КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА И С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

***С.М. Мухсинова, **А.Б. Расулов**

*Худжанд, Таджикистан, e-mail: mirzodaler@mail.com
**Москва, Россия, rasulov-abdu@rambler.ru

Аннотация. Представлена теорема о разрешимости эллиптической граничной задачи с операторами Коши-Римана, которые сингулярны на границе области.

Ключевые слова: задача Коши-Римана, эллиптические уравнения на плоскости, сингулярные условия.

Пусть $S^+ = \{(x,y) : y > 0, -\infty < x < +\infty\}, L = \{(x,y) : y = 0, -\infty < x < +\infty\}$. В области $S^+_\varepsilon = \{(x,y) : y > \varepsilon, -\infty < x < +\infty\}$ рассмотрим уравнение с сингулярной линией вида

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\partial_{\overline{z}} - \frac{a_j(z)}{z-\overline{z}}\right)U = f(z)\,, \qquad m = 1,2,3\,; \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$—оператор Коши-Римана, $a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{S^+}), j = \overline{1,3}, U(z)$ – искомая функция $F(z) \in L^{p,2}(S^+), p > 2$ — фиксированные заданные функции.

Необходимую информация по истории развитии уравнения (1) и методика исследования граничных задач изложена в [1-6]. В дальнейшем для компактного изложения материала введем следующие обозначения:

$$L_j \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{z}} - \frac{a_j(z)}{|\overline{z}-z|^n}\,; \qquad (Ta_j)(z) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{(a_j(\zeta) - a_j^0(\zeta))d\xi d\eta}{|\zeta-\overline{\zeta}|^n(\zeta - z)}\,; \quad j = 1,2,3. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) функции $a_j(z) \in C^2(S^+), j = 1,2,3$ ограничены в $\overline{S^+}$, и в окрестности ∂S^+ удовлетворяют условиям*

$$1) \quad a_j(z) - a_j^0(z) = O(1)|z-\overline{z}|^{\gamma_j}\,, \qquad \gamma_j > n, \;\; 1 \le j \le 3\,. \tag{3}$$

Кроме того, функции $a_j(z), 1 \le j \le 3$ таковы, что выполнено условия:

$$2) \quad a_j(z) - a_j^0(z) = O(1)|\overline{z}-z|^{\gamma_j}\,, \qquad \gamma_j > 0, \;\; y \to 0, \;\; 1 \le j \le 3\,; \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}a_1^0 > \mathrm{Re}a_2^0 > \mathrm{Re}a_3^0 > 0\,, \qquad y \to 0\,, \tag{5}$$

$$a_j(z) = o(|z|^{\varepsilon_j})\,, \quad \varepsilon_j > 1\,, \quad y \ne 0, |z| \to \infty\,, \;\; 1 \le j \le 3\,; \tag{6}$$

$$|\overline{z}-z|^{a_3-3}f(z) \in L^{p,2}(S^+)\,, \qquad p > 2\,. \tag{7}$$

Тогда и для любых функций $\Phi_j(z) \in C(S^+ \bigcup \partial S^+)$, $\Phi_j(z) = o(r^{-2})$, $r \to \infty, 1 \le j \le 3$, *аналитических в области* S^+ *формула*

$$U(z) = |\overline{z} - z|^{a_1} e^{(T(a_1))(z)} \Bigg(\Phi_1(z) + \Bigg(T\Big(|\overline{z} - z|^{\beta} e^{(T(q_\beta))(\zeta)} \Phi_2(\zeta) \Big) \Bigg)(z) -$$

$$\Bigg(T\Big(\big(K_{a_1}(\zeta) - K_{a_1}(z)\big) |\overline{z} - z|^{a_1(\zeta_1) - a_3(\zeta_1)} e^{-(T(q_{a_1 - a_3}))(\zeta)} \Phi_3(\zeta) \Big) \Bigg)(z) +$$

$$\Bigg(T\Big(\big(K_{a_1, a_2 - a_3}(t) - K_{a_1, a_2 - a_3}(z)\big) |\overline{t} - t|^{a_3(t) - 3} e^{-(T(q_{a_3}))(\zeta)} f(\zeta) \Big) \Bigg)(z)$$

определяет решение уравнения (1) из класса $D^{3,p}(S^+ \backslash L)$, *где*

$$K_{a_1}(t) = T(|\zeta - \overline{\zeta}|^{a_1} e^{T_{a_1}})(t)\,, \quad \beta = a_1 - a_2\,,$$

$$K_{a_1, a_2 - a_3}(z) = T((K_{a_1}(t) - K_{a_1}(z)) |\zeta - \overline{\zeta}|^{a_2 - a_1} e^{T_{a_2 - a_3}(\zeta)})(z)\,.$$

В дальнейшем, в основном будем пользоваться классом функций $D^{j,p}(S^+), p > 2$, $j = 1, 2, 3$, имеющих обобщенную производную j-го порядка но $\overline{z}$, ограниченных при $r \to \infty$ по любым направлениям. В работе найдено интегральное представление решений уравнения (1) и исследована задача типа Римана -Гильберта.

Задача типа Римана-Гильберта. Задача Римана-Гильберта состоит в том, что требуется найти решение $U(z) \in D^{3,p}(S^+)$ уравнения (1) но заданному краевому условию

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}[\lambda_1 |z - \overline{z}|^{-a_1} U]_{\partial S^+} = g_1(t)\,, \\ &\mathrm{Re}[\lambda_2 |z - \overline{z}|^{-a_2} L_1 U]_{\partial S^+} = g_2(t)\,, \\ &\mathrm{Re}[\lambda_3 |z - \overline{z}|^{-a_3} L_2 L_1 U]_{\partial S^+} = g_3(t)\,, \end{aligned} \tag{G}$$

где функция $\lambda_j(t) = \alpha_j(t) + i\beta_j(t) \in H(\partial S^+)$, причем $\lambda_j(t) \ne 0, t \in \partial S^+$, $g_j(t) = o(|t|^{-h_j})$, $h_j > 0, j = 1, 2, 3$.

Наш результат состоит в следующем:

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 п условий задача* G. *Если* $æ_k = \mathrm{Ind} G_k(t) \ge 0, k = \overline{1,3}$, *то задача* $(1) - (G)$ *на полуплоскости безусловно разрешима п её решение содержит* $\sum\limits_{j=1}^{3} æ_j + 3$ *произвольных постоянных. Если для какого-нибудь* $k = k_0$, $æ_{k_0} < -1$, *а для остальных номеров* $æ_k \ge 0$, *то задача* $(1) - (G)$ *разрешима лишь при выполнении* $-æ_{k_0} - 1$ *условий разрешимости, и ее решение зависит от* $\sum\limits_{k=1}^{3} æ_k + 2 - æ_{k_0} \ge 0$ *произвольных постоянных. Если* $æ_k = -1, k = \overline{1,3}$, *тогда задача* $(1) - (G)$ *разрешима, безусловно.*

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963. – 184 с.
5. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости / Изв. РАН. – 2006. – 70,№6. – С.161-192.
6. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. – 236 с

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDARY PROBLEMS FOR EQUATIONS WITH CAUCHY-RIEMANN OPERATORS AND WITH SINGULAR LINE ON HALF-PLANE

***S.M. Mukhsinova, **A.B. Rasulov**

*Khujand, Tajikistan, e-mail: mirzodaler@mail.com
**Mscow, Russia, rasulov-abdu@rambler.ru

Abstract. The solubility theorem of elliptic boundary problem with Cauchy-Riemann's operators which are singular at the domain boundary is proposed.

Key words: Cauchy-Riemann's problem, elliptic equations on plane, singular conditions.