



MSC 74C10

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ВЫПУЧИВАНИЕ. Часть I: МОДЕЛЬ ШЭНЛИ

В.И. Ванько

МГТУ им. Н.Э.Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия, e-mail: vvanko@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы теории стержней в постановках, разработанных в трудах Энгессера, Ясинского, Кармана, Шэнли, Хоффа, Работнова, Ильюшина и др., т.е. изучается поведение достаточно коротких стержней (квазистатический процесс), материал которых работает в упруго-пластической стадии; учитываются также свойства ползучести материала.

Ключевые слова: стержневая модель, продольная сила, продолжающееся нагружение, критические значения, корректность квазистатической постановки.

1. История вопроса. В дальнейшем термин «*продольный изгиб*» употребляется при изучении поведения упругих или упруго-пластических стержней под действием возрастающей силы; термин «*выпучивание*» — при изучении поведения стержня, материал которого находится в состоянии ползучести.

Обоснование квазистатического подхода можно найти в работах [1, 2]. Точность такой постановки оценивается в работе [3].

Интерес к проблемам продольного изгиба и выпучивания не случаен, так как большинство элементов современных конструкций работает в условиях, приближающихся к рассматриваемым: высокие уровни нагрузок требуют полного учета упруго-пластических свойств материала; повышенные рабочие температуры эксплуатации изделий выдвигают на первый план необходимость учета свойств ползучести материала. В наиболее ответственных элементах конструкций необходимо учитывать все эти факторы.

Впервые задача об изгибе стержня (в современной трактовке) была поставлена Д. Бернулли, который сформулировал гипотезу *плоских сечений* и пришел к соотношению между изгибающим моментом в сечении, кривизной и жесткостью на изгиб упругого бруса. Эйлер, решая задачу, поставленную Бернулли, получил критическую силу, «силу колонны» [4].

Развитие исследований Эйлера содержится в трудах Лагранжа, Клебша и Кирхгофа, которые разработали геометрически нелинейную теорию гибких упругих стержней [5, 6].

Энгессер, принимая гипотезу плоских сечений, рассмотрел задачу о продольном изгибе с учетом пластичности в геометрически линейной постановке: «Мы представляем себе стержень, изогнутый на очень малую величину δu , и ищем сжимающую силу, способную удержать стержень в этом слабо изогнутом состоянии». Предполагая, что при изгибе *постоянной* силой во всех точках любого поперечного сечения происходит активное нагружение, Энгессер пришел к понятию *касательно-модульной* силы [7].



Ясинский указал, что при изгибе во внешних волокнах стержня происходит разгрузка, и поэтому в формуле для критической силы должен присутствовать множитель, являющийся комбинацией касательного модуля и модуля Юнга [8].

В следующей работе Энгессер дает формулу для вычисления уточненного, «*редуцированного модуля*» для прямоугольного сечения [9].

Дальнейшее, существенное, развитие теории продольного изгиба содержится в работах Кармана [10, 11]. Карман впервые поставил задачу о продольном изгибе стержня с начальными неправильностями — эксцентриситет приложения силы или начальный прогиб, причем материал стержня подчиняется произвольному закону мгновенного нагружения; построены кривые прогиб-нагрузка для различных значений эксцентриситета. Дана также строгая постановка задачи об устойчивости (в смысле Эйлера) стержня под действием постоянной нагрузки и вычислены значения редуцированного модуля для сечений произвольной геометрии. Поставленные Карманом эксперименты до сих пор являются образцовыми [11].

Вопрос казался исчерпанным, пока в 1946 г. не появились работы Шэнли, который по-новому взглянул на проблему продольного изгиба, предположив, что предметом исследования является *свободный* шарнирно опертый стержень и нагрузка непрерывно возрастает. В этой постановке касательно-модульная нагрузка, которую в дальнейшем будем называть *силой Шэнли*, приобретает смысл силы, при которой впервые идеально прямой стержень приобретает *возможность* искривиться. Сила редуцированного модуля, *сила Кармана*, имеет смысл нагрузки, при стремлении к которой прогиб либо скорость прогиба стремятся к бесконечности (интенсивно возрастают) [12, 13].

Необходимо подчеркнуть, что отличие результатов, полученных в различных постановках, является следствием влияния истории нагружения на упруго-пластический процесс, что исследовано Г.В. Ивановым [14].

Следует отметить предшествующие работы Дюберга и Уайлдера, А.А. Ильюшина и В.Г. Зубчанинова [15-17]: стержень рассматривается как элемент некоторой конструкции, со стороны которой на последний во время начала изгиба передается возрастающая или убывающая нагрузка. В этих условиях первоначально прямой стержень может нести нагрузку, большую кармановой.

Так как получение результатов, если отказаться от рассмотрения простейших моделей (модель Шэнли либо двутавр), связано с принципиальными трудностями вследствие необходимости учёта истории нагружения в каждой точке, то естественно, что наряду с работами качественного характера развивались и численные методы решения задач о продольном изгибе.

Впервые, по-видимому, численное интегрирование полученных соотношений принял Т. Карман в цитированной выше работе [11].

К. Ежеку удалось найти точное решение задачи о продольном изгибе стержня из упруго-идеально-пластического материала [18].

Т.-Х. Лин впервые предложил шаговый метод, посредством которого процесс решения задачи уже мог быть представлен в виде алгоритма [19].

Развитие техники в послевоенный период ставило исследователей перед необходимостью учёта влияния высоких температур на поведение элементов конструкций. Одним



из основных свойств материалов в условиях работы при высоких температурах является *ползучесть*.

Впервые задача об устойчивости (квазистатический процесс, геометрически линейная постановка) стержня из линейно вязко-упругого материала была поставлена и решена А.Р. Ржаницыным [20]. В этой работе предложен квазистатический критерий (но сути — достаточное условие) устойчивости и исследованы уровни нагрузок, при которых стержень «асимптотически устойчив», т.е. при бесконечно большом времени прогибы его ограничены, и неустойчив: при возрастании времени прогиб стремится к бесконечности при конечном значении времени, т.е. существует *критическое время*.

Н. Хофф исследовал выпучивание стержней из нелинейно вязкого материала (установившаяся ползучесть) [1]. В этом случае, ввиду нелинейности закона ползучести, провести *качественное* рассмотрение уравнения равновесия невозможно, и автор предлагает изучать поведение двутавровой (двухполочной) модели стержня, считая начальную и все последующие формы выпучивания в виде полуволны синусоиды, причём уравнение равновесия удовлетворяется в срединном (но длине стержня) сечении. Это — метод коллокации, качественно аналогичный изучению модели Шэнли [13].

Решающее влияние на дальнейшее развитие работ по исследованию выпучивания стержней имели работы Хоффа [21], и Веубеке [22]. Если рассмотреть стержень из упруго-пластического материала, то вследствие роста деформаций в точках стержня, уменьшается касательный модуль, что приводит к падению мгновенной жёсткости на изгиб поперечных сечений стержня. Наконец, может наступить такой момент времени (при ограниченном прогибе), что приложенная нагрузка станет равна критической мгновенной нагрузке, соответствующей данному значению жёсткости. В этот момент скорость прогиба неограниченно возрастает и стержень теряет *несущую способность*.

Следует отметить работу Жичковского [23], который показал, что если изучать *конечные* прогибы (т.е. решать задачу в геометрически нелинейной постановке) упругого стержня в условиях ползучести, то никаких особенностей на кривой прогиб — время не наблюдается.

В цитированных выше работах отмечалась сильная зависимость критического времени от начальных несовершенств. Поэтому, наряду с отмеченными работами, развивались исследования, в которых рассматривались совершенные конструкции и на основе тех или иных соображений делались выводы о потере устойчивости начальной формы равновесия.

Впервые строгий подход к устойчивости идеального стержня в условиях ползучести продемонстрирован в работе Ю.Н. Работнова и С.А. Шестерикова [24]. Предложенное авторами условие сформулировано в терминах классической теории устойчивости А.М. Ляпунова. Смысл упомянутого условия в следующем: если некоторое возмущение действует на стержень до момента накопления определённого значения деформации ползучести, то возникший прогиб убывает; если возмущение приложено после накопления указанного уровня деформации ползучести, то скорость прогиба возрастает — равновесие неустойчиво.

Обзоры литературы содержатся в работах Ясинского [8], Кармана [10], Хоффа [25, 26], А.С. Вольмира [27]; в работе В.Г. Зубчанинова представлен обширный обзор лите-



ратуры с анализом результатов цитируемых авторов [28].

2. Упруго-пластическая модель Шэнли. Рассматриваем стержневую модель Шэнли, рис. 1, представляющую собой абсолютно жесткую стойку длиной L , опирающуюся на два одинаковых упруго-пластических стержня длиной h ($L \gg h$) с площадью поперечного сечения $F/2$. Заметим, что рассмотрение такой модели равносильно рассмотрению двутавровой модели в случае использования метода коллокации по срединному сечению [1].

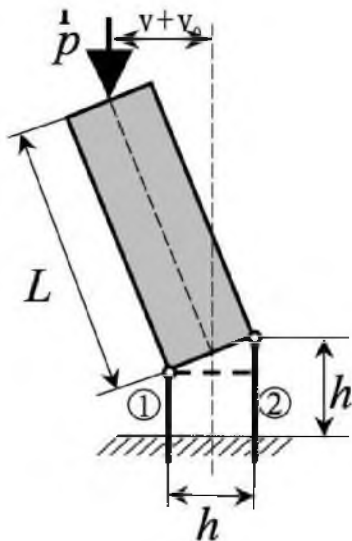


Рис. 1.

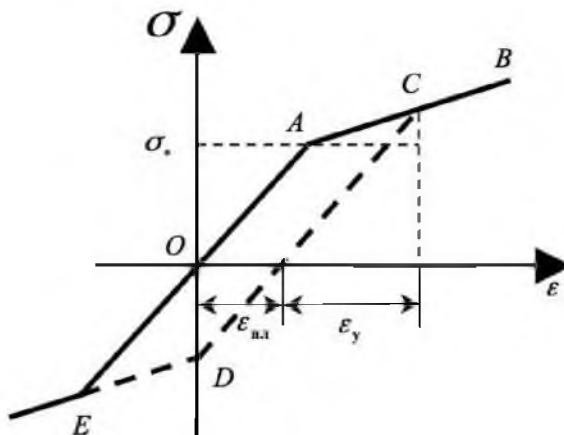


Рис. 2.

Считаем, что стержни 1 и 2 изготовлены из упруго-пластического материала с линейным упрочнением, рис. 2.

Все линейные величины относим к $h/2$; индексы 1 и 2 обозначают величины, соответствующие первому и второму стержням; за положительные приняты сжимающие напряжения, нагрузки и деформации сжатия; E — модуль Юнга, E_t — касательный модуль, принятый постоянным; $\sigma = P/F$, где F — суммарная площадь поперечных сечений стержней.

Общая деформация есть сумма упругой и пластической деформаций: $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_{пл}$. Из рис. 2 следует

$$\varepsilon_{пл} = \frac{\sigma - \sigma_*}{E_t} - \frac{\sigma - \sigma_*}{E} = \frac{E - E_t}{EE_t}(\sigma - \sigma_*), \quad \varepsilon_y = \sigma/E.$$

Поэтому деформация вычисляется в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_*)}{\mu} \quad \left(\mu = \frac{EE_t}{E - E_t} \right). \tag{2.1}$$

Скорость упруго-пластических деформаций в стержнях 1 и 2 можно представить как

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + k_i \frac{\dot{\sigma}_i}{\mu} \quad (i = 1, 2). \tag{2.2}$$



Значения коэффициентов k_1 и k_2 , соответствующих стержням, характеризуют процессы нагружения, либо разгрузки:

$$k_i = \begin{cases} 0, & |\sigma_i| < \sigma_*, \\ 1, & |\sigma_i| > \sigma_*, \quad \sigma_i \dot{\sigma}_i > 0 \text{ – активное нагружение,} \\ 0, & |\sigma_i| > \sigma_*, \quad \sigma_i \dot{\sigma}_i < 0 \text{ – разгрузка.} \end{cases}$$

В качестве независимого параметра, по которому производится дифференцирование при изучении упруго-пластических процессов можно выбрать любую положительную монотонно возрастающую функцию, например, возрастающую нагрузку. При учете эффектов ползучести таким независимым параметром является физическое время.

Запишем уравнения равновесия модели и, исходя из геометрических соображений (рис. 1), уравнение совместности деформаций в стержнях:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma w \quad (\sigma = P/F, \quad w = v/(h/2)). \quad (2.3)$$

Пусть v_1 и v_2 – вертикальные перемещения концевых точек стержней 1 и 2 соответственно; v – отклонение точки приложения сжимающей силы. Тогда в силу равенства углов отклонения (рис. 2.1), имеем:

$$(v_1 - v_2)/h = (v - v_0)/L \Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma w \quad (\gamma = h/2L). \quad (2.4)$$

При условии постоянства продольной силы вычисляем эйлерову нагрузку для данной модели в *упругой* стадии:

$$(2.3) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma(1 + w), \quad \sigma_2 = \sigma(1 - w);$$

$$(2.4) \Rightarrow \sigma_1/E - \sigma_2/E = \gamma w \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)/E = \gamma w \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sigma w/E = \gamma w \Rightarrow (2\sigma/E - \gamma)w = 0. \quad (2.5)$$

Из соотношения (2.5) следует, что решение $w \neq 0$ возможно, если

$$2\sigma/E - \gamma = 0 \Rightarrow \sigma_3 \Rightarrow \gamma E/2 = Eh/4L. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дает значение эйлерова напряжения. Далее, деформации и напряжения отнесем к соответствующим эйлеровым значениям. Тогда безразмерное эйлерово напряжение $\sigma_3 = 1$.

Уравнения (2.3) и (2.4) продифференцируем по некоторому положительному монотонно возрастающему параметру, характеризующему внешнюю нагрузку:

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}(1 + w) + \sigma \dot{w}, \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}(1 - w) - \sigma \dot{w}, \quad \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 = \gamma \dot{w}. \quad (2.7)$$

Подставляя в условие совместности скоростей деформаций (2.7) выражения (2.2), получим уравнение:

$$\dot{\sigma} w \left(1 + (k_1 + k_2) \frac{E}{2\mu} \right) + \dot{\sigma} (k_1 - k_2) \frac{E}{2\mu} = \dot{w} \left(\gamma \frac{E}{2} - \sigma \left(1 + \frac{E}{2\mu} (k_1 + k_2) \right) \right),$$



левую и правую части которого разделим на эйлерово напряжение $\gamma E/2 = \sigma_\varepsilon$ и запишем уравнение продольного изгиба упругопластической модели Шэнли:

$$\dot{\sigma}w(1 + \alpha(k_1 + k_2)) + \dot{\sigma}\alpha(k_1 - k_2) = \dot{w}\{1 - \sigma(1 + \alpha(k_1 + k_2))\}. \quad (2.8)$$

Здесь напряжение σ – безразмерная величина, $\alpha = E/2\mu = (1 - \sigma_t)/2\sigma_t$, $\sigma_t = E_t/E$ – безразмерное напряжение по касательному модулю – напряжение Шэнли.

При монотонно возрастающих нагрузках фигурная скобка в правой части уравнения (2.8) является убывающей функцией, имеющей при упруго-пластических деформациях вид:

$$1 - \sigma \left(1 + \frac{1 - \sigma_t}{2\sigma_t} \right) \geq 0 \quad (k_1 = 1, k_2 = 0), \quad (2.9)$$

$$1 - \sigma \left(1 + \frac{1 - \sigma_t}{\sigma_t} \right) \geq 0 \quad (k_1 = 1, k_2 = 0), \quad (2.10)$$

причем (2.9) принимает нулевое значение при

$$\sigma = \frac{2E_t}{E + E_t} = \sigma_k - \text{напряжение Кармана,}$$

а (2.10) обращается в нуль при $\sigma = \sigma_t$.

Считаем, что начальная неправильность $w_0 > 0$. Тогда очевидно, что $\text{sgn } w = \text{sgn } w_0$.

Условимся говорить, что квазистатическая постановка *корректна*, если решение уравнения (2.8) имеет характер: $w > 0$, $\dot{w} > 0$ [29].

Рассмотрим, используя уравнение (2.8), различные постановки.

1) Продольный изгиб упругого стержня в условиях продолжающегося нагружения ($\dot{\sigma} > 0$, $k_1 = k_2 = 0$):

$$(2.8) \Rightarrow \dot{\sigma}w = \dot{w}(1 - \sigma); \quad w = w_0 \text{ при } \sigma = 0 \quad w = w_0/(1 - \sigma), \quad (2.11)$$

отсюда: $\lim_{\sigma \rightarrow 1} w = \infty$, т.е. эйлерова сила такова, что, при стремлении $P \rightarrow P_\varepsilon$, прогиб стремится к «бесконечно большому» значению – интенсивно возрастает.

Если $w_0 = 0$, то отличный от нуля прогиб возможен лишь при $\sigma = 1$ (наряду с тривиальным решением).

Таким образом, бифуркация в смысле Эйлера возможна при нагрузке, равной эйлеровой, как при постоянном, так и при продолжающемся нагружении.

Далее считаем, что выполняется неравенство

$$\sigma_* < \sigma_t = E_t/E. \quad (2.12)$$

2) Постановка Кармана. Пусть в процессе возрастания нагрузки принимаются меры по предотвращению возможности выпучивания [30, 31]. Ищем такую постоянную силу, при которой наряду с тривиальным решением возможен переход к нетривиальной форме равновесия: $\dot{w} > 0$.



Так как стержень 1 все время находится в состоянии активного нагружения, то $k_1 = 1$. Имеем из (2.8) ($\sigma = \sigma_0, \dot{\sigma} = 0$):

$$\dot{w}(1 - \sigma_0(1 + \alpha(1 + k_2))), \quad w_0 = 0. \quad (2.13)$$

Если искомая постоянная сила существует, то в момент перехода к соседней равновесной форме имеем:

$$\sigma_2 > 0, \quad \dot{\sigma}_2 = -\sigma_0 \dot{w} < 0 \Rightarrow \sigma_2 \dot{\sigma}_2 < 0 \Rightarrow k_2 = 0.$$

Поэтому

$$(2.8) \Rightarrow 1 - \sigma_0(1 + \alpha) = 0 \Rightarrow \sigma_0 = 2E_t/(E + E_t) = \sigma_k. \quad (2.13)$$

Назовем это безразмерное напряжение (безразмерную нагрузку) *кармановым напряжением* (*кармановой нагрузкой*).

Итак, в случае упругого стержня (при $\dot{\sigma} = 0$ и $\dot{\sigma} > 0$) и упруго-пластического (при $\dot{\sigma} = 0$) осуществляется бифуркация в смысле Эйлера при $\sigma = \sigma_{\text{Э}} = 1$ и $\sigma = \sigma_k < 1$ соответственно.

Имеем соотношения между напряжениями по Эйлеру, Карману и Шэнли:

$$\sigma_t < \sigma_k < 1 \quad (\forall E_t < E) \quad (2.14)$$

3) Постановка Шэнли. Исследуем поведение идеального стержня под действием возрастающей нагрузки: $\dot{\sigma} > 0$.

Пусть $\sigma_i > \sigma_*$ и в обоих стержнях происходит нагружение: $k_i = 1, i = 1, 2$. Поэтому

$$(2.8) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\sigma} w(1 + 2\alpha) = \dot{w}(1 - \sigma(1 + 2\alpha)); \\ w = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma_*. \end{cases} \quad (2.15)$$

Задача (2.15) имеет тривиальное решение до тех пор пока $1 - \sigma(1 + 2\alpha) \neq 0$, т.е. $\sigma < E_t/E = \sigma_t$.

Возможность появления нетривиальной формы равновесия могла бы осуществиться только при $\sigma = \sigma_t$. Однако бифуркации в смысле Эйлера не произойдет, потому что в момент перехода к соседней форме равновесия уравнение (2.15) теряет силу, ибо $k_2 = 0$, вследствие изменения знака скорости деформации во втором стержне (второй стержень при появлении изгиба неизбежно подвергается растяжению):

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} + \frac{\dot{\sigma}_2}{\mu} < 0 \Rightarrow \dot{\sigma}_2 < 0 \Rightarrow \sigma_2 \dot{\sigma}_2 < 0.$$

Следовательно, во втором стержне реализуется состояние *разгрузки*.

Если при $\sigma \geq \sigma_t$ начнется продольный изгиб, то процесс будет описываться решением задачи:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} w(1 + \alpha) + \alpha \dot{\sigma} = \dot{w}(1 - \sigma(1 + \alpha)); \\ w = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma_t. \end{cases} \quad (2.16)$$

Отсюда получим

$$w = \alpha \frac{\sigma - \sigma_t}{1 - \sigma(1 + \alpha)}.$$



Предположив, что материал абсолютно упруг при растяжении, получим результат Шэнли–Работнова [13, 30, 31]: $w \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_k$, рис. 3.3.

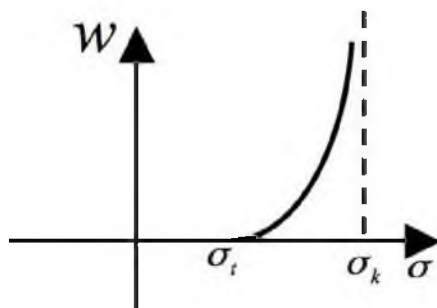


Рис. 3.

При рассмотрении обычной схемы $\sigma \sim \varepsilon$ (без учета эффекта Баушингера) решение задачи (2.16) описывает процесс продольного изгиба до тех пор, пока $\sigma_2 = \sigma(1 - w) > -\sigma_*$, после чего имеем:

$$|\sigma_2| > \sigma_*, \quad \sigma_2 < 0, \quad \dot{\sigma}_2 < 0 \Rightarrow \sigma_2 \dot{\sigma}_2 > 0 \quad \text{и} \quad k_1 = 1.$$

Изгиб описывался бы уравнением (2.15), в правой части которого множитель \dot{w} при принял бы отрицательное значение:

$$1 - \sigma(1 + 2\alpha) < 0, \quad \text{так как} \quad \sigma > \sigma_t.$$

При этом $\dot{w} < 0$ и квазистатическая постановка теряет *корректность*. В работе [32] показано, что при этом нарушаются условия равновесия модели.

Итак, квазистатический продольный изгиб заканчивается при $\sigma \leq \sigma_k$ с конечной скоростью и конечным прогибом, рис. 4.

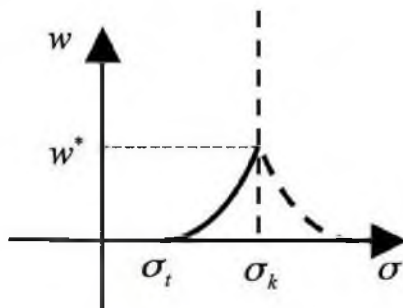


Рис. 4.

Можно показать, что при малых начальных прогибах $w_0 \sim 0,1$ напряжение $\tilde{\sigma}$, при котором

$$\sigma_2 = \sigma(1 - w) = -\sigma_*$$



удовлетворяет неравенствам [29]:

$$\sigma_t < \bar{\sigma} < \sigma_k. \quad (2.17)$$

Неравенства (2.17) существенны для дальнейшего анализа. Сводка результатов некоторых вычислений приведена в табл. 1.

Таблица 1

w_0	σ_*	σ_t	σ_k	$\bar{\sigma}$	W
0,05				0,566	
0,1	0,4	0,45	0,617	0,552	1,89
0,15				0,537	
0,05				0,7	
0,1	0,5	0,6	0,75	0,68	1,835
0,15				0,664	

Отметим, что учет эффекта Баушингера существенных изменений в характер процесса упруго-пластического продольного изгиба не вносит [32].

3. Модель Шэнли в условиях ползучести. При изучении выпучивания стержней при ползучести за критерий «потери устойчивости» (достаточное условие) обычно принимается какая-то характерная особенность кривой «прогиб—время». Например, обращение прогиба в бесконечность при конечном времени [1], точка минимума [2], точка перегиба [33, 34], обращение скорости прогиба в бесконечность (при конечном значении времени) [35, 36].

В настоящем разделе выясним качественный характер процессов выпучивания в зависимости от уровня нагрузки [29].

Примем за основу степенной закон установившейся ползучести с нечетным показателем степени (для упрощения выкладок). Тогда скорости деформаций в стерженьках модели Шэнли выразятся зависимостями:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + \frac{\dot{\sigma}_i}{\mu} + \left(\frac{\sigma_i}{\lambda}\right)^n. \quad (2.18)$$

Здесь λ – постоянная ползучести материала, n – нечетное целое число, либо отношение двух нечетных чисел.

Уравнение равновесия, вывод которого аналогичен выводу уравнения (2.8), получается в виде:

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma} w (1 + \alpha(k_1 + k_2)) + \dot{\sigma} \alpha(k_1 - k_2) + \\ & + \gamma^{-1} \left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma^n \{(1 + w)^n - (1 - w)^n\} = \dot{w} \{1 - \sigma(1 + \alpha(k_1 + k_2))\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Исследуем решение следующей задачи: стержень *мгновенно* (разумеется, квазистатически) нагружается до уровня $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$; выясним влияние величины σ_0 на характер выпучивания.



Нагружаем стержень силой $\sigma_0 = \sigma_t$. Так как при этом $|\sigma_2| < \sigma_*$ (см. неравенство (2.17)), то $k_2 = 0$. Из (2.19) имеем

$$\begin{cases} \gamma^{-1} \left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma_0^n \{(1+w)^n - (1-w)^n\} = \dot{w} \{1 - \sigma_0(1+\alpha)\} \\ w = w^{(*)}|_{\sigma_0=\sigma_t} \quad \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Предполагаем, что изначально стержень имел некоторый прогиб w_0 и величину прогиба $w^{(*)}$ вычислили, решая упруго-пластическую задачу при $\sigma \rightarrow \sigma_t$.

Уравнение (2.20) сохраняет силу до достижения прогибом величины w^* (см. табл. 1), при которой

$$\sigma_2 = \sigma_t(1 - w^*) = -\sigma_*.$$

Время достижения этого прогиба в силу (2.20):

$$t_1^* = \gamma [1 - \sigma_t(1 + \alpha)] \left(\frac{\lambda}{E\sigma_t}\right)^n \int_{w^{(*)}}^{w^*} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n}.$$

При $w > w^*$ имеем $k_1 = 1$, $|\sigma_2| > \sigma_*$, $\dot{\sigma}_2 = -\sigma_t \dot{w} < 0$ и так как $\sigma_2 \dot{\sigma}_2 < 0$, $k_2 = 1$. Следовательно, $k_1 = k_2 = 1$ и поэтому в уравнении выпучивания множитель при \dot{w} в правой части обращается в нуль, в результате, имеем:

$$\dot{w}(t_1^*) = \infty.$$

Потеря устойчивости происходит в смысле Хойфа–Веубеке [21, 22, 35, 36] (см. рис. 5), прогиб конечен, скорость прогиба бесконечна при $t = t_1^*$.

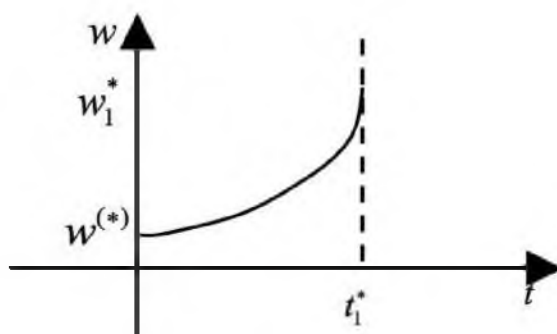


Рис. 5.

Будем нагружать «мгновенно» стержень нагрузкой равной $\sigma_0 = \sigma_t + \delta\sigma$, где $\delta\sigma$ — положительная либо отрицательная величина $|\delta\sigma| \ll \sigma_t$.

1). Пусть $\delta\sigma < 0$. Процесс описывается уравнением (2.20) с начальным условием

$$w = w^{(**)}|_{\sigma_0 < \sigma_t} \quad \text{при } t = 0.$$



Так же, как и выше, уравнение (2.20) сохраняет силу до определенного прогиба $w^{**}(t_2^*)$, при котором во втором стержне достигается предел текучести при растяжении $\sigma_2 = -\sigma_*$. В таком случае задача для уравнения выпучивания имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma^{-1} \left(\frac{E}{\lambda} \sigma_0 \right)^n \{ (1+w)^n - (1-w)^n \} = \dot{w} [1 - \sigma_0(1+2\alpha)], \\ w = w^{(**)}|_{\sigma_0=\sigma_t} \text{ при } t = t_2^*. \end{cases} \quad (2.21)$$

Так как в квадратных скобках справа величина положительная, квазистатическая постановка сохраняет корректность при любой величине прогиба: $\dot{w} > 0$.

Из (2.21) имеем:

$$t = \frac{\gamma}{\sigma_0^n} \left\{ \left(\frac{\lambda}{E} \right)^n \left([1 - \sigma_0(1+\alpha)] \int_{w^{(**)}}^{w^{**}} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n} + [1 - \sigma_0(1+2\alpha)] \int_{w^{**}}^w \frac{dz}{(1+z)^n - (1-z)^n} \right) \right\}.$$

При $w \rightarrow$ и $n > 1$ несобственный интеграл (второе слагаемое в фигурных скобках) сходится и происходит потеря устойчивости в смысле достижения бесконечно большого прогиба за конечное время, t^* — критическое время, см. рис. 6.

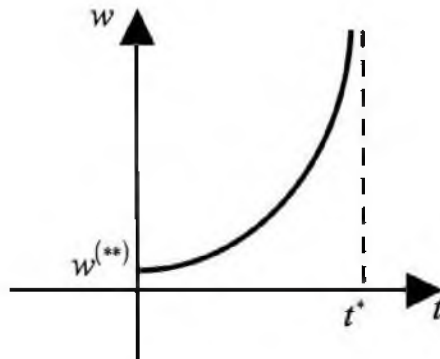


Рис. 6.

2). При $\delta\sigma > 0$ имеем уравнение (2.20), где $\sigma_0 > \sigma_t$. Начальным условием служит мгновенный прогиб w^{***} , соответствующий σ_0 . При $w = w^{***}$ имеем $\sigma_2 = -\sigma_*$. Достижение этого прогиба произойдет за время

$$t_3^* = \frac{\gamma}{\sigma_0^n} \left(\frac{\lambda}{E} \right)^n [1 - \sigma_0(1+\alpha)] \int_{w^{***}}^{w^{***}} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n}.$$



Так как при $w > w^{***}$, имеем $|\sigma_2| > \sigma_*$, то $k_2 = 1$ и выпучивание описывалось бы уравнением (2.21), причем в квадратных скобках справа (множитель при \dot{w}) стояла бы отрицательная константа

$$1 - \sigma_0(1 + 2\alpha) < 0.$$

Отсюда видно, что при времени $t > t_3^*$ квазистатическое рассмотрение становится *некорректным*. Важно подчеркнуть, что (см. рис. 7)

$$0 < \dot{w}(t_3^* - 0) < \infty.$$

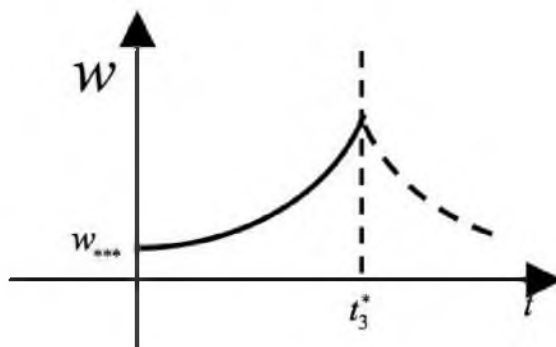


Рис. 7.

Таким образом, процесс выпучивания (кривая $w \sim t$) при $\sigma_0 = \sigma_t$ неустойчив в том смысле, что при любом изменении мгновенно приложенной нагрузки характер выпучивания существенно изменяется.

Литература

1. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость / М: ИЛ, 1956. – 156 с.
2. Rabotnov Ju.N. The theory of creep and its applications // Plasticity. – N.-Y.: Pergamon press, 1960. – 612 с.
3. Макаров Б.П. О поведении сжато-изогнутых стержней в пластической стадии // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1965. – №5. – С.35-37.
4. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума / М.-Л.: ГТТИ, 1934. – 600 с.
5. Лагранж Ж. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Николаи Е.Л. Труды по механике / М.: ГТИ, 1955. – 584 с.
6. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике / М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 402 с.
7. Engesser F. Über Knickfestigkeit gerader Stäbe // Zeitschrift der Architect und Ingenieur Vereinigung zu Hannover. – 1889. – В.35. – S.455.
8. Jasinski F. Zu den Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – В.26;24 (см. Ясинский Ф.С. Избранные труды / М.: ГТИ, 1952. – 428 с.).
9. Engesser F. Über Knickfestigkeit // Schweiz. Bauzeitung. – 1895. – В.26; 24.
10. Kármán Th., von Die Knickfestigkeit gerader Stübe // Physikalische Zeitschrift. – 1908. – В.8, S.136 (см. Kármán Th., von Collected Works. Vol. 1: 1902-1913 / London: Butter Worths Scientific Publications, 1956. – 531 с.).



11. Kármán Th., von Untersuchungen über Knickfestigkeit // Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure. – 1910. – В.81 (см. Collected Works of Th. von Kármán. Vol. 1).
12. Shanley F. The column paradox // Journal of the aeronautical Sciencis (JAS). – 1946. – 13; №12. – P.678.
13. Shanley F. Inelastic column theory // JAS. – 1947. – 14; №5. – P.261-267.
14. Иванов Г.В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях // ПМТФ. – 1961. – №1. – С.47-56.
15. Дюберг Дж., Уайлдер Т. Поведение колонны в области пластических деформаций // Сб. переводов Механика. – 1951. – №5. – С.67-72.
16. Ильюшин А.А. Об упруго-пластической устойчивости конструкции, включающей стержневые элементы // Инж. сборник. – 1960. – XXVII. – С.87-90.
17. Зубчанинов В.Г. Устойчивость стержней как элементов конструкций // Инж. сборник. – 1960. – XXVII. – С.101-113.
18. Ježek K. Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Stahl // Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften in Wien. – Abteilung Pa. – 1934. – В.143; 7. – S.339-366.
19. Лин Т.-Х. Выпучивание неунругой колонны // Сб. Механика. – 1951, №5 – С. 61-83.
20. Ржаницын А.Р. Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов // ДАН СССР. – 1946. – ЛП; №1. – С.25-27.
21. Hoff N.J. Creep Buckling // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – 7; №2. – P.1-20.
22. Veubeke F. Creep Buckling // Chapter 13 in Temperature effects in Aircraft Structures / N.-Y.: Pergamon Press, 1958. – 420 с.
23. Życzowsky M. Creep Buckling // in Creep in Structures / N.-Y.: Academic Press; Springer, 1962. – 375 с.
24. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. – 1957. – 21; №3. – С.406-412.
25. Хофф Н. Выпучивание при высоких температурах // Сб. Механика. – 1958. – №5. – С.63-100.
26. Хофф Н. Обзор теорий выпучивания при ползучести // Сб. Механика. – 1960. – №1. – С.63-96.
27. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
28. Зубчанинов В.Г. Устойчивость / Учебное пособие. Часть 1 / Тверь: Тв. политехн. ин-т, 1995. – 200 с.
29. Ванько В.И. О критериях выпучивания в условиях ползучести // ПМТФ. – 1965. – №2. – С.127-130.
30. Работнов Ю.Н. Соппротивление материалов / М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.
31. Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сборник. – 1952. – XI. – С.123-126.
32. Пановко Я.Г. О критической силе сжатого стержня за пределом пропорциональности // Инж. сб. – 1954. – XX. – С.160-163.
33. Шестериков С.А. О критериях устойчивости при ползучести // ПММ. – 1959. – 23;6. – С.1101-1106.
34. Куршин Л.М. Устойчивость стержней в условиях ползучести // ПМТФ. – 1961, – №6. – С.128-135.
35. Хофф Н. Продольный изгиб при ползучести // Сб. пер. Механика. – М.: ИЛ, 1956, №6. – С.118-134.
36. Де Веубеке Ф. Выпучивание при ползучести // Сб. Влияние высоких температур на авиаконструкции. – М.: Оборонгиз. – 416 с.



**LONGITUDINAL BEND AND SWELLING.
Part I: SHANLEY MODEL**

V.I. Vanko

Bauman MSTU
2d Bauman St., 5, Moscow, 105005, Russia, e-mail: vvanko@mail.ru

Abstract. Some problems of the rod theory in frameworks of approaches proposed by Engesser, Jasinski, Kármán, Shanley, Rabotnov, Plyushin et al It is studied the evolution of sufficiently short rods (quasistatic process) at the elastic-plastic stadium is under consideration and the creep property of its material is taken into account.

Key words: rod model, longitudinal force, stressing, critic values, correctness, quasistatic statement.