MSC 49J30

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Г.Д. Садритдинова

Томский государственный архитектурно-строительный университет,
Соляная пл., 2, Томск, 634003, Россия, e-mail: dolina1@sibmail.com

Аннотация. Изучаются функционалы от функций комплексного переменного, зависящие от значения функции и её производных в фиксированной точке. В работе параметрическим методом установлены управляющие функции в уравнении Лёвнера, приводящие к граничным функциям, связанным с такими функционалами на классе голоморфных однолистных в круге p-симметричных функций.

Ключевые слова: функционалы, граничные функции, управляющие функции, уравнение Лёвнера.

1. Введение. Пусть S_p, $p = 1, 2, \ldots$ — класс голоморфных однолистных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \ldots$, отображающих E на области, имеющие p-кратную симметрию вращения относительно нуля, т.е. таких что

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}} z\right) = e^{i\frac{2\pi k}{p}} f(z), \quad k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Плотный подкласс класса S_p образуют функции $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(z,\tau)$, где $\zeta(z,\tau)$ — решение уравнения Лёвнера

$$\frac{d\zeta(z,\tau)}{d\tau} = -\zeta(z,\tau)\frac{\mu^p(\tau) + \zeta^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau) - \zeta^p(z,\tau)}, \quad \zeta(z,0) = z, \quad |z| < 1, \quad 0 \le \tau < \infty, \tag{1}$$

в котором управляющая функция $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, является непрерывной или кусочно-непрерывной на $[0, \infty)$.

Функционалы, зависящие от значения функции и её производных в фиксированной точке области задания, являются объектом исследования в различных экстремальных задачах, главной из которых является нахождение множества значений таких функционалов. Подобные функционалы изучались Л. Бибербахом, Г.М. Голузиным, И.Е. Базилевичем, П.П. Куфаревым, Н.А. Лебедевым, И.А. Александровым и другими.

Представляет интерес задача об описании управляющих функций в уравнении Лёвнера, приводящих к функциям, вносящим граничные точки в область значений этих функционалов. Такие $\mu(\tau)$ мы называем экстремальными.

В настоящей работе рассматриваются функционалы

$$I_1(f,z) = \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|, \quad I_2(f,z) = \ln\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|, \quad I_3(f,z) = \ln|f'(z)|$$

на классе S_p, для которых параметрическим методом находятся экстремальные управляющие функции $\mu(\tau)$ в уравнении (1). Для функционалов I_1, I_3 экстремальные управляющие функции уже были получены в работах [1]-[3]. Кроме того, в работах [4], [5] были получены экстремальные $\mu(\tau)$ для $\arg f'(z)$ на классах $S = S_1$ и S_p, $p = 2, 3, \ldots$.

2. Параметризация функционалов. Из уравнения (1) имеем

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d\zeta}{d\tau} = -1 - \frac{2\zeta^p}{\mu^p - \zeta^p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\ln e^{\tau}\zeta\right)}{d\tau} = -\frac{2\zeta^p}{\mu^p - \zeta^p} \ . \tag{2}$$

Продифференцировав равенство (2) по z, и обозначая через ζ' производную функции $\zeta(z,\tau)$ по z, будем иметь

$$\frac{d}{d\tau}\ln\frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{2p\zeta^p\mu^p}{\left(\mu^p - \zeta^p\right)^2} \ . \tag{3}$$

Проинтегрировав равенства (2) и (3) по τ, $0 \le \tau < \infty$, получим

$$\ln\frac{f(z)}{z} = -2\int_0^\infty \frac{\zeta^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau) - \zeta^p(z,\tau)}d\tau \tag{4}$$

и

$$\ln\frac{zf'(z)}{f(z)} = -2p\int_0^\infty \frac{\mu^p(\tau)\,\zeta^p(z,\tau)}{\left(\mu^p(\tau) - \zeta^p(z,\tau)\right)^2}d\tau \ , \tag{5}$$

где $f(z) \in S_p$.

Множества значений функционалов $\ln\frac{f(z)}{z}$ и $\ln\frac{zf'(z)}{f(z)}$ не зависят от $\arg z$, поэтому можно считать, что $z = r$, $0 < r < 1$.

Введём обозначения

$$|\zeta(r,\tau)| = \rho(r,\tau) \ , \quad \zeta(r,\tau)\,\bar{\mu}(\tau) = \rho(r,\tau)\,y(r,\tau) \tag{6}$$

и запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d\ln\zeta(r,\tau)}{d\tau} = -\frac{1 + \rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)}{1 - \rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)} \ ,$$

откуда получаем

$$\frac{d\ln\rho}{d\tau} = -\frac{1 - \rho^{2p}}{\left|1 - \rho^p y^p\right|^2} \ , \tag{7}$$

$$i\frac{d\arg\zeta}{d\tau} = -\frac{\rho^p\left(y^p - \bar{y}^p\right)}{\left|1 - \rho^p y^p\right|^2} \ . \tag{8}$$

Из формулы (7) следует, что функция $\rho(\tau)$ монотонно убывает, причём $\rho(r,0) = r$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\rho(r,\tau) = 0$.

Преобразуем функционалы (4) и (5) при $z = r$, применив обозначения (6). Получим

$$\ln\frac{f(r)}{r} = -2\int_0^\infty \frac{\rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)}{1-\rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)}d\tau\,,$$

$$\ln\frac{rf'(r)}{f(r)} = -2p\int_0^\infty \frac{\rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)}{\left(1-\rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)\right)^2}d\tau\,.$$

Заменим в этих интегралах τ на ρ, используя формулу (7). Тогда

$$\ln\frac{f(z)}{z} = 2\int_0^r \frac{\rho^{p-1}y^p}{1-\rho^p y^p}\cdot\frac{-\left|1-\rho^p y^p\right|^2}{1-\rho^{2p}}d\rho = -2\int_0^r \frac{\rho^{p-1}y^p\left(1-\rho^p\bar{y}^p\right)}{1-\rho^{2p}}d\rho =$$

$$= -2\int_0^r y^p\frac{\rho^{p-1}d\rho}{1-\rho^{2p}} - \frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right)\,,$$

$$\ln\frac{rf'(r)}{f(r)} = -2p\int_0^r \frac{\left(y^p-\rho^p\right)\rho^{p-1}}{\left(1-\rho^p y^p\right)\,\left(1-\rho^{2p}\right)}d\rho\,.$$

Вместо кусочно-непрерывной функции $y(r,\rho)$, $|y(r,\rho)| = 1$, $0\le\rho\le r$, введём вещественнозначную функцию $t(r,\rho)$, такую что $y = \left(\dfrac{i+t}{i-t}\right)^{1/p}$. Кроме того, в полученных интегралах сделаем замену переменной, положив $\rho = \left(\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{1/p}$. Будем иметь

$$\ln\frac{f(r)}{r} = \frac{1}{p}\int_\sigma^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\frac{ds}{s} - \frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right) + \frac{2i}{p}\int_\sigma^1 \frac{t}{t^2+1}\frac{ds}{s}\,,$$

$$\ln\frac{rf'(r)}{f(r)} = \int_\sigma^1 \frac{t^2-s^2}{t^2+s^2}\frac{ds}{s} + 2i\int_\sigma^1 \frac{ts}{t^2+s^2}\frac{ds}{s}\,,$$

где $\sigma = \dfrac{1-r^p}{1+r^p}$. Таким образом,

$$I_1(f,r) = \ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| = \int_\sigma^1 g_1(s,t)\,ds - \frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right)\,, \tag{9}$$

где $g_1(s,t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\dfrac{1}{ps}$,

$$I_2(f,r) = \ln\left|\frac{rf'(r)}{f(r)}\right| = \int_\sigma^1 g_2(s,t)\,ds, \tag{10}$$

где $g_2(s,t) = \dfrac{t^2-s^2}{t^2+s^2}\dfrac{1}{s}$.

Очевидно, что

$$I_3(f,r) = \ln\left|f'(r)\right| = \int_\sigma^1 g_3(s,t)\,ds - \frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right)\,, \tag{11}$$

где $g_3(s,t) = g_1(s,t) + g_2(s,t)$.

3. Экстремальные значения функционалов. Каждое из уравнений $(g_i)'_t = 0$, $i = 1, 2, 3$, даёт $t(s) = 0$ и $t(s) = \infty$.

Выполнив интегрирование в (9)-(11) при $t(s) = 0$, получаем

$$I_1 = \ln \frac{1}{(1 + r^p)^{2/p}}, \quad I_2 = \ln \frac{1 - r^p}{1 + r^p}, \quad I_3 = \ln \frac{1 - r^p}{(1 + r^p)^{1+2/p}}.$$

То есть при $t(s) = 0$ функционалы I_1, I_2, I_3 достигают своих минимальных значений [4]. Вычислив теперь интегралы в (9)-(11) при $t(s) = \infty$, находим значения функционалов

$$I_1 = \ln \frac{1}{(1 - r^p)^{2/p}}, \quad I_2 = \ln \frac{1 + r^p}{1 - r^p}, \quad I_3 = \ln \frac{1 + r^p}{(1 - r^p)^{1+2/p}},$$

являющиеся максимальными [4].

4. Экстремальные управления. Восстановим управляющие функции $\mu(\tau)$, приводящие к минимумам функционалов I_1, I_2, I_3.

Берём $t = 0$, следовательно $y = 1^{1/p}$. При таком y уравнение (8) записывается в виде

$$\frac{d \arg \zeta(r, \tau)}{d\tau} = 0, \qquad \arg \zeta(r, 0) = 0.$$

Следовательно, $\arg \zeta(r, \tau) = 0$. Таким образом, $\zeta(r, \tau) = \rho(r, \tau)$, и из формул (6) находим $\bar{\mu} = 1^{1/p}$. Значит, $\mu = 1^{1/p}$ — экстремальные управляющие функции, доставляющие минимальные значения функционалам I_1, I_2, I_3.

Найдём теперь функции $\mu(\tau)$, приводящие к максимумам функционалов I_1, I_2, I_3. При $t = \infty$ имеем $y = (-1)^{1/p}$, и уравнение (8) с начальным условием $\arg \zeta(r, 0) = 0$ даёт $\arg \zeta(r, \tau) = 0$. Используя формулы (6), находим, что $\mu = (-1)^{1/p}$ - экстремальные управляющие функции, приводящие к максимальным значениям функционалов I_1, I_2, I_3.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Экстремальные управляющие функции, приводящие к минимальным значениям функционалов* $I_1(f, z) = \ln |f(z)/z|$, $I_2(f, z) = \ln |z f'(z)/f(z)|$, $I_3(f, z) = \ln |f'(z)|$, *где* $f(z) \in S_p$, $p = 1, 2, \ldots$, *имеют вид* $\mu = 1^{1/p}$. *Экстремальные управляющие функции, приводящие к максимальным значениям этих функционалов, имеют вид* $\mu = (-1)^{1/p}$.

Проинтегрировав уравнение Лёвнера (1) с управлением $\mu = 1^{1/p}$, находим

$$\zeta(z, \tau) = \left[\frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4K_1(z)\, e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(z)\, e^{-p\tau}} \right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_1(z) = \dfrac{z^p}{(1 + z^p)^2}$, и выбираем однозначную ветвь функции ζ в соответствии с условием $\zeta(z,\tau) = e^{-\tau}z + \ldots$. Функция $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(z,\tau) = \dfrac{z}{(1+z^p)^{2/p}}$ является граничной для функционалов I_1, I_2, I_3 на классе S_p, на которой данные функционалы достигают своих минимальных значений.

Проинтегрировав уравнение (1) с $\mu = (-1)^{1/p}$, получаем

$$\zeta(z,\tau) = \left[\frac{\left(1-\sqrt{1+4K_2(z)\,e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(z)\,e^{-p\tau}}\right]^{1/p}$$

где $K_2(z) = \dfrac{z^p}{(1-z^p)^2}$. Однозначная ветвь полученного решения, удовлетворяющая условию $\zeta(z,\tau) = e^{-\tau}z + \ldots$, даёт функцию $f(z) = \dfrac{z}{(1-z^p)^{2/p}} \in S_p$, на которой функционалы I_1, I_2, I_3 достигают своих максимумов.

При $p = 1$ получаем экстремальные управляющие функции для функционалов I_1, I_2, I_3 на классе S.

5. Заключение. Область значений любого функционала, зависящего от $f(z)$ и $f'(z)$, $f(z) \in S_p$, можно получить соответствующим преобразованием области значений системы функционалов $\left\{\ln\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|,\ \arg\dfrac{f(z)}{z},\ \ln\left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right|,\ \arg\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\}$, $f \in S_p$. Исследования по описанию экстремальных управляющих функций, проведённые в данной работе, продолжаются в отношении оставшихся функционалов системы. Полученный результат развивает параметрический метод, являющийся одним из основных методов геометрической теории функций комплексного переменного.

Литература

1. Садритдинова Г.Д. Управляющие функции и модуль производной // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – №299. – С.104-105.
2. Садритдинова Г.Д. Экстремальное управление для модуля производной на классе p-симметричных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2007. – №1. – С.54-57.
3. Садритдинова Г.Д. Экстремальное управление для одного функционала на классах аналитических функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – №2. – С.29-34.
4. Александров И.А. Александров А.И. Экстремальные управляющие функции в уравнении Лёвнера в теореме вращения // ДАН. – 2000. – 371, №1. – С.7-9.
5. Садритдинова Г.Д. Вестник Томского государственного университета. Математика. Кибернетика. Информатика / 2003. – №280. – С. – 78-80.
6. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / М.: Наука, 1976. – 344 с.
7. Понов В.И. Исследование некоторых функционалов и свойств линий уровня на классах однолистных функций / Дисс...канд. физ.-мат. наук / Томск, 1965. – 93 с.

EXTREME CONTROLS AND PARAMETRIC METHOD

G.D. Sadritdinova

Tomsk State University of architecture and construction,
Solyanaya Sq., 2, Tomsk, 634003, Russia, e-mail: dolina1@sibmail.com

Abstract. Functionals on complex variable functions depending on function values and derivative values at fixed point. Using parametric method control functions in the Loewner equation have been set which have led to boundary functions connected with the class of holomorphic univalent in the disk and p-symmetric functions.

Key words: functional, boundary functions, control functions, Loewner's equation.