r_-(\mathbf{k}_1)}{r^*_-(\mathbf{k}_2) + r_-(\mathbf{k}_1)}\right) e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}\right],$$

либо, после сложения коэффициентов с применением тождеств

$$\Big(r_-(\mathbf{k}_1) + r^*_+(\mathbf{k}_2)\Big)\Big(r_+(\mathbf{k}_1) + r^*_+(\mathbf{k}_2)\Big) = \gamma^2 - 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2),$$

$$\Big(r_+(\mathbf{k}_1) + r^*_-(\mathbf{k}_2)\Big)\Big(r_-(\mathbf{k}_1) + r^*_-(\mathbf{k}_2)\Big) = \gamma^2 + 2\gamma r(\mathbf{k}_1) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2),$$

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{F}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle_\infty =$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K^\perp_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{r^*(\mathbf{k}_2)} \left[\frac{r^{2\,*}_-(\mathbf{k}_2)e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{\gamma^2 + 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} - \frac{r^{2\,*}_+(\mathbf{k}_2)e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{\gamma^2 - 2\gamma r^*(\mathbf{k}_2) + a^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)}\right]. \tag{8}$$

В частном случае, когда флуктуационное электромагнитное поле физически пространственно-однородно, нужно считать, что в конструируемой модели случайное электромагнитное поле стохастически трансляционно-инвариантно. Это связано со стохастической трансляционной инвариантностью флуктуационного тока. Поэтому должна быть трансляционно инвариантной его корреляционная функция, $K_{l_1 l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)K(\mathbf{k}_1)$. Полагая для такой корреляционной функции в формуле (8) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'$, $l = l_1$, $l_2 = l'$, $t_1 = t$, $t_2 = t'$, и приводя к общему знаменателю выражения в скобках с учетом $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, имеем

$$\langle \bar{F}_l(\mathbf{k}, t)\bar{F}^*_{l'}(\mathbf{k}', t')\rangle_\infty =$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^2 \gamma^{-1} K^\perp_{ll'}(\mathbf{k}) \left[\mathrm{ch}\big(r(\mathbf{k})(t' - t)\big) - \frac{\gamma}{2r(\mathbf{k})}\,\mathrm{sh}\big(r(\mathbf{k})(t' - t)\big)\right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{9}$$

3. Вычисление корреляционной функции $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k},t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}',t_2)\rangle$. Ввиду определения флуктуационного тока (см. (12), (15), I), имеем $\langle\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k},s)\rangle = 0$. Парные же корреляционные функции поперечного тока $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k},t)$ определяются формулой

$$\langle(\tilde{\bar{j}}_\perp)_{l_1}(\mathbf{k}_1,s_1)(\tilde{\bar{j}}_\perp)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle = \delta(s_1-s_2)K^\perp_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\,,$$

где $K^\perp_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ выражается посредством (2) через парную корреляционную функцию поля $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})$.

Так как случайные траектории поля $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ определяются как

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) = \mathsf{S}^{(HE)}(\mathbf{k},t)\bar{\mathbf{F}}_0(\mathbf{k}) + \mathsf{S}^{(H)}(\mathbf{k},t)\bar{\mathbf{H}}_0(\mathbf{k}) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathsf{S}^{(HE)}(\mathbf{k},t-s)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k},s)ds\,, \qquad (10)$$

то корреляционная функция $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle$ дается следующей формулой

$$\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0 + \mathsf{S}^{(H)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1-s_1)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(s_1)\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)ds_1\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0 + \mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2-s_2)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(s_2)\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)ds_2\Big]\Big\rangle.$$

Принимая во внимание равенство нулю среднего значение тока,

$$\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle +$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\int\limits_0^{t_1}\mathsf{S}^{(HE)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s_1)\int\limits_0^{t_2}\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\langle\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle ds_1ds_2\,.$$

Далее, не ограничивая общности, ввиду симметрии выражений относительно перестановок значений индексов 1 и 2, будем полагать, что $t_2 > t_1$. Используя (10), преобразуем это выражение к виду

$$\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle +$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 K^{\perp}_{m_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(HE)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds\,. \tag{11}$$

Запишем явное выражение для эволюционной матрицы $\mathsf{S}^{(HE)}_{lm}(\mathbf{k},t)$ (см. (28), I):

$$\mathsf{S}^{(HE)}_{lm}(\mathbf{k},t)=-i\frac{a^2\varepsilon}{2r(\mathbf{k})c}\Big(\exp\big(r_+(\mathbf{k})t\big)-\exp\big(r_-(\mathbf{k})t\big)\Big)\epsilon_{lnm}k_n\,.$$

Подставляя явные выражения для операторов $\mathsf{S}^{(HE)}(t)$, $\mathsf{S}^{(H)}(t)$, вычислим интеграл в последней формуле:

$$\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(HE)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds=\frac{a^4\varepsilon^2}{4c^2}\cdot\frac{\epsilon_{l_1m_1n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1}\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}}{r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)}\times$$

$$\times\Big[\int_0^{t_1}\exp\big(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\;+$$

$$+\int_0^{t_1}\exp\big(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\;-$$

$$-\int_0^{t_1}\exp\big(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\;-$$

$$-\int_0^{t_1}\exp\big(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\Big]\,. \tag{12}$$

Используя явные выражения для интегралов, запишем формулу (11) для корреляционной функции в виде

$$\langle\bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle=$$

$$=\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle-$$

$$-\left(\frac{2\pi a^2}{c}\right)^2\frac{K^{\perp}_{m_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)}\epsilon_{l_1m_1n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1}\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}\times$$

$$\times\left[\frac{e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)}\Big(1-e^{\left(r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\Big)+\right.$$

$$+\frac{e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r^*_-(\mathbf{k}_2)+r_-(\mathbf{k}_1)}\Big(1-e^{\left(r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\Big)-$$

$$-\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_-(\mathbf{k}_1)+r_+^*(\mathbf{k}_2)}\left(1-e^{\left(r_-(\mathbf{k}_1)+r_+^*(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)-$$

$$\left.-\frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1)+r_-^*(\mathbf{k}_2)}\left(1-e^{\left(r_+(\mathbf{k}_1)+r_-^*(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)\right] . \qquad (13)$$

Эта формула дает выражение для корреляционной функции $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2. Однако, как и ранее, для нас является выражение для корреляционной функции в пределе при $t_1\to\infty$, $t_2-t_1=\mathrm{const}$, $t_2>t_1$, когда происходит переход стационарному гауссовскому случайному процессу, описывающему флуктуационное электромагнитное ноле.

Перейдем в формуле (13) к указанному пределу, то есть получим корреляционную функцию $\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$ для стационарного стохастического электромагнитного поля. Так как $r_\pm(\mathbf{k}_i)<0$, $i=1,2$, то $\left(\mathsf{S}^{(HE)}(\mathbf{k}_1,t_1)\right)_{lm}\to 0$, $\left(\mathsf{S}^{(H)}(\mathbf{k}_1,t_1)\right)_{lm}\to 0$ при $t_1\to\infty$. Тогда из (13) получаем предельную корреляционную функцию, которую мы пометим нижним индексом ∞,

$$\langle \bar{H}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle_\infty = 2\left(\frac{2\pi a^2}{c}\right)^2\frac{K^\perp_{m_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{r^*(\mathbf{k}_2)}\,\epsilon_{l_1m_1n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1}\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}\times$$

$$\times\left[\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2-2\gamma r^*(\mathbf{k}_2)+a^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}-\frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_1)(t_2-t_1)}}{\gamma^2+2\gamma r^*(\mathbf{k}_2)+a^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}\right] . \qquad (14)$$

Для стохастически трансляционно-инвариантного электромагнитного поля, в терминах обозначений предыдущего раздела, когда $K_{ll'}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\equiv\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')K_{ll'}(\mathbf{k})$, эта формула превращается в следующую:

$$\langle \bar{H}_l(\mathbf{k},t)\bar{H}^*_{l'}(\mathbf{k}',t')\rangle_\infty = 2\left(\frac{2\pi a}{c}\right)^2\frac{e^{-\gamma(t'-t)/2}}{\gamma\mathbf{k}^2}\,K^\perp_{mm'}(\mathbf{k})\,\epsilon_{lmn}k_n\,\epsilon_{l'm'n'}k_{n'}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\times$$

$$\times\left[\mathrm{ch}\left(r(\mathbf{k})(t'-t)\right)+\frac{\gamma}{2r(\mathbf{k})}\,\mathrm{sh}\left(r(\mathbf{k})(t'-t)\right)\right] . \qquad (15)$$

4. Вычисление корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k},t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}',t_2)\rangle$. Как и в предыдущих разделах, используя формулы для траекторий поля $\bar{F}_l(\mathbf{k},t)$:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t)=\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k},t)\bar{\mathbf{F}}_0(\mathbf{k})+\mathsf{S}^{(EH)}(\mathbf{k},t)\bar{\mathbf{H}}_0(\mathbf{k})-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mathsf{S}(\mathbf{k},t-s)\bar{\tilde{\mathbf{j}}}_\perp(\mathbf{k},s)ds$$

и (10) – для поля $\bar{H}_l(\mathbf{k},t)$, запишем выражение для корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle$:

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0 + \mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0 \big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_1} \big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1 - s_1)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(s_1) \big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) ds_1 \Big] \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0 + \mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0 \big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2} \big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2 - s_2)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp(s_2) \big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) ds_2 \Big] \Big\rangle .$$

Выполняя точно такие же преобразования, имеем

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0 \big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0 \big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \Big] \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0 \big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0 \big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) \Big] \Big\rangle +$$

$$+ \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 \int\limits_0^{t_1} \mathsf{S}^{(E)}_{l_1 m_1}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1) \int\limits_0^{t_2} \mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2 m_2}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \langle \big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle ds_1 ds_2 .$$

При $t_2 > t_1$, после подстановки явного выражения для корреляционной функции поперечной плотности тока, имеем

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0 \big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0 \big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) \Big] \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0 \big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0 \big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) \Big] \Big\rangle +$$

$$+ \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 K^\perp_{m_1 m_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int_0^{t_1} \mathsf{S}^{(E)}_{l_1 m_1}(\mathbf{k}_1, t_1 - s)\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2 m_2}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds \,, \qquad (16)$$

Подставляя явные выражения для матричных элементов эволюционных операторов, вычислим интеграл в этой формуле:

$$\int_0^{t_1} \mathsf{S}^{(E)}_{l_1 m_1}(\mathbf{k}_1, t_1 - s)\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2 m_2}(\mathbf{k}_2, t_2 - s) ds = \frac{ia^2\varepsilon}{4cr(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \cdot \delta_{l_1 m_1} e_{l_2 n_2 m_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} \times$$

$$\times \Big[r_+(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp\big(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s) \big) ds \; +$$

$$+ \; r_-(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp\big(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s) \big) ds \; -$$

$$- \, r_-(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp\big(r_-(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - s) \big) ds \; -$$

$$- \; r_+(\mathbf{k}_1) \int_0^{t_1} \exp\big(r_+(\mathbf{k}_1)(t_1 - s) + r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - s) \big) ds \Big] .$$

На основе явных выражений для интегралов, находим формулу для искомой корреляционной функции в виде

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big] \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle +$$

$$+ \frac{i(2\pi a)^2}{c\varepsilon r(\mathbf{k}_1)r^*(\mathbf{k}_2)} \cdot \epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} K^{\perp}_{l_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) \times$$

$$\times \left[\frac{r_+(\mathbf{k}_1)e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)}\left(1-e^{\left(r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{r_-(\mathbf{k}_1)e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r^*_-(\mathbf{k}_2)+r_-(\mathbf{k}_1)}\left(1-e^{\left(r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) -$$

$$- \frac{r_-(\mathbf{k}_1)e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)}\left(1-e^{\left(r_-(\mathbf{k}_1)+r^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) -$$

$$\left. - \frac{r_+(\mathbf{k}_1)e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)}\left(1-e^{\left(r_+(\mathbf{k}_1)+r^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right)\right]. \qquad (17)$$

Эта формула дает выражение для корреляционной функции $\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2.

Выражение для корреляционной функции в пределе при $t_1 \to \infty$, $t_2-t_1 = \mathrm{const}$, $t_2 > t_1$, соответствующее стационарному гауссовскому случайному процессу, описывающему флуктуационное электромагнитное поле, которое отметим индексом ∞, имеет вид

$$\langle \bar{F}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle_\infty = -\frac{8i\pi^2a^2}{c\varepsilon r^*(\mathbf{k}_2)} \cdot \epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} K^{\perp}_{l_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) \times$$

$$\times \left[\frac{r^*_+(\mathbf{k}_2)e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2-2\gamma r^*(\mathbf{k}_2)+a^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)} - \frac{r^*_-(\mathbf{k}_2)e^{r^*_-(\mathbf{k}_1)(t_2-t_1)}}{\gamma^2+2\gamma r^*(\mathbf{k}_2)+a^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}\right]. \qquad (18)$$

Для стохастически трансляционно-инвариантного электромагнитного поля при $K_{ll'}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \equiv \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')K_{ll'}(\mathbf{k})$, в терминах тех же обозначений, что и ранее, имеем

$$\langle \bar{F}_l(\mathbf{k},t)\bar{H}^*_{l'}(\mathbf{k}',t')\rangle_\infty = -\frac{8i\pi^2a^2}{c\gamma\varepsilon} \cdot e^{-\gamma(t'-t)/2} \cdot \frac{\mathrm{sh}\big(r(\mathbf{k})(t'-t)\big)}{r(\mathbf{k})} K^{\perp}_{lm}(\mathbf{k})\epsilon_{l'mn}(\mathbf{k})_n\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \quad (19)$$

5. Вычисление корреляционной функции $\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}',t_2)\rangle$. Для завершения вычисления основных статистических характеристик модели стохастического электромагнитного поля в твердотельных диэлектриках, учитывающей тепловые колебания твердого основа (в частности, узлов кристаллической решетки), нам нужно вычислить корреляционные функции связанные с наличием продольной составляющей электрического поля (см. (8) и (13),I).

$$\big(\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t),\mathbf{k}\big) = -\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\,, \quad \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) - \frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\,. \tag{20}$$

Здесь случайный процесс $\bar{\rho}(\mathbf{k},t)$ описывает тепловые флуктуации заряда. Он подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению (см. (11), I)

$$\dot{\tilde{\bar{\rho}}}(\mathbf{k},t) + \gamma\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t) = -i(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{j}}})\,, \quad \tilde{\bar{\mathbf{j}}}(\mathbf{k},t) = \varphi(t)\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})\,, \tag{21}$$

с нормированным белым шумом $\varphi(t)$, $\langle\varphi(t)\rangle = 0$, $\langle\varphi(t)\varphi(t')\rangle = \delta(t-t')$. Таким образом, процесс $\bar{\rho}(\mathbf{k},t)$ является, при каждом фиксированном $\mathbf{k}$ приближается асимптотически при $t\to\infty$ комплекснозначным процессом Орнштейна-Уленбека с траекториями

$$\tilde{\bar{\rho}}(t) = \tilde{\bar{\rho}}_0 e^{-\gamma t} - i\big(\mathbf{k},\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})\big)\int_0^t \varphi(s)e^{-\gamma(t-s)}ds\,. \tag{22}$$

Отсюда следует, что для вычисления парных корреляционных функций $\langle\bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{E}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, $\langle\bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{H}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, необходимы выражения для корреляционных функций $\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, $\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{F}}^*_j(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, $\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{H}}^*_j(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$. Вычислим их в порядке следования.

На основании выражения (22) для траекторий, имеем

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle\Big[\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)e^{-\gamma t_1} - i\big(\mathbf{k}_1,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)\big)\int_0^{t_1}\varphi(s_1)e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\Big]\times$$

$$\times\Big[\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_2)e^{-\gamma t_2} - i\big(\mathbf{k}_2,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_2)\big)\int_0^{t_2}\varphi(s_2)e^{-\gamma(t_2-s_2)}ds_2\Big]^*\Big\rangle =$$

$$= e^{-\gamma(t_1+t_2)}\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\tilde{\bar{\rho}}_0^*(\mathbf{k}_2)\rangle +$$

$$+(\mathbf{k}_1)_{j_1}(\mathbf{k}_2)_{j_2}K_{j_1j_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}\int_0^{t_2}e^{-\gamma(t_2-s_2)}\langle\varphi(s_1)\varphi(s_2)\rangle ds_1ds_2\,,$$

где мы учли, что случайные величины $\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}')$ статистически независимы и имеют нулевые средние значения, $\langle\tilde{\bar{\rho}}_0\rangle = 0$ и $\langle\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k})\rangle = 0$.

Вычисляя интеграл по s_2, положив не ограничивая общности, что $t_2 > t_1$, получаем искомое выражение для корреляционной функции

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\tilde{\bar{\rho}}_0^*(\mathbf{k}_2)\rangle e^{-\gamma(t_1+t_2)} + (\mathbf{k}_1)_{j_1}(\mathbf{k}_2)_{j_2}K_{j_1j_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1+t_2-2s)}ds =$$

$$= \langle \tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\tilde{\bar{\rho}}_0^*(\mathbf{k}_2)\rangle e^{-\gamma(t_1+t_2)} + (\mathbf{k}_1)_{j_1}(\mathbf{k}_2)_{j_2}K_{j_1j_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)e^{-\gamma(t_2-t_1)}\frac{1-e^{-2\gamma t_1}}{2\gamma}.$$

Асимптотически, при $t_1 \to \infty$, когда $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$, эта формула упрощается

$$\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle = e^{-\gamma(t_2-t_1)}\frac{(\mathbf{k}_1)_{j_1}(\mathbf{k}_2)_{j_2}}{2\gamma}K_{j_1j_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\,. \tag{23}$$

Наконец, в пространственно-однородном случае, она принимает вид

$$\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}',t')\rangle = \frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{2\gamma}k_jk_{j'}K_{jj'}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,. \tag{24}$$

6. Вычисление корреляционной функции $\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$. Вычисление второй корреляционной функции из приведенного выше списка, согласно формулам для траекторий случайных процессов $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$, $\bar{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k},t)$, сводится к усреднению следующего выражения

$$\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)e^{-\gamma t_1} - i\big(\mathbf{k}_1,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)\big)\int_0^{t_1}\varphi(s_1)e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\mathsf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\,\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp^*(\mathbf{k}_2,s_2)ds_2\Big]\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle e^{-\gamma t_1} +$$

$$+\frac{4\pi i}{\varepsilon}\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\int_0^{t_2}\mathsf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\langle\varphi(s_1)(\mathbf{k}_1,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1))\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp^*(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle ds_2\,,$$

где мы воспользовались статистической независимостью случайных величин $\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k})$ и $\bar{\mathbf{F}}_l(\mathbf{k}')$ и равенством нулю их средних значений. Положив $t_2 > t_1$ и выражение для поперечной части плотности тока $\tilde{\bar{\mathbf{j}}}_\perp = \tilde{\bar{\mathbf{j}}} - \mathbf{k}(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{j}}})/\mathbf{k}^2$ (см. (15), I), имеем

$$\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{F}_l^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= e^{-\gamma t_1}\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_l^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_l^*(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle +$$

$$+\frac{4\pi i}{\varepsilon}(\mathbf{k}_1)_j\Big\langle\psi_j(\mathbf{k}_1)\Big[\psi_m^*(\mathbf{k}_2) - \frac{(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\big(\mathbf{k}_2,\boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{k}_2)\big)\Big]\Big\rangle\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)}\mathsf{S}_{lm}^{(E)*}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds =$$

$$= e^{-\gamma t_1}\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)_l^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)_l^*(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle +$$

$$+\frac{4\pi i}{\varepsilon}(\mathbf{k}_1)_j\left(\delta_{lm} - \frac{(\mathbf{k}_2)_l(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)\frac{K_{jl}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{2r^*(\mathbf{k}_2)}\times$$

$$\times \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)}\Big(r_+^*(\mathbf{k}_2)e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)} - r_-^*(\mathbf{k}_2)e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}\Big)ds\,.$$

Используя явные выражения для внутренних интегралов

$$\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)+r_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}ds = e^{r_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\int_0^{t_1} e^{-\gamma s+r_\pm^*(\mathbf{k}_2)s}ds =$$

$$= \frac{e^{-\gamma t_1+r_\pm^*(\mathbf{k}_2)t_1}-1}{r_\pm^*(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{r_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\,,$$

получаем выражение для искомой корреляционной функции. Более важное, с физической точки зрения, ее асимптотическое выражение при $t_1 \to \infty$, $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$ получается при учете неравенства $\mathrm{Re}(\gamma - r_\pm^*(\mathbf{k}_2)) > 0$,

$$\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s)+r_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}ds \to \frac{e^{r_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_\pm^*(\mathbf{k}_2)}\,.$$

Тогда асимптотическое выражение для корреляционной функции имеет вид

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{F}_l^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle_\infty =$$

$$\frac{2\pi i(\mathbf{k}_1)_j}{\varepsilon r^*(\mathbf{k}_2)}\left(\delta_{lm} - \frac{(\mathbf{k}_2)_l(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jl}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\left[r_+^*(\mathbf{k}_2)\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_+^*(\mathbf{k}_2)} - r_-^*(\mathbf{k}_2)\frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_-^*(\mathbf{k}_2)}\right]. \tag{25}$$

В пространственно-однородном случае эта формула переходит в следующую:

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\bar{F}_l^*(\mathbf{k}',t')\rangle =$$

$$= \frac{2\pi i}{\varepsilon r^*(\mathbf{k})}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')k_j\left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jl}(\mathbf{k})\left[r_+^*(\mathbf{k})\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k})(t'-t)}}{\gamma - r_+^*(\mathbf{k})} - r_-^*(\mathbf{k})\frac{e^{r_-^*(\mathbf{k})(t'-t)}}{\gamma - r_-^*(\mathbf{k})}\right] =$$

$$= \frac{4\pi i}{\varepsilon}\frac{\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{2\gamma^2 + a^2\mathbf{k}^2}k_j\left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jl}(\mathbf{k})e^{-\gamma(t'-t)/2}\times$$

$$\times\left[\gamma\mathrm{ch}r(\mathbf{k})(t'-t) - \frac{\gamma^2/2 + a^2\mathbf{k}^2}{r(\mathbf{k})}\mathrm{sh}r(\mathbf{k})(t'-t)\right], \tag{26}$$

где мы воспользовались тождествами $r_+^*(\mathbf{k}) + r_-^*(\mathbf{k}) = -\gamma$, $r_+^*(\mathbf{k})r_-^*(\mathbf{k}) = a^2\mathbf{k}^2$.

7. Вычисление корреляционной функции $\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$. Точно также как и выше, вычисляется последняя корреляционная функция,

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle =$$

$$= \left\langle\left[\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)e^{-\gamma t_1} - i\big(\mathbf{k}_1,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)\big)\int_0^{t_1}\varphi(s_1)e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\right]\times\right.$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\mathsf{S}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\,\tilde{\bar{\mathbf{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2,s_2)ds_2\Big]\Big\rangle.$$

$$=\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle e^{-\gamma t_1}+$$

$$+\frac{4\pi i}{\varepsilon}\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\int_0^{t_2}\mathsf{S}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\langle\varphi(s_1)\big(\mathbf{k}_1,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)\big)\tilde{\bar{\mathbf{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle ds_2\,.$$

Подставляя выражение для поперечной части плотности тока и производя усреднения, находим

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_l(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle=$$

$$=\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle e^{-\gamma t_1}+$$

$$+\frac{4\pi i}{\varepsilon}\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)}\big(\mathsf{S}^{(HE)*}\big)_{lm}(\mathbf{k}_2,t_2-s)\langle\big(\mathbf{k}_1,\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k}_1)\big)\left(\delta_{mn}-\frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)\psi^*_n(\mathbf{k}_2)\rangle ds=$$

$$=\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle e^{-\gamma t_1}+$$

$$+\frac{4\pi i}{\varepsilon}(\mathbf{k}_1)_j\left(\delta_{mn}-\frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jn}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)}\mathsf{S}^{(HE)*}_{lm}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds=$$

$$=\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1)\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle e^{-\gamma t_1}-$$

$$-\frac{2\pi a^2}{cr^*(\mathbf{k}_2)}(\mathbf{k}_1)_j\left(\delta_{mn}-\frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jn}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\epsilon_{lqm}(\mathbf{k}_2)_q\,\times$$

$$\times\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)}\Big(e^{r^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}-e^{r^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}\Big)ds\,.$$

Учитывая значения интегралов

$$\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)+r^*_\pm(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}ds=e^{r^*_\pm(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\int_0^{t_1}e^{-\gamma s+r^*_\pm(\mathbf{k}_2)s}ds=$$

$$=\frac{e^{-\gamma t_1+r^*_\pm(\mathbf{k}_2)t_1}-1}{r^*_\pm(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{r^*_\pm(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\,,$$

находим выражение для корреляционной функции при конечных значениях t_1. Асимптотическое же выражение при $t_1\to\infty$ находится с учетом того, что $\mathrm{Re}(\gamma-r^*_\pm(\mathbf{k}_2))>0$,

$$\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)+r^*_\pm(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}ds\to\frac{e^{r^*_\pm(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma-r^*_\pm(\mathbf{k}_2)}\,.$$

Тогда

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{H}^*_l(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle_\infty=$$

$$= -\frac{2\pi a^2}{cr^*(\mathbf{k}_2)}(\mathbf{k}_1)_j\left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jn}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\epsilon_{lqm}(\mathbf{k}_2)_q\left[\frac{e^{r_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_+^*(\mathbf{k}_2)} - \frac{e^{r_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - r_-^*(\mathbf{k}_2)}\right] =$$

$$= -\frac{2\pi a^2}{cr^*(\mathbf{k}_2)}(\mathbf{k}_1)_j\left(\delta_{mn} - \frac{(\mathbf{k}_2)_n(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}^2}\right)K_{jn}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\epsilon_{lqm}(\mathbf{k}_2)_q \times$$

$$\times \frac{e^{-\gamma(t_2-t_1)/2}}{2\gamma^2 + a^2\mathbf{k}_2^2}\left[3\gamma \mathrm{sh} r^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1) + 2r^*(\mathbf{k}_2)\mathrm{ch} r^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)\right]. \quad (27)$$

В пространственно-однородном случае, –

$$\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\bar{H}_l^*(\mathbf{k}',t')\rangle_\infty =$$

$$= -\frac{2\pi a^2}{c}k_j\left(\delta_{mn} - \frac{k_n k_m}{k^2}\right)K_{jn}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\epsilon_{lqm}k_q \times$$

$$\times \frac{e^{-\gamma(t'-t)/2}}{2\gamma^2 + a^2k^2}\left[3\frac{\gamma}{r(\mathbf{k})}\mathrm{sh} r(\mathbf{k})(t'-t) + 2\mathrm{ch} r(\mathbf{k})(t'-t)\right]. \quad (28)$$

Вычисленные парные корреляционные функции $\langle\bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{E}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, $\langle\bar{\mathbf{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{H}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$, $\langle\bar{\mathbf{H}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\mathbf{H}}_{j_2}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle$ позволяют выразить важнейшие физические характеристики теплового электромагнитного излучения – его плотности энергии и импульса, а также плотности потоков этих величин, которые представляются квадратичными формами от компонент электромагнитного поля.

Литература

1. Фат Л.Т., Вирченко Ю.П. Стохастические электромагнитные поля в диэлектрической среде. 1. Построение модели // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2015. - 8(202);38. – С.119-129.
2. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.- М.: Изд. АН СССР, 1953.
3. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля/ С.М. Рытов.- М.: Наука, 1978.- 464с.
4. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс. – Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972. – 295с.

STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELDS IN DIELECTRIC MEDIUM. 2. CALCULATION OF PAIR CORRELATION FUNCTIONS

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Gaussian random field is constructed that describes the stochastic electromagnetic field in dielectric medium caused by heat fluctuations in them. The field is generated by stochastic dynamic system of Maxwell's equations with additive noise.

Key words: stochastic electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell's equations, stochastic model, correlation function.