УДК 303.732.4

УПРАВЛЕНИЕ МНОГОФАЗОВЫМИ ФИНАНСОВЫМИ ПОТОКАМИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

М.Ф.ТУБОЛЬЦЕВ
С.И. МАТОРИН
О.М.ТУБОЛЬЦЕВА

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

e-mail:
tuboltsev@bsu.edu.ru
matorin@bsu.edu.ru

Рассматриваются вопросы математического моделирования финансовых операций со знакопеременными финансовыми потоками (многофазные операции). Необходимость рассмотрения многофазных, и, в первую очередь, трёхфазных финансовых операций связана с потребностями разработки методов анализа инвестиционных проектов, схем ипотечного кредитования и синтеза новых финансовых инструментов.

Финансовые операции указанного типа, несмотря на то, что часто встречаются на практике, изучены недостаточно. Основной проблемой является отсутствие или наличие нескольких корней уравнения NPV(r)=0, что не позволяет использовать базовое понятие уровня внутренней доходности.

Поскольку в таких ситуациях существующие методы финансового анализа не применимы, предложен новый подход, решающий проблему корней, по крайней мере, для трёхфазных финансовых операций.

Ключевые слова: знакопеременные финансовые потоки, многофазные финансовые операции, математическое моделирование.

В настоящее время всё чаще возникает необходимость анализировать знакопеременные финансовые потоки CF (**C**ash **F**low), в которых смена знака происходит не один раз, как в классических финансовых инструментах, а – многократно. Подобные финансовые потоки появляются при рассмотрении инвестиционных процессов в добывающих отраслях, когда необходимо после окончания эксплуатации месторождения осуществлять восстановительные работы по рекультивации земель; в строительных подрядных работах, когда имеет место предоплата и т.д.

Подобная же ситуация возникает при разработке новых финансовых инструментов, получаемых в результате синтеза из стандартных финансовых инструментов, например, при разработке новых более эффективных схем ипотечного кредитования [1].

Сложность анализа многофазовых финансовых потоков, когда в каждой фазе потока присутствуют элементы одного знака, обусловлена следующими обстоятельствами:

1) чистое приведённое значение NPV (**N**et **P**resent **V**alue) имеет для многофазовых финансовых потоков часто не один, как в классических финансовых инструментах, а несколько корней, из-за чего теряется возможность их общепринятой экономической интерпретации как доходности финансовой операции;

2) поиск корней затруднён, поскольку NPV как функция ставки сравнения теряет монотонность;

3) положительных вещественных корней уравнения NPV=0 может не быть вообще, т.е. само понятие уровня внутренней доходности финансового потока IRR (**I**nternal **R**ate of **R**eturn), в этом случае, не определено.

Одними из первых, кто указал на существование указанных сложностей для операций с многофазными финансовыми потоками, были Лори и Сэведж (Lorie, Savage 1955) [2]. Многие исследователи пытались решить проблему корней: Мао (Mao 1966)[3], Бивс (Beaves 1988)[4], Роузе (Rousse 2008)[5], предлагая различные модификации и альтернативы IRR, но существенных результатов это не дало.

Причина кроется в том, что IRR, являясь далеко идущим обобщением понятия эффективного процента – основного инструмента анализа краткосрочных финансовых операций [6, с.51], наиболее полно выражает сущность финансовых операций, и любая существенная модификация или подмена этого понятия приводят к недопустимому искажению реальности.

Таким образом, необходимо разработать математическую модель, позволяющую, оставаясь в рамках традиционного подхода к анализу финансовых операций и процессов, основанного на финансовых потоках, NPV и IRR, проводить анализ многофазовых финансовых операций.

Подавляющее большинство финансовых процессов удобно представлять с помощью дискретно-событийных моделей. В простейшем случае такая модель включает в себя множество финансовых событий, составляющих финансовый поток: $\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$ и уравнение для определения уровня внутренней доходности:

$$NPV\left(\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}, t_0, r\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{(1+r)^{t_i - t_0}} = 0, \qquad (1)$$

где r – ставка сравнения, t_0 – момент дисконтирования. Для традиционных финансовых инструментов, финансовые потоки которых меняют знак один раз, этого вполне достаточно для осуществления анализа с помощью IRR, поскольку в силу монотонной зависимости от r левой части уравнения (1) существует единственный положительный корень.

Для многофазных финансовых потоков утверждение о единственности корня перестаёт, в общем случае, быть верным. Чистое приведённое значение NPV, является дробно-рациональной функцией ставки сравнения r, и вопрос о числе корней и их локализации для таких функций является сложным, решённым далеко не полностью.

Для произвольного финансового потока $\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$ определим характеристическую функцию $\chi(V)$ следующим образом:

1) в определении NPV произведём замену переменной $r = V^{-1} - 1$, т.е. будем рассматривать NPV как функцию множителя дисконтирования;

2) конкретизируем момент дисконтирования, положив $t_0=t_1$ (здесь, как обычно, неявно предполагается, что $t_1<t_2<\ldots<t_N$).

Таким образом, характеристическая функция $\chi(V)$ как функция множителя дисконтирования полностью определяется финансовым потоком (в то время как NPV зависит также от момента дисконтирования t_0) и имеет вид:

$$\chi(V) = NPV\left(\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}, t_1, V^{-1} - 1\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i V^{t_i - t_1}. \qquad (2)$$

Характеристическая функция $\chi(V)$ позволяет полностью воспроизвести структуру (схему) финансового потока, а если известен момент начала потока t_1, то и вся финансовая операция восстанавливается по характеристической функции $\chi(V)$ полностью. Показатели степени в формуле (2) представляют собой некоторые интервалы времени, которые, при выборе в качестве единицы измерения достаточно короткого временного интервала, будут целыми числами. Если множитель дисконтирования V отнести к новому базовому периоду, то характеристическая функция $\chi(V)$ как функция множителя дисконтирования будет полиномом от одной переменной V.

Таким образом, переход от $NPV\left(\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}, t_0, r\right)$ к $\chi(V)$ позволяет осуществить редукцию исходной задачи к вопросу о числе и локализации корней полинома от одной переменной, поскольку между корнями уравнений (1) и (2) существует взаимнооднозначное соответствие. Задача о числе и локализации корней полинома от одной переменной в теоретическом плане решена практически полностью. Она имеет долгую и богатую историю, а также многочисленные приложения в теории устойчивости, управления и т.д.

Поскольку множитель дисконтирования V в силу своей экономической интерпретации принадлежит интервалу (0, 1), то редуцированная задача формулируется следующим образом: для заданного финансового потока $\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$ определить количество корней $\chi(V)$ на интервале (0, 1), а также их значения. Ввиду того, что степень $\chi(V)$ может быть велика, то, в силу известного результата Абеля, вычислить корни можно только приближённо, используя численные методы. Но это следует делать только после определения числа корней $\chi(V)$ на интервале (0, 1).

В теоретическом плане задача определения числа корней вещественного полинома от одной переменной на произвольном заданном интервале (a,b) решается с помощью теоремы Штурма [7, с.76], но практическая реализация построения ряда Штурма, необходимого для получения решения, требует нетривиальных символьных вычислений, которые сложно реализовать на компьютере. Необходимость же компьютерной реализации очевидна, поскольку построение любой аналитической системы, работающей в реальном масштабе времени, можно осуществить только с применением новейших информационных технологий.

Кроме того, для практических применений более интересной является обратная задача определения коэффициентов полинома таким образом, чтобы он имел корни, локализованные определённым образом. Действительно, исходная задача анализа финансового процесса обычно требует определения некоторых параметров этого процесса так, чтобы обеспечить задаваемый априорно приемлемый уровень дохода. При этом, этапы финансовой операции, определяющие притоки и отток средств, могут менять свою длительность, но их общее количество и порядок следования остаются неизменными.

Таким образом, рациональнее не задавать произвольно параметры финансовой операции (финансового процесса), пытаясь затем определить её доходность, которая может быть не определена из-за отсутствия или множественности корней уравнения (1), а, задав априорно доходность, ряд ключевых параметров финансовой операции определить так, чтобы заданная доходность обеспечивалась реально. В такой постановке исходной задачи анализа финансовой операции редукция задачи приобретает следующую формулировку: определить параметры характеристической функции $\chi(V)$ так, чтобы она имела один заданный корень V_0 на интервале (0, 1).

Сравнительно небольшое изменение задачи финансового анализа и её редукции позволяет построить математическую модель, которая имеет вид системы алгебраических уравнений и некоторого количества линейных неравенств. Теоретической базой модели является следующая теорема Декарта: число положительных корней вещественного полинома не превосходит числа перемен знака в последовательности его коэффициентов и сравнимо с ним по модулю 2, если все корни вещественны, то эти числа равны [8, с.109].

Пусть произвольная финансовая операция имеет M+1 фазу, т.е. её финансовый поток $\left\{\left(x_i, t_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$ M раз меняет знак. Пусть r_0 – априорно заданная доходность этой финансовой операции, а $V_0 = (1+r_0)^{-1}$ – множитель дисконтирования, соответствующий этой априорно заданной доходности. Будем считать также, что в качестве базового выбран такой временной интервал, при котором характеристическая функция $\chi(V)$ является вещественным полиномом. По теореме Декарта число положительных корней у вещественного полинома $\chi(V)$ не может быть больше M и имеет ту же чётность.

Согласно основной теореме алгебры каждый полином, в том числе с вещественными коэффициентами, в поле комплексных чисел имеет столько корней, какова его степень. Степень вещественного полинома $\chi(V)$ при выборе в качестве базового периода небольшого временного интервала может составлять несколько сотен и даже тысяч. Но, при этом, число положительных корней, принадлежащих интервалу (0,∞) не превышает сравнительно небольшого числа М. Поскольку корни большие 1 не могут быть содержательно интерпретированы как множители дисконтирования, то нужно сделать так, чтобы на интервале (0, 1) было ровно М корней, т.е. максимально возможное согласно теореме Декарта их число. Кроме того, эти корни обязаны совпадать между собой, что даёт возможность рассматривать их как один корень кратности М.

Следовательно, если предположить, что выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \chi(V_0) = 0 \\ \chi'(V_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \chi^{(M-1)}(V_0) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

то можно утверждать, что кроме корня V_0 кратности М у характеристической функции $\chi(V)$ на интервале (0, 1) нет других корней и, следовательно, $r_0 = V_0^{-1} - 1$ можно рассматривать как уровень внутренней доходности заданной финансовой операции. Отметим также, что у характеристической функции $\chi(V)$ есть только один положительный корень V_0, другие корни либо отрицательные, либо комплексно-сопряжённые числа.

Соотношения (3) не являются системой дифференциальных уравнений, поскольку характеристическая функция $\chi(V)$ удовлетворяет им в единственной точке V_0. Эти соотношения следует рассматривать как модельные ограничения, позволяющие определить неизвестные М параметров анализируемой финансовой операции.

Выбор задаваемых априорно и определяемых из системы модельных ограничений (3) параметров финансового процесса произволен, но доходность всегда должна быть входным параметром (должна задаваться априорно) модели. Возможность априорного задания доходности финансовой операции является не недостатком, а скорее достоинством предлагаемого метода моделирования, поскольку без каких-либо вычислений гарантирует достижение заданного уровня доходности. Система модельных ограничений (3) задаёт простую математическую модель финансового процесса, уравнения которой относительно значений финансовых активов являются линейными алгебраическими уравнениями, а относительно временных меток – показательными.

Таким образом, реализована математическая модель многофазных финансовых операций (процессов), которая представляет собой систему алгебраических уравнений относительно параметров финансового потока операции. Доходность операции в этой модели всегда задаётся априорно, но это не является существенным недостатком, поскольку на практике доходность является целевым параметром, и остальные параметры подбираются так, чтобы цель была достигнута.

Поскольку модель содержит М базовых ограничений, то она позволяет рассчитать М параметров, остальные должны быть заданы априорно. Параметры, задающие финансовые активы почти всегда предполагаются вещественными, временные параметры имеют значения из множества натуральных чисел, т.е. принимают дискретные значения. Поэтому, при решении различных оптимизационных задач приходится совмещать методы непрерывной и дискретной оптимизации, что, в свою очередь, приводит к необходимости сочетания математических алгоритмов и методов искусственного интеллекта.

Являясь новым, предлагаемый метод моделирования многофазных финансовых операций, тем не менее, уже апробирован в задаче синтеза оптимизированных схем ипотечного кредитования, дав существенное улучшение характеристик [9].

Проиллюстрируем предлагаемый метод построения математических моделей многофазных финансовых операций примером, когда финансовая операция имеет 3 фазы. Рассмотрим инвестиционный проект разработки сырья карьерным способом с последующим восстановлением ландшафта.

Очевидно, что данный инвестиционный проект имеет 3 этапа (фазы):

1. этап ввода карьера в эксплуатацию;
2. этап промышленной эксплуатации;
3. этап рекультивации земель.

На первом этапе происходит отток средств инвесторов, поскольку необходимо осуществлять затраты на проектирование карьера, оплату работ подрядчиков и т.д. Хотя эти затраты осуществляются неравномерно по времени и по объёму, сделаем упрощающее предположение, что затраты осуществляются равномерно каждый месяц в объёме A в течение n_1 месяцев. Аналогично упрощая реальную ситуацию, будем считать, что на втором этапе в течение n_2 месяцев осуществляется поступление денежных средств в объёме D ежемесячно. На третьем восстановительном этапе опять осуществляются затраты в течение n_3 месяцев объёмом B ежемесячно.

Заметим, что в такой ситуации естественно в качестве базового периода выбрать не год (как обычно), а условный месяц равный 1/12 года. На рисунке показан финансовый поток данного инвестиционного проекта:

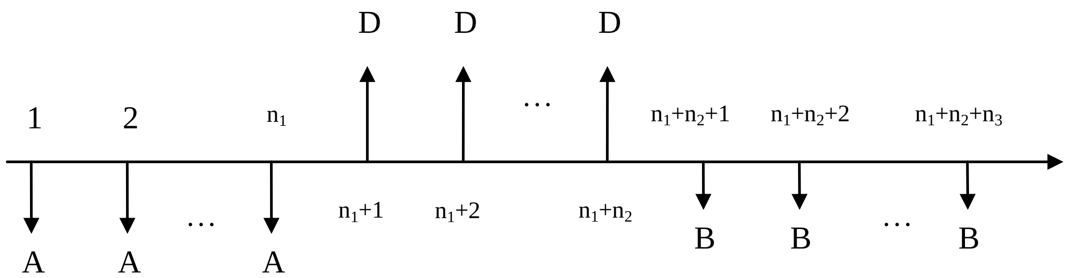

Рис. Трёхфазный финансовый поток инвестиционного проекта по добыче сырья с рекультивацией земель

Учитывая, что все элементы финансового потока следуют через одинаковые интервалы времени (поэтому на рис.1 они занумерованы натуральными числами) равные условному месяцу, принятому за новый базовый период, получим следующее представление характеристической функции инвестиционного проекта:

$$\begin{aligned}\chi(V) &= -A\left(1+V+\ldots+V^{n_1-1}\right)+D\left(V^{n_1}+\ldots+V^{n_1+n_2-1}\right)-B\left(V^{n_1+n_2}+\ldots+V^{n_1+n_2+n_3-1}\right)= \\ &= -A\frac{1-V^{n_1}}{1-V}+DV^{n_1}\frac{1-V^{n_2}}{1-V}-BV^{n_1+n_2}\frac{1-V^{n_3}}{1-V}= \\ &= \frac{A\left(1-V^{n_1}\right)-DV^{n_1}\left(1-V^{n_2}\right)+BV^{n_1+n_2}\left(1-V^{n_3}\right)}{V-1}\end{aligned} \tag{4}$$

При переходе к новому (меньшему, чем год) базовому периоду следует выбирать максимальный приемлемый интервал, поскольку это влияет на степень характеристической функции. Появление большого числа комплексно-сопряжённых корней может негативно сказаться на точности численных методов. Скорее всего, при решении практических задач, минимальный базовый период будет не меньше календарных суток.

Пусть инвестиционный проект должен иметь доходность r_0 (например, 0,25 – т.е. 25%). Тогда множитель дисконтирования будет равен $V_0=\left(1+r_0\right)^{-1}$. Поскольку финансовый поток инвестиционного проекта имеет три фазы, то последовательность коэффициентов полинома $\chi(V)$ дважды меняет знак (M=2). Рис.1 это наглядно демонстрирует.

Система (3) в данном конкретном случае состоит из двух уравнений: $\chi(V_0) = 0$ и $\chi'(V_0) = 0$. В формуле (4) характеристическая функция $\chi(V)$ представлена в виде дробно-рациональной функции. Из курса математического анализа известно, что если некоторое число является кратным корнем дробно-рациональной функции, то оно же является и корнем числителя с той же кратностью. Поэтому, дифференцируя числитель дроби, получаем соотношения:

$$\begin{cases} A\left(1 - V_0^{n_1}\right) - DV_0^{n_1}\left(1 - V_0^{n_2}\right) + BV_0^{n_1+n_2}\left(1 - V_0^{n_3}\right) = 0 \\ A\left(-n_1V_0^{n_1-1}\right) - D\left(n_1V_0^{n_1-1} - (n_1+n_2)V_0^{n_1+n_2-1}\right) + B\left((n_1+n_2)V_0^{n_1+n_2-1} - (n_1+n_2+n_3)V_0^{n_1+n_2+n_3-1}\right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Эти два соотношения связывают 6 параметров: 3 параметра (A, D, B), характеризующие финансовые активы, используемые в инвестиционном проекте, и 3 параметра (n1, n2, n3), определяющие временные характеристики. Задав любые 4 параметра, соотношения (5) можно рассматривать как уравнения для определения оставшихся двух.

Относительно параметров (A, D, B), характеризующих финансовые активы, условия (5) представляют собой линейные алгебраические уравнения, которые, ввиду их небольшой размерности, легко решить в явном виде. Относительно временных параметров (n1, n2, n3) условия (5) также представляют собой систему алгебраических уравнений, хотя и более сложного вида. Для её решения нужно применять численные методы. Решение осложняет, в этом случае, дискретность временных параметров.

Таким образом, условия (5) представляют собой упрощённую математическую модель инвестиционного проекта, имеющего трёхфазный финансовый поток, и позволяют относительно просто определять 2 расчётные параметра проекта, задавая остальные 4 априорно, исходя из специфики проекта. Тем самым, подтверждена принципиальная возможность эффективного использования метода разработки математических моделей многофазных финансовых операций на основе системы уравнений (3).

Математическая модель инвестиционного проекта, заданная системой уравнений (5) может расширяться и трансформироваться, например, в задачи оптимизации. Так, в условиях примера можно ввести ограничения на объём финансовых вложений во время ввода карьера в эксплуатацию, а также размер текущих затрат A. Возможна постановка оптимизационных задач, например, минимизация всех затрат. Тем самым, созданы предпосылки для решения большого числа практических задач.

Следует отметить, что разработанный метод имеет ряд особенностей, облегчающих его практическое использование:

1. метод обобщает на многофазные финансовые операции хорошо известный финансистам и экономистам метод IRR-анализа, применимый только к двухфазным финансовым операциям;
2. метод является расширяемым в том смысле, что систему базовых соотношений (3) можно дополнять дополнительными условиями (например, типа неравенств, для ограничения области определения параметров) не создавая проблем для реализации численных алгоритмов;
3. система базовых соотношений метода легко трансформируется в оптимизационные задачи, добавлением целевых функций, поскольку основная цель: реализация заданного уровня доходности финансовой операции уже реализована в базовых соотношениях;
4. при небольшом числе фаз финансовой операции для некоторых параметров можно получить аналитические решения, что делает их анализ более полным и содержательным.

Следует также отметить, что без методов математического и компьютерного моделирования многофазных операций невозможно решение такой актуальной задачи, как задача синтеза новых финансовых инструментов. Метод разработки математических моделей многофазных финансовых операций, представленный выше, основанный на локализации кратного корня характеристической функции финансовой операции, позволяет осуществлять, например, синтез новых схем ипотечного кредитования [9].

Таким образом, задачу расширения метода классического IRR-анализа с простейших двухфазовых финансовых операций на общий случай многофазовых операций можно считать в целом решённой, предполагая, при этом, необходимость его дальнейшего совершенствования. В первую очередь, это касается классификации типовых задач и численных методов их решения.

Исследования поддержаны грантом РФФИ 14-07-00149

Список литературы

1. *Тубольцев М.Ф., Маторин С.И., Тубольцева О.М.* Системный подход к построению комбинированных схем ипотечного кредитования // Труды ИСА РАН, том 62, выпуск 1, 2012. – стр. 91-100.
2. Lorie, James H., and Leonard J. Savage Three Problems in Rationing Capital // The Journal of Business – 1955. – Vol. 28. – No. 4. – pp. 229-239.
3. Mao, James T. The Internal Rate of Return as a Ranking Criterion // The Engineering Economist – 1966. – Vol. 11.- No. 1. – pp. 1-13.
4. Beaves, R. G. Net present value and rate of return: implicit and explicit reinvestment assumptions //The Engineering Economist – 1988. – 33(4). -pp. 275-302.
5. Rousse, Olivier Capital budgeting with an efficient yield-based method: the real rate of return technique – LASER-CREDEN, Faculty of Economics, University of Montpellier 1, 2008.
6. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник. – 4-е изд. – М.: Дело, 2004. – 400 с.
7. Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981, 176 с.
8. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Факториал пресс, 2001. – 544 с.
9. *Тубольцева О.М.* Оптимизация схем ипотечного кредитования //Научные ведомости Белгородского государственного университета, серия «История, Политология, Экономика, Информатика»,№15 (158) 2012, выпуск 27/1.- 2013.- С.88-98.

MANAGEMENT OF MULTIPHASE FINANCIAL FLOWS BASED ON MATHEMATICAL MODELING OF FINANCIAL OPERATIONS

M.F.TUBOLTSEV
S.I. MATORIN
O.M.TUBOLTSEVA

Belgorod National Research University

e-mail:
tuboltsev @bsu.edu.ru
matorin@bsu.edu.ru

We consider the problems of mathematical modeling of financial transactions with alternating financial flows (multiphase operation). The need to consider multiphase, and primarily phase of financial transactions related to the needs of the development of methods for the analysis of investment projects, mortgage schemes and the synthesis of new financial instruments.

Financial transactions of this type, despite the fact that frequently occur in practice, have been insufficiently studied. The main problem is the absence or presence of multiple roots of the equation NPV (r) = 0, which allows you to use the basic concept of the level of IRR.

Because in such situations existing methods of financial analysis are not applicable, a new approach that solves the problem of roots is suggested, at least for three-phase financial transactions.

Keywords: alternating cash flows, multiphase financial operations, mathematical modeling.