MSC 31B10

КРИТЕРИЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА $C(D)$ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, РФ, e-mail: inozemcev.a.i@gmail.com

Аннотация. Получен критерий определенности линейных операторов с многомерными частными интегралами на пространстве непрерывных функций определенных на параллелепипедах $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Ключевые слова: многомерный интеграл Стильтьеса, теорема Радона, оператор с частными интегралами, непрерывность операторов.

1. Введение. Статья содержит условия определенности линейных операторов с многомерными частными интегралами на пространстве $C(D)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Свойства операторов с частными интегралами в различных функциональных пространствах изучались в работах Ю. Апнелля, П. П. Забрейко, А. С. Калитвина, В.А. Калитвина, Е.В. Фроловой и других авторов. Достаточные условия действия в $C(T \times S)$ операторов содержатся в работах [1, 2-4], где T и S — компактные множества в R^m и R^n. Критерии действия линейных операторов с частными интегралами в $C([a, b] \times [c, d])$ приведены в [1, 2, 4], а в общем случае пространства $C(T \times S)$ неизвестны. Неизвестны они и в случае $C(D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n)$, где D_i — компактные множества. Тем не менее, в настоящей статье критерий действия операторов установлен в случае $D_i = [a_i, b_i]$, а при его получении существенную роль играет теорема Радона о представлении линейного непрерывного оператора, действующего в пространстве $C(D)$ в виде многомерного интеграла Стильтьеса.

2. Многомерный интеграл Стильтьеса. Теоремы Рисса и Радона. Пусть в n-мерном пространстве задан параллелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Определим вершину v данного параллелепипеда как точку τ, для которой каждая координата равна либо a_i, либо b_i. Параллелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ можно задать но двум точкам $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ с наименьшими и наибольшими координатами соответственно, поэтому обозначим его $D_{ab} = D$. Пусть на D заданы две ограниченные функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_i \in [a_i, b_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$. Разобьем параллелепипед произвольным образом на части D_k гиперплоскостями $y_i = \tau_{ik_i}$, проходящими через точки $a_i = \tau_{i0} < \tau_{i1} < \ldots < \tau_{im_i} = b_i$, $i = 1 \div n$, где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, k_i — номер точки разбиения τ_{ik_i} i-го отрезка, $k_i = 1, 2, \ldots, m_i$, число всех параллелепипедов D_k равно $\prod\limits_i m_i$. Положим $\lambda = \max \lambda_k$, где λ_k — диаметр параллелепипеда $D_k = \prod\limits_{i=1}^{n} [\tau_{i(k_i-1)}, \tau_{ik_i}] = D_{\tau_{i(k_i-1)}\tau_{ik_i}}$, $k_i = 1, 2, \ldots, m_i$. λ назовем диаметром разбиения. Обозначим $N_k(v)$ количество координат вида $\tau_{i(k_i-1)}$ (левые концы отрезков $[\tau_{i(k_i-1)}, \tau_{ik_i}]$) среди компонент вектора v. Величина $\Delta_k g(\tau) = \sum\limits_v (-1)^{N_k(v)} g(v)$ — приращение функции $g(\tau)$ на прямоугольном параллелепипеде D_k. Сумма берется по всем 2^n вершинам.

Работа поддержана Минобрнауки России (проект №1.4407.2011).

Выберем в каждом параллелепипеде D_k точку $\xi_k = (\xi_{1k_1}, \xi_{2k_2}, \dots, \xi_{nk_n})$, где $\xi_{ik_i} \in [\tau_{i(k_i-1)}, \tau_{ik_i}]$, и составим n- мерную интегральную сумму Стильтьеса

$$\Sigma = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} f(\xi_k)\, \Delta_k g(\tau).$$

Конечный предел интегральных сумм Σ при $\lambda \to 0$ называется интегралом Стильтьеса функции $f(\tau)$ по функции $g(\tau)$ и обозначается

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(\tau)\, dg(\tau) = \lim_{\lambda \to 0} \Sigma = J. \tag{1}$$

Функция $f(\tau)$ в прямоугольном параллелепипеде D интегрируема по функции $g(\tau)$, если интеграл (1) существует.

Пусть функция $g(\tau)$ определена на некотором n-мерном параллелепипеде D. Разобьем прямоугольный параллелепипед произвольным образом на части плоскостями, проходящими через точки $a_i = \tau_{i0} < \tau_{i1} < \ldots < \tau_{i(k_i-1)} < \tau_{ik_i} < \ldots < \tau_{im_i} = b_i$, $i = 1 \div n$. Из абсолютных величин приращений функции $g(\tau)$, отвечающих отдельным частям, образуем сумму

$$v = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} |\Delta_k g(\tau)|\,, \tag{2}$$

где $\Delta_k g(\tau) = \sum\limits_{v} (-1)^{N_k(v)} g(v)$. Если множество сумм (2) ограничено сверху, то функция $g(\tau)$ в прямоугольном параллелепипеде D имеет ограниченное изменение. При этом верхнюю грань этого множества называют полным изменением функции в указанном прямоугольном параллелепипеде и обозначают $V_D g = \sup\{v\}$.

Функции n переменных с ограниченным изменением обладают свойствами, аналогичными свойствам функций одной и двух переменных с ограниченным изменением.

Для n-мерного интеграла Стильтьеса справедливы свойства, аналогичные известным фактам для одномерного и двумерного интеграла Стильтьеса: теоремы о среднем, оценки, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла и другие.

Следующие две теоремы доказываются так же как в [5, 6] при $n = 1$. При $n = 2$ доказательства теоремы Радона приведено в [2, 4].

Пусть $D_{a\xi} = [a_1, \xi_1] \times [a_2, \xi_2] \times \cdots \times [a_n, \xi_n]$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in D$, а $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Теорема 1. *Всякий линейный функционал $f(x)$, определенный на $C(D)$, может быть определен для разрывных функций*

$$\theta_\xi(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in D_{a\xi}\,, \\ 0, & \tau \in D \backslash D_{a\xi} \end{cases}$$

и для всех линейных комбинаций из них,

$$\sum_{l=1}^{p} a_l \theta_{\xi_l}(\tau) \qquad (a_l \text{ – постоянные}),$$

так, что будут соблюдены условия:

1. *Функционал сохраняет свойство дистрибутивности для линейных комбинаций из $\theta_\xi(\tau)$.*

2. *Функционал сохраняет свойство непрерывности в следующей форме: если линейные комбинации из $\theta_\xi(\tau)$ равномерно сходятся к непрерывной функции $x(\tau)$, то п значения функционала для этих линейных комбинаций стремятся к $f(x)$.*

Теорема 2 (Рисс). *Общая форма линейного непрерывного функционала $f(x)$ в пространстве $C(D)$ дается формулой*

$$f(x) = \int\limits_D x(\tau)\, dg(\tau) \tag{3}$$

в виде интеграла Стильтьеса, где $g(\tau)$ – функция с ограниченным изменением, причем $\|f\| \leqslant V_D g$.

Функцию $g(\tau)$, для которой $\|f\| = V_D g(\tau)$, можно определить равенством

$$g(\xi) = \begin{cases} f(x_\xi) & \text{при } \xi \in \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i], \\ 0 & \text{при } \xi \in D \setminus \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i], \end{cases}$$

где

$$x_\xi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \in D_{a\xi}, \\ 0 & \text{при } \tau \in D \setminus D_{a\xi}, \end{cases}; \qquad \xi \in \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\,.$$

Определение. *Функцию $g(t,\tau)$, имеющую ограниченную вариацию по τ при каждом $t \in D$, назовем слабо непрерывной по t, если для любой последовательности t_p точек из D, сходящейся к t, и любой непрерывной функции $x(\tau)$, выполняется равенство*

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t_p, \tau) = \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t, \tau)\,. \tag{4}$$

Теорема 3 (Радон). *Линейный непрерывный оператор A, действующий в пространстве $C(D)$, допускает представление в виде многомерного интеграла Стильтьеса*

$$(Ax)(t) = \int\limits_D x(\tau)\, dg(t, \tau), \tag{5}$$

где $g(t,\tau)$ — функция с ограниченным изменением но τ и слабо непрерывная но t.

□ Необходимость. Если A — линейный непрерывный оператор на $C(D)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in D$ — произвольным образом фиксированная точка, то $A(t)x \equiv (Ax)(t)$ — линейный непрерывный функционал на $C(D)$, для которого по теореме Рисса существует функция $g(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ такая, что

$$A(t)x \equiv (Ax)(t) = \int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t, \tau)\,.$$

При изменении t в D значение непрерывной функции $A(t)x$ определится последним равенством, т.е. линейный непрерывный оператор A допускает представление в виде интеграла Стильтьеса от функции $x(\tau)$ с интегрирующей функцией $g(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ. Осталось показать слабую непрерывность функции $g(t,\tau)$ но t. Так как $(Ax)(t)$ — непрерывная на D функция, то $\forall t, t_p \in D$, где t_p, $p \in \mathbb{N}$ — последовательность сходящаяся к t, имеем $\lim\limits_{p\to\infty}(Ax)(t_p) = (Ax)(t)$, или

$$\lim_{p\to\infty}\int_D x(\tau)\,d_\tau g(t_p,\tau) = \int_D x(\tau)\,d_\tau g(t,\tau),$$

то есть, $g(t,\tau)$ слабо непрерывна но t.

Достаточность. Пусть в равенстве (5) функция $g(t,\tau)$ имеет ограниченную вариацию по τ и слабо непрерывна по t. Покажем, что A — линейный непрерывный оператор на $C(D)$. Пусть $x(\tau)$ — непрерывная на D функция. При каждом $t \in D$ интеграл в правой части (5) конечен, так как функция $g(t,\tau)$ имеет ограниченное изменение по τ при фиксированном t. Тогда равенством (5) определен оператор A на $C(D)$. Из слабой непрерывности $g(t,\tau)$ по t, получаем $(Ax)(t_p) \to (Ax)(t)$ при $t_p \to t$, где $t_p \in D$, $t \in D$. Следовательно, оператор A непрерывные функции переводит в непрерывные, т.е. оператор A действует в $C(D)$. Из свойств интеграла Стильтьеса вытекает линейность оператора A. Покажем, что оператор A ограничен. Пусть снова $t \in D$ — произвольным образом фиксированная точка. Тогда, по теореме Рисса, функционал

$$A(t)x \equiv (Ax)(t) = \int_D x(\tau)\,d_\tau g(t,\tau)$$

непрерывен на $C(D)$ и найдется функция $\hat{g}(t,\tau)$ ограниченной вариации по τ такая, что

$$A(t)x \equiv (Ax)(t) = \int_D x(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t,\tau)$$

и $\|A(t)\| = V_D\hat{g}(t,\cdot) = V(t)$. Из равномерной ограниченности функции $V(t)$ по t на D, вытекает неравенство $V(t) \le V$ при $\forall t \in D$. В предположении противного, в прямоугольнике D существует последовательность точек $t_p \to t_0 \in D$, в которой $V(t_p) \to \infty$. Так как при каждом p

$$A(t_p)x \equiv (Ax)(t_p) = \int_D x(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t_p,\tau)$$

— непрерывный линейный функционал с нормой $\|A(t_p)\| = V(t_p) \to \infty$ при $p \to \infty$, то, по принципу сгущения особенностей [7], существует непрерывная на D функция $\phi(\tau)$, для которой

$$|A(t_p)\phi| = \left|\int_D \phi(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t_p,\tau)\right| \to \infty\,.$$

Тогда

$$\left|\int_D \phi(\tau)\,d_\tau g(t_p,\tau)\right| = \left|\int_D \phi(\tau)\,d_\tau \hat{g}(t_p,\tau)\right| \to \infty\,,$$

что противоречит слабой непрерывности по t в точке t_0 функции $g(t,\tau)$.

Учитывая, что $V(t) \le V$ для любой точки $t \in D$, и используя свойства интеграла Стильтьеса, получим

$$|(Ax)(t)| = \left|\int\limits_D x(\tau)\, d_\tau g(t,\tau)\right| = \left|\int\limits_D x(\tau)\, d_\tau \hat{g}(t,\tau)\right| \le$$

$$\le V_D \hat{g}(t,\cdot)\|x\| = V(t)\|x\| \le V\|x\|.$$

Тогда $\|Ax\| = \max\limits_D |(Ax)(t)| \le V\|x\|$ и ограниченность оператора A доказана. ■

3. Линейные операторы с многомерными частными интегралами.

Определение 3. *Линейным оператором с многомерными частными интегралами называется оператор*

$$(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum_{i=2}^{2^n} \int_{D_i} k_i(t,S_i)x(s_i)\, dS_i\,, \tag{6}$$

где $k_i\colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}$ — подмножества множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{2^n} = \tau$. S_i и dS_i — набор переменных τ_j из T_i и их дифференциалов $d\tau_j$ соответственно. Вектор s_i получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами T_i. D_i — декартово произведение множеств $[a_j, b_j]$, на которых определены $\tau_j \in T_i$.

Будем использовать и другую форму записи оператора K

$$(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum_\alpha \int_{D_\alpha} k_\alpha(t,S_\alpha)x(s_\alpha)\, dS_\alpha\,, \tag{6*}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, причем α_j принимает значение 0 или 1 при $j = 1, \ldots, n$, $D_\alpha = \prod\limits_{j=1}^n [a_j, b_j]^{\alpha_j}$. В случае $[a_k, b_k]^0$ отрезок $[a_k, b_k]$ исключен из декартова произведения. Если в формуле (6) порядок множеств D_i, ($i = \overline{1, 2^n}$) условный, то в (6^*) порядок определяется мультииндексом α по элементам α_j.

Теорема 4 [1-4]. *Если оператор K действует в $C\,(D)$, то он непрерывен.*

Будем говорить,что измеримая функция $k_i(t, S_i)$ принадлежит $C(L^1(D_i))$, если

$$\sup_D \int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i)|\, dS_i = L_i < \infty$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|t - t^0\| < \delta$ следует

$$\int\limits_{D_i} |k_i(t,S_i) - k_i(t^0,S_i)|\, dS_i < \varepsilon\,.$$

Теорема 5 [1-4]. *Пусть функция $k_1(t)$ непрерывна на D и $k_i(t,S_i) \in C(L^1(D_i))$ при $i = 2, 3, \ldots, 2^n$. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Теорема 5 справедлива в случае непрерывности функций $k_i(t,S_i)$, ее частным случаем является

Теорема 6 [1, 4]. *Пусть* $\|k_i(t,\cdot)\|_{L^{p_i}} \le A_i < \infty$ $(1 < i \le 2^n)$, *где* $t \in D$, $1 < p_i < \infty$, A_i — *некоторые постоянные, и пусть ядра* $k_i(t,S_i)$ *имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей* $\tau_{S_i} = \varphi_{S_i}(t)$, *где* τ_{S_i} — *набор* τ_j *из подмножества* T_i *множества* $\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\}$, $\varphi_{S_i}(t)$ — *набор непрерывных функций* $\varphi^j_{S_i}(t)$ *таких, что* $T_i \ni \tau_j = \varphi^j_{S_i}(t)$. *Тогда ядра* $k_i(t,S_i)$ *принадлежат* $C(L^1(D_i))$.

4. Критерий действия линейных операторов с многомерными частными интегралами. Теоремы 5 и 6 содержат достаточные условия действия в $C(D)$ оператора K. Приведем необходимые и достаточные условия возможности его действия в $C(D)$. При получении таких условий существенную роль играет теорема Радона.

Рассмотрим всюду плотное в $C(D)$ множество линейных комбинаций функций

$$x_\alpha = \prod_{j=1}^{n} x_{\xi_j}^{\alpha_j}(\tau_j)\,, \qquad x_{\xi_j}(\tau_j) = \begin{cases} \xi_j - \tau_j & \text{при } \tau_j \le \xi_j\,, \\ 0 & \text{при } \tau_j > \xi_j\,. \end{cases}$$

и формулу интегрирования но частям

$$\int\limits_D f(\tau)\,dg(\tau) = \sum_{i=1}^{2^n} (-1)^{\dim D_i} \left\{ \int\limits_{D_i} g(\tau)\,df(\tau)\Big|_{\overline{D}_i} \right\},$$

где $D_i = \prod [a_j, b_j]$, $1 \le j \le n$, $D_1 = \varnothing$, $D_2 = [a_1,b_1]$, $D_3 = [a_2,b_2]$, $\ldots$, $D_{n+1} = [a_n,b_n]$, $D_{n+2} = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] = D_2 \times D_3$ и т.д., $D_i \times \overline{D}_i = D$, причем первое слагаемое в равенстве (при $i=1$) имеет вид $(g(\tau)f(\tau))|_D = \{(g(\tau)f(\tau))|_{a_1}^{b_1}\cdots\}\Big|_{a_n}^{b_n} = \Delta_D(gf)$. В дальнейших рассуждениях будем использовать приведенную формулу в виде

$$\int_D f(\tau)\,dg(\tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_\alpha} \left\{ \int_{D_\alpha} g(\tau)\,df(\tau)\Big|_{\overline{D}_\alpha} \right\},$$

где $D_\alpha \times \overline{D}_\alpha = D$. Применение формулы интегрирования по частям дает следующие равенства:

$$\begin{gathered} \int\limits_D 1\,dg(\tau) = \Delta_D g(\tau) = B, \\ \int\limits_D x_\alpha\,dg(\tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_{\alpha_{a\xi}}} \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_{a\xi}}} g(\tau)\,dx_\alpha \Bigg|_{\overline{D}_{\alpha_{a\xi}}} \right\} = B_\alpha\,, \end{gathered} \tag{7}$$

где $D_{\alpha_{a\xi}} = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j,\xi_j]^{\alpha_j}$, $D_{\alpha_{a\xi}} \times \overline{D}_{\alpha_{a\xi}} = D_{a\xi}$. $D_{a\xi}$ — параллелепипед, вершинами с наименьшими и наибольшими координатами которого являются соответственно точки a и ξ, координаты остальных $2^n - 2$ вершин получаются комбинацией координат точек a и ξ.

Пусть

$$g(t,\tau)=k_1(t)\chi(t,\tau)+\sum_\alpha \int\limits_{D_{\alpha_{a\tau}}} k_\alpha(t,\bar S_\alpha)\,d\bar S_\alpha\,\chi(s_\alpha\setminus S_\alpha,\tau\setminus S_\alpha), \tag{8}$$

где $D_{\alpha_{a\tau}}=\prod\limits_{j=1}^{n}[a_j,\tau_j]^{\alpha_j}$, $\alpha_j=0$ или 1; $\bar S_\alpha$ — набор переменных интегрирования $\bar\tau_j$,

$$\chi(s_\alpha\setminus S_\alpha,\tau\setminus S_\alpha)=\begin{cases}1, & \forall j\ \tau_j\ge t_j>a_j \text{ или } \tau_j>t_j=a_j,\\ 0, & \exists j\ \tau_j<t_j \text{ или } \tau_j=t_j=a_j.\end{cases}$$

Очевидно, что $g(t,v_k)=0$ $(k=1,\dots,2^n-1)$, где v_k — вершины параллелепипеда $D=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, при $k=2^n$ $v_{2^n}=b$,

$$g(t,b)=k_1(t)+\sum_\alpha\int\limits_{D_\alpha}k_\alpha(t,S_\alpha)\,dS_\alpha\,.$$

Подставляя функцию (8) в формулы (7), получим

$$B(t)=k_1(t)+\sum_\alpha\int\limits_{D_\alpha}k_\alpha(t,S_\alpha)\,dS_\alpha\,,$$

$$B_\alpha(t)=\int\limits_D x_\alpha\,dg(\tau)=\sum_\alpha(-1)^{\dim D_{\alpha_{a\xi}}}\left\{\int\limits_{D_{\alpha_{a\xi}}} g(t,\tau)\,dx_\alpha\Big|_{\bar D_{\alpha_{a\xi}}}\right\}. \tag{9}$$

Пусть

$$\gamma(t)=|k_1(t)|+\sum_\alpha\int\limits_{D_\alpha}|k_\alpha(t,S_\alpha)|\,dS_\alpha\,. \tag{10}$$

Теорема 7. *Линейный оператор K действует в пространстве $C(D)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном τ функции $B(t)$ и $B_\alpha(t)$ непрерывны, а функция $\gamma(t)$ ограничена. При выполнении этих условий оператор K непрерывен и его норма определяется равенством*

$$\|K\|=\sup_D\gamma(t)\,. \tag{11}$$

□ Пусть оператор K действует в $C(D)$. Тогда по теореме 4 он непрерывен в $C(D)$, а по теореме 3 допускает представление в виде многомерного интеграла Стильтьеса

$$(Kx)\,(t)=\int\limits_D x(\tau)\,dg(t,\tau)\,,$$

где функции $g(t,\tau)$ определяется равенством (8), имеет ограниченную вариацию по τ и слабо непрерывна по t. Так как функция $g(t,\tau)$ слабо непрерывна по t, то функция (9) непрерывна, а ограниченность ее вариации по τ и равенства $V_D g(t,\tau)=\gamma(t)$ влечет ограниченность функции γ. Для доказательства равенства $V_D g(t,\tau)=\gamma(t)$ выберем точки $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ и $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ такие, что $p_i<t_i<q_i$, где $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ — фиксированная внутренняя точка из D, т.е. $D_{ap}\subset D_{at}\subset D_{aq}$, тогда параллелепипед D точками p и q разбивается на 3^n параллелепипедов: $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{3^n}$. Полная вариация функции g на D будет равна сумме полных ее вариаций на полученных параллелепипедах разбиения $V_D g=\sum\limits_{k=1}^{3^n}V_{D_k}g$. Учитывая формулу [8]

$$V_D F=\int\limits_D|f(\tau)|\,d\tau,\quad \text{где } F(t)=\int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau\,,$$

где $f(\tau)$ — суммируемая функция на D, и вычисляя $V_{D_k}g$ $(k=1,2,\ldots,3^n)$ при условии, что $p_i\to t_i$, $q_i\to t_i$ $(p\to t,\ q\to t)$, получим равенство

$$V_D g=\lim_{p,\,q\to t}\sum_{k=1}^{3^n}V_{D_k}g=|k_1(t)|+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j=0}^{1}\sum_{\beta_j=0}^{1}\int\limits_{D_{(\alpha,\beta)}}|k_{(\alpha,\beta)}(t,S_{(\alpha,\beta)})|\,dS_{(\alpha,\beta)}\,,\tag{12}$$

где $D_{(\alpha,\beta)}=\prod\limits_{j=1}^{n}\left\{[a_j,t_j]^{\alpha_j}\times[t_j,b_j]^{\beta_j}\right\}$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$. При этом исключается случай $\alpha_j=\beta_j=1$, а также случай $\forall j\ \alpha_j=\beta_k=0$, т.е. существует α_j или β_k равное 1, т.к. при всех нулевых значениях α_j и β_k получим функцию $|k_1(t)|$.

Из равенства (12) следует, что $V_D g=\gamma(t)$. Для доказательства равенства (12) достаточно проверить, что

$$\lim_{p,\,q\to t}V_{D_k}g=\int\limits_{D_{(\alpha,\beta)}}|k_{(\alpha,\beta)}(t,S_{(\alpha,\beta)})|\,dS_{(\alpha,\beta)}.\tag{13}$$

Например, рассмотрим параллелепипед $D_{pq}=\prod\limits_{i=1}^{n}[p_i,q_i]$. Здесь $g(t,\tau)$ определяется равенством (8). Для $\forall\varepsilon>0$ выберем такое разбиение параллелепипеда D_{pq} на части, что $|\upsilon-V_{D_{pq}}g|<\varepsilon/2$, где $\upsilon=\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}\sum\limits_{k_2=1}^{m_2}\ldots\sum\limits_{k_n=1}^{m_n}|\Delta_k g(\tau)|$. Из абсолютной непрерывности интегралов и определения функций χ при $p,q\to t$ получим $|\upsilon-|k_1(t)||<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|V_{D_{pq}}g-|k_1(t)||<\varepsilon$. Таким образом показано, что при $\alpha=(0,0,\ldots,0)$ и $\beta=(0,0,\ldots,0)$ имеет место

$$\lim_{p,\,q\to t}V_{D_{(\alpha,\beta)}}g=\int\limits_{D_{(\alpha,\beta)}}|k_{(\alpha,\beta)}(t,S_{(\alpha,\beta)})|\,dS_{(\alpha,\beta)}=|k_1(t)|\,.$$

Равенство (13) для оставшихся параллелепипедов $D_{(\alpha,\beta)}$ доказывается аналогично. Пусть при каждом фиксированном τ функции (9) непрерывны, а функция (10) ограничена. Тогда функция $g(t,\tau)$ слабо непрерывна по t и имеет ограниченную вариацию по τ, что по теореме Радона влечет непрерывность действия оператора K в $C(D)$. Докажем равенство (11). При фиксированном t $(Kx)(t)$ — функционал на $C(D)$. По теореме Радона, значение

$$\|K\|=\sup_D\|(Kx)(t)\|\,.$$

Покажем, что при фиксированном t имеет место $V_D g(t,\tau) = \|(Kx)(t)\|$. Пусть

$$x_\tau(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \in D_{a\tau}\,, \\ 0 & \text{при } u \in D \setminus D_{a\tau}\,, \end{cases}$$

f — непрерывный линейный функционал на $C(D)$ и

$$g(\tau) = \begin{cases} f(x_\tau) & \text{при } a_j < \tau_j \le b_j \ (j = \overline{1,n})\,, \\ 0 & \text{при других значениях } \tau\,. \end{cases}$$

По теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала на $C(D)$,

$$f(x) = \int\limits_D x(\tau)\, dg(\tau)\,, \text{ причем } \ \|f\| = V_D g\,.$$

При подстановке выше определенных функций x_τ и $g(\tau)$ в $f(x)$ непосредственно проверяется, что при фиксированном t функция $g(\tau)$, порождающая функционал $(Kx)(t)$, принимает вид

$$g(\tau) = k_1(t)\chi_1(t,\tau) + \sum_\alpha \int\limits_{D_{\alpha_{a\tau}}} k_\alpha(t,\bar{S}_\alpha)\, d\bar{S}_\alpha\, \chi_1(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha)\,,$$

где

$$\chi_1(s_\alpha \setminus S_\alpha, \tau \setminus S_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in D_{a\tau}, \\ 0, & \text{при } t \in D \setminus D_{a\tau}. \end{cases}$$

Сравнивая $g(t,\tau)$ и $g(\tau)$ получим, $g(t,\tau) = g(\tau) - \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(\tau_j)$. Тогда $V_D g(t,\tau) = V_D g(\tau)$. Следовательно, $\|(Kx)(t)\| = V_D g(t,\tau)$ и, в силу равенства $V_D g(t,\tau) = \gamma(t)$, $\|K\| = \sup\limits_D V_D g(t,\tau) = \sup\limits_D \gamma(t)$. ■

Представление Радона линейного непрерывного оператора на $C(D)$ не единственно, однако представление оператора K с частными интегралами в виде (6), как следует из доказанной теоремы, единственно.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.
2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.
4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.
5. Гливенко В.И. Интеграл Стильтьеса / М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 216 с.
6. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу / М.: Мир, 1979. – 588 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967. – 624 с.

8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / М.: Наука, 1974. – 480 с.

CRITERION OF ACTION ON $C(D)$ OF LINEAR OPERATORS WITH MULTIDIMENSIONAL PARTIAL INTEGRALS

A.I. Inozemtsev

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: inozemcev.a.i@gmail.com

Abstract. Criterion of definiteness of linear integral operators with multidimensional partial integrals on the space of continuous functions is found on the space $C(D)$ where D are parallelepipeds $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Key words: multidimensional Stieltjes integral, operator with partial integrals, continuity of operators.