MSC 34B05

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Е.Ю. Романова

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, vsu.romanova@gmail.com

Аннотация. Изучается дифференциальный оператор L с инволюцией, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = y'(x) - q(x)y(\omega - x)$ с $q \in L_2[0, \omega]$, и краевыми условиями $y(0) = y(\omega)$. Для исследования спектральных свойств данного оператора применяется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор с инволюцией, подобные операторы, асимптотика спектра, спектральное разложение, равносходимость спектральных разложений.

1. Введение. Пусть $L_2[0, \omega]$– гильбертово пространство суммируемых с квадратом па $[0, \omega]$ комплекснозначпых функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^\omega x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau\,, \qquad x, y \in L_2[0, \omega]\,.$$

Через $W_2^1[0, \omega]$ обозначим пространство Соболева

$$\{y \in L_2[0, \omega] : y\text{– абсолютно непрерывна и } \dot{y} \in L_2[0, \omega]\}\,.$$

Рассмотрим оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0, \omega] \mapsto L_2[0, \omega]\,,$$

порожденный дифференциальным выражением [1]

$$l(y) = y'(x) - q(x)y(\omega - x)\,, \qquad x \in [0, \omega]\,, \quad q \in L_2[0, \omega]\,, \tag{1}$$

с областью определения

$$y \in D(L) = \{y \in W_2^1[0, \omega] : y(0) = y(\omega)\}.$$

Запишем оператор L в виде

$$Ly = L^0y - By\,, \tag{2}$$

где $(L^0y)(x) = y'(x)$. Оператор $L^{(0)}$ будем называть свободным оператором, играющим роль невозмущенного оператора, а $(By)(x) = q(x)y(\omega - x)$ — возмущения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 13-01-00378, 14-01-31196.

Спектр $\sigma(L^0)$ состоит из собственных значений вида $\lambda_n = 2\pi in/\omega$, $n \in \mathbb{N}$. Каждое собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, является одномерным. Соответствующая собственная функция имеет вид $e_n(t) = \exp\left\{2\pi int/\omega\right\}$. Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{N}$, построенные но одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ для любого $x \in L_2[0,\omega]$ имеют вид $P_n x = (x, e_n)e_n, n \in \mathbb{N}$.

Интерес к изучению оператора L связан с тем, что такие операторы применяются в теории фильтрации. Инволютивное отображение применялось В.А. Плиссом при исследовании субгармонических колебаний, описываемых уравнениями без диссипации [2]. Отметим также, что к обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим простейшую инволюцию, сводятся некоторые геометрические задачи, например, задача Бернулли и Эйлера о взаимных траекториях [3], а также краевые задачи для уравнений в частных производных гиперболического и эллиптического типов, если оператор уравнения допускает факторизацию.

В теории возмущенных линейных операторов при изучении дифференциальных операторов, определяемых краевыми условиями на конечном промежутке, используются разнообразные методы [10]- [11]. В настоящей статье для исследования спектральных свойств оператора L используется метод подобных операторов [4]- [9]. Суть метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора L^0).Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора L.

2. Полученные результаты. Основная идея метода подобных операторов [4]- [9] состоит в следующем. Пусть A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ (он обычно называется невозмущенным оператором), и B — другой оператор, который в некотором смысле «мал» но сравнению с A. При определенных условиях естественно ожидать, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где B_0 имеет несложную но отношению к A структуру. Оказалось, что процедура построения оператора B_0 и оператора преобразования оператора $A - B$ в $A - B_0$ тесно связана с гармоническим анализом линейных операторов из некоторого пространства возмущений оператора A, которому принадлежит и B. Проверка условия подобия операторов $A-B$ и $A - B_0$ обычно приводит к вопросу разрешимости некоторых нелинейных уравнений в пространстве возмущений.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора L, будем рассматривать оператор L в виде $L = A - B$, где свободный оператор $L^0 = A$ будем считать невозмущенным оператором, а B — возмущением.

Пусть $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}[0,\omega]$ — гильбертово пространство определенных на $\mathbb{R}$ комплексных периодических периода ω функций, суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$.

Рассмотрим ограниченные операторы JB, ΓB из $\operatorname{End} L_{2,\omega}$, определяемые формулами

$$JB = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n B P_n\,, \qquad \Gamma B = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega}{2\pi n} \sum_{i-j=n} P_i B P_j\,, \qquad i,j \in \mathbb{Z}\,.$$

Далее, введем последовательности операторов $(J_m B)$, $(\Gamma_m B)$, и трансформаторов (J_m), (Γ_m), $m \in \mathbb{N}$ [8], принадлежащих $\operatorname{End} L_{2,\omega}$ и входящих в допустимую тройку метода подобных операторов [4]:

$$J_m B = P_{(m)} B P_{(m)} + \sum_{|k| \geq m+1} P_k B P_k = J(B - P_{(m)} B P_{(m)}) + P_{(m)} B P_{(m)}\,, \tag{3}$$

$$\Gamma_m B = \Gamma(B - P_{(m)} B P_{(m)})\,, \tag{4}$$

где

$$P_{(m)} = \sum_{k=1}^{m} P_k\,,$$

$$((JB)y)(x) = \frac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} q\Big(\frac{x-s+\omega}{2}\Big) y(s) ds\,, \tag{5}$$

$$((\Gamma B)y)(x) = \frac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} f\Big(\frac{\omega-x-s}{2}\Big) q\Big(\frac{x-s+\omega}{2}\Big) y(s) ds\,, \tag{6}$$

$$((B\Gamma B)y)(x) = \frac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} f\Big(\frac{x-s}{2}\Big) q(x) q\Big(\frac{2\omega-x-s}{2}\Big) y(s) ds\,, \tag{7}$$

$y \in L_{2,\omega}$, $x \in [0,\omega]$, $f(t) = i(t-\omega/2)$, $t \in [0,\omega]$, $f \in L_{2,\omega}$. В таком случае матрицы $(b_{nj}), (c_{nj}), n, j \in \mathbb{N}$, соответственно операторов B и $B\Gamma B$ в рассматриваемом базисе $\{e_n\,; n \in \mathbb{Z}\}$ имеют вид

$$b_{nj} = q_{n+j}\,, \tag{8}$$

$$c_{nj} = \frac{\omega}{2\pi i} \sum_{k \neq j} \frac{q_{n+k} q_{k+j}}{k-j}\,. \tag{9}$$

Используя метод подобных операторов, были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_k B\|_2 < 1$, (т.е. оператор $I + \Gamma_k B$ обратим), где $\Gamma_k B$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ операторов Гильберта-Шмидта, и $\|\Gamma_k B\|_2$ — норма Гильберта-Шмидта, то оператор $L = A - B$ подобен оператору $\widetilde{L} = A - \widetilde{B}$, где*

$$\widetilde{B} = J_k B + (I + \Gamma_k B)^{-1} (B\Gamma_k B - (\Gamma_k B) J_k B)\,, \tag{10}$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_k B) = (I + \Gamma_k B)(A - \widetilde{B})\,.$$

Операторы $J_k B$, $\Gamma_k B$, $B\Gamma_k B$, $(\Gamma_k B)(J_k B)$, $\widetilde{B}$ являются операторами Гильберта-Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. Оператор $\widetilde{B}$ из (10) представим в виде

$$\widetilde{B} = JB + B\Gamma B - (\Gamma B) JB + C\,, \tag{11}$$

где оператор C принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$.

Непосредственно из теоремы 1 получается, что имеет место

Теорема 2. *Возмущенный оператор L является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L)$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \cup \{\sigma_n; n \geq m+1\} \ , \tag{12}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а $\sigma_n, n \geq m+1$ определяются равенствами

$$\sigma_n = i\frac{2\pi n}{\omega} - q_{2n} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(q_{2n+k})^2 + \beta_n \, , \tag{13}$$

где β_n — суммируемая последовательность, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \beta_n \mid < \infty$.

В следующей теореме $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, n \geq m+1$ — спектральные проекторы Рисса, построенные но оператору L и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$, соответственно.

Теорема 3 [8]. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0 :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0 \, . \tag{14}$$

Литература

1. Хромов А.П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2010. – 10:4. – С.17-22.
2. Розовский М.И. Механика уругонаследственных сфер / Сер.«Итоги науки». Упругость и пластичность / М.: Мир, 1967. – 340 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1988. – 512 с.
4. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Воронежский государственный университет, 1987. – 164 с.
5. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – 50:4. – С.435-457.
6. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – 58:4. – С.3-32.
7. Баскаков А.Г. Метод подобных операторов и формулы и регуляризованных следов // Изв. ВУЗов. Сер. матем. – 1984. – №3. – С.3-12.
8. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия математическая. – 2011. – 75:3. – С.4-28.
9. Romanova E.Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the lebesgue spaces // Spectral and evolution problems. – 2011. – 21; 2. – P.185-186.
10. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы / М.: Мир, 1974. – 896 с.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / М.: Мир, 1972. – 740 с.

SIMILAR OPERATORS METHOD AT SPECTRAL ANALYSIS OF DIFFERENTIAL OPERATOR WITH INVOLUTION

E.Yu. Romanova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: vsu.romanova@gmail.com

Abstract. The differential operator L with involution defined by the differential expression $l(y) = y'(x) - q(x)y(\omega - x)$, $q \in L_2[0, \omega]$ and boundary conditions $y(0) = y(\omega)$ is studied. The method of similar operators is used to analyze the spectral properties of the operator. The asymptotic of spectrum and estimates of equiconvergence of spectral decomposition are obtained.

Key words: spectrum of operator, differential operator with involution, similar operators method, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, equiconvergence of spectral decomposition.