



MSC 76M25

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЕ

О.А. Гальцева, О.В. Гальцев

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: [oleggaltsev@yandex.ru](mailto:oleggaltsev@yandex.ru)

**Аннотация.** Работа посвящена численному исследованию моделей фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей в пороупругом пространстве. Приводятся численные результаты по разработанным алгоритмам в случае структуры порового пространства в виде изолированных капилляров и несвязных элементов пористой среды.

**Ключевые слова:** задача со свободной границей, фильтрация жидкости, упругий скелет, численное усреднение.

**1. Введение.** Проблемы моделирования физических процессов различной природы в различных средах возникают в механике жидкости и газа, в механике твердого тела, электродинамике и многих других областях. При этом общей проблемой является соотношение микро-и макроскопических подходов их описания. Часто требуется построить модель среды, локальные свойства которой резко меняются, поэтому удобнее перейти от микроскопического ее описания к макроскопическому, то есть рассматривать усредненные характеристики такой среды. Во многих случаях рассматриваемые физические процессы в сильно неоднородных средах описываются уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к дифференциальным уравнениям с резко изменяющимися коэффициентами. Такие задачи возникают в теории упругости и гидродинамике, в теории гетерогенных сред и композитных материалов, теории фильтрации и других задачах физики и механики. Непосредственное численное решение таких задач, как правило, затруднительно даже на современных ЭВМ. Поэтому возникает вопрос о построении моделей для сильно неоднородных сред, приводящих к более простым дифференциальным уравнениям, которые называются усредненными. Часто такие дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Усредненные уравнения позволяют определить с большой точностью эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения – близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений. Математическое описание сильно неоднородных сред часто основано на предположении о наличии у таких сред какой-либо упорядоченной микроструктуры (например, периодической, квазипериодической, случайной однородной и др.).

В настоящей работе приводятся уравнения задачи о нахождении поверхности контактного разрыва при движении двух несжимаемых вязких жидкостей в порах скелета



грунта (с периодической структурой) и алгоритмы их численного решения в двух различных случаях, когда скелет является абсолютно твердым телом, и когда он является упругим телом.

Уравнения пороупругости, полученные К. фон Терцаги [1] и М. Био [2] долгое время являлись общепринятыми и служили основой для решения практических задач пороупругости. Эти уравнения учитывают перемещение не только жидкости в порах, но и твердого скелета. Предлагаемые К. фон Терцаги и М. Био модели называют феноменологическими: в них постулируются свойства смеси твердой и жидкой компонент. Позже, ряд авторов (Р. Барридж и Дж. Келлер [3], Э. Санчес-Паленсия [4], Т. Леви) предложили вывод уравнений пороупругости на основе основных законов механики сплошных сред и методов усреднения. Это было вполне естественно, сначала описать совместное движение упругого скелета и жидкости в порах на микроскопическом уровне, используя классические законы механики сплошных сред, а затем найти соответствующие аппроксимирующие модели с помощью теории усреднения (усредненные уравнения).

Так, совместное движение в области  $\Omega$  описывалось ими математической моделью [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \tilde{\chi} \mathbb{P}_f + (1 - \tilde{\chi}) \mathbb{P}_s) = \rho \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

где  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  – дивергенция  $\mathbf{u}$ , матрица  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

для векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , и  $\mathbf{c}$ ,  $\tilde{\chi}$  есть характеристическая функция порового пространства  $\Omega_f$ ,  $\mathbb{P}_f$  и  $\mathbb{P}_s$  – тензоры напряжения жидкой и твердой компонент соответственно,  $\mathbf{v}$  – скорость среды,  $\rho$  – плотность среды и  $\mathbf{F}$  – заданный вектор распределенных массовых сил.

Уравнения (1) и (2) понимаются в смысле теории распределения (как соответствующие интегральные тождества) и содержат динамические уравнения для жидкой компоненты

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \rho \mathbf{F}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

в  $\Omega_f$  при  $t > 0$ , динамические уравнения для твердой компоненты

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbb{P}_s + \rho \mathbf{F}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

в  $\Omega_s$  при  $t > 0$ , и условие непрерывности нормальных напряжений

$$(\mathbb{P}_s - \mathbb{P}_f) \cdot \mathbf{n} = 0$$

на общей границе «поровое пространство – твердый скелет»  $\Gamma(t)$ , где  $\mathbf{n}$  есть единичная нормаль к  $\Gamma(t)$ .



Приведенная задача сильно нелинейная и содержит еще одну неизвестную величину – границу раздела порового пространства и твердого скелета. Главный постулат здесь – твердая и жидкая компоненты не смешиваются. Таким образом неизвестная (свободная) граница  $\Gamma(t)$  является поверхностью *контактного разрыва* [5], которая определяется из задачи Коши

$$\frac{d\tilde{\chi}}{dt} \equiv \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} + \nabla \tilde{\chi} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \tilde{\chi}(\mathbf{x}, 0) = \chi_0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

для характеристической функции  $\tilde{\chi}$  в области  $\Omega$  при  $t > 0$ .

Для описания совместного движения двух неоднородных жидкостей в упругом скелете динамическая система уравнений дополняется уравнением переноса для плотности  $\rho^e(\mathbf{x}, t)$  смеси жидкой и твердой компонент:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (4)$$

В частности, эта система описывает движение двух несмешивающихся жидкостей различной (и постоянной) плотности  $\rho_f^+$  и  $\rho_f^-$  в несжимаемом твердом скелете постоянной плотности  $\rho_s$ , если уравнение (4) дополнить начальным условием

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_s, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s, \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^\pm, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\pm, \quad (5)$$

где  $\Omega_f^\pm$  есть область занятая жидкостью плотности  $\rho_f^\pm$  в начальный момент времени.

Очевидно, что даже такое упрощение не делает задачу намного легче. Более того, если задачу (1), (3)-(5) удастся решить, то эта математическая модель будет бесполезна для практического применения, так как функция  $\tilde{\chi}$  меняет свои значения от 0 до 1 в масштабе нескольких микрон в то время как задача в целом рассматривается в области в несколько десятков (сотен) метров. Поэтому наиболее подходящим здесь будет усреднение рассматриваемой модели. Но в этом случае задача (1)-(3) становится совершенно неразрешимой. Чтобы получить что-то подходящее для практических нужд и все еще разумное с теоретической точки зрения, воспользуемся схемой, предложенной в [3, 4] и линеаризуем основную динамическую систему.

А именно, аппроксимируем характеристическую функцию  $\tilde{\chi}$  жидкой части  $\Omega_f$  ее значением в начальный момент времени

$$\tilde{\chi} \simeq \chi_0(\mathbf{x})$$

и свободную границу  $\Gamma(t)$  ее начальным положением  $\Gamma_0$ .

Далее предположим, что

$$\mathbf{v} \simeq \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t},$$

где  $\mathbf{w}$  есть вектор перемещения среды,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) \simeq (\rho_f \chi_0 + \rho_s(1 - \chi_0)) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2},$$



где  $\rho_f$  и  $\rho_s$  есть плотности жидкости в порах и твердого скелета соответственно, и

$$\mathbb{P}_f = 2\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - p\mathbb{I}, \quad (6)$$

$$\mathbb{P}_s = 2\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbb{I}. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbb{D}(x, \mathbf{v})$  есть симметричная часть  $\nabla \mathbf{v}$ ,  $\mathbb{I}$  – единичный тензор,  $\mathbf{w}$  – вектор перемещения среды,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\nu$  – объемная вязкость, и  $\lambda$  – постоянная упругости Ламе.

**Предположение 1.** Пусть  $\chi(\mathbf{y})$  есть 1-периодическая по переменной  $\mathbf{y}$  функция, такая, что  $\chi(\mathbf{y}) = 1$ ,  $\mathbf{y} \in Y_f \subset Y$ ,  $\chi(\mathbf{y}) = 0$ ,  $\mathbf{y} \in Y_s = Y \setminus \bar{Y}_f$ ,  $Y$  – единичный квадрат  $R^2$ .

1) Множество  $Y_f$  открытое и  $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$  есть Лишицева поверхность.

2) Пусть  $Y_f^\varepsilon$  есть периодическое повторение в  $R^2$  элементарной ячейки  $\varepsilon Y_f$ . Тогда  $Y_f^\varepsilon$  есть связное множество с лишицевой границей  $\partial Y_f^\varepsilon$ , которая является периодическим повторением границы  $\varepsilon \gamma$ .

3)  $\Omega \subset R^2$  – ограниченная область с Лишицевой границей  $S = \partial \Omega$  и  $\Omega_f^\varepsilon = \Omega \cap Y_f^\varepsilon$  есть поровое пространство,  $\Omega_s^\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\Omega}_f^\varepsilon$  – твердый скелет,  $\Gamma_0 = \Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_f^\varepsilon \cap \partial \Omega_s^\varepsilon$  – общая граница «твердый скелет – поровое пространство».

Пусть  $\zeta(\mathbf{x})$  характеристическая функция области  $\Omega$ . Тогда  $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)$  будет характеристической функцией жидкой области  $\Omega_f^\varepsilon$ .

В безразмерных переменных

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{w} \rightarrow \frac{\mathbf{w}}{L}, \quad t \rightarrow \frac{t}{\tau}, \quad \mathbf{F} \rightarrow \frac{\mathbf{F}}{g},$$

где  $L$  есть характерный размер физической области,  $\tau$  есть характерное время физического процесса,  $g$  – значение ускорения свободного падения.

Тогда динамическая система примет вид

$$\alpha_\tau \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbb{I}, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (10)$$

В (8) – (10)  $\varepsilon = l/L$  есть безразмерный размер пор,  $l$  – средний размер пор,

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho^0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho^0},$$

$$\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s (1 - \chi^\varepsilon),$$

$\varrho_f$  и  $\varrho_s$  – безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета, соотнесенные к плотности воды  $\rho^0$ .



Различные частные случаи линеаризации (1) – (3) изучались многими авторами: Бьюкенен – Гилберт-Лин [6, 7], Бакингом [8], Барридж-Келлер [3], Клопиу-Ферри-Гилберт-Микелич-Паоли [9–11], Леви [12], Нгуетсенг [13], Санчес-Хьюберт [14], Санчес-Паленсия [4].

Наиболее полно задача усреднения общей линеаризованной системы для сжимаемых сред была исследована в работах А.М. Мейрманова [15, 16].

В частности, в [15, 16] была предложена классификация физических процессов и физических сред в зависимости от значений безразмерных критериев

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0.$$

Для очень медленных процессов, таких как фильтрация жидкости, скорость среды составляет всего 3 – 6 метров в год. Поэтому характерное время процесса очень велико и  $\alpha_\tau \sim 0$ . Для быстропротекающих процессов таких, как акустика или гидравлический удар,  $\alpha_\tau \sim 1$ , или  $\alpha_\tau \sim \infty$ .

В этом случае инерционными слагаемыми в (6) можно пренебречь и ограничиться уравнением

$$\nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F} = 0. \tag{11}$$

При описании совместного движения двух неоднородных жидкостей в упругом скелете система уравнений (10) – (11) дополняется уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \tag{12}$$

для плотности  $\rho^\varepsilon$  смеси жидкой и твердой компонент и начальным условием

$$\rho^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \rho_s, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s, \quad \rho^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^\pm, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\pm. \tag{13}$$

Самым простым случаем системы (10) – (12) является случай, когда твердый скелет предполагается абсолютно твердым телом. Он характеризуется равенством

$$\lambda_0 = \infty.$$

Соответствующая система уравнений состоит из уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{14}$$

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - p \mathbb{I}) + \varrho_f \mathbf{F} = 0 \tag{15}$$

для скорости  $\mathbf{v}$  и давления  $p$  жидкости в области  $\Omega_f$  при  $t > 0$  и равенства

$$\mathbf{v} = 0 \tag{16}$$

в твердом скелете  $\Omega_s$  (более точно, система (14)-(16) получается из системы (10)-(12) предельным переходом при  $\alpha_\lambda \rightarrow \infty$ ).





Отметим, что нетривиальное усреднение системы (14) – (16) возможно только при условии

$$\alpha_\mu = \varepsilon^2 \mu_0, \quad \mu_0 = \text{const} > 0. \quad (17)$$

(см. [15, 16]).

При описании совместного движения двух неоднородных жидкостей в абсолютно твердом скелете система уравнений (14)-(17) дополняется уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f \quad (18)$$

для плотности  $\rho^\varepsilon$  смеси жидкой и твердой компонент и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^\pm, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\pm. \quad (19)$$

В исходной постановке для точных уравнений динамики (1), (3), (4), задачи (12)-(3) и (18)-(19) эквивалентны и для упругого скелета, когда равенство (15) может и не выполняться. Но при линейаризации динамических уравнений мы потеряли важное свойство границы  $\Gamma(t)$  «поровое пространство – твердый скелет» быть поверхностью контактного разрыва. Грубо говоря, жидкая и твердая компоненты среды теперь могут «протекать» через ее аппроксимацию – границу  $\Gamma_0$ . Поэтому на участках, где жидкая компонента «втекает» в поровое пространство, необходимо задавать значение плотности, что не вызвано существом дела.

Вообще говоря, такая постановка задачи, когда решением является искомая функция  $\rho_f$  (а не комбинация  $\rho^\varepsilon$ , в которой плотность твердого скелета  $\rho_s$  известна) более естественна и привычна для исследователя. Поэтому, чтобы «подправить» последнюю постановку задачи о транспорте массы, воспользуемся диффузионным приближением

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = D_0 \Delta \rho_f \quad (20)$$

с достаточно малым коэффициентом диффузии  $D_0$ , который впоследствии можно устремить к нулю.

Данное уравнение допускает два вида краевых условий на границе  $\Gamma_0$ , не требующих знания искомой плотности  $\rho_f$

$$(D_0 \nabla \rho_f - \rho_f \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (21)$$

или

$$D_0 \nabla \rho_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (22)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе  $\Gamma_0$ .

Условие (21) является точным для линейаризованных динамических уравнений с фиксированной границей раздела  $\Gamma_0$ . Здесь под «точным условием» мы понимаем условие, запрещающее перетоки жидкости из порового пространства в твердый скелет или перетоки из твердого скелета в поровое пространство. С другой стороны, условие (22) является точным для точных нелинейаризованных динамических уравнений с



неизвестной границей раздела  $\Gamma(t)$ . В этом случае условие на сильном разрыве для уравнения диффузии (22) примет вид [5]

$$\rho_f (V_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + D_0 \nabla \rho_f \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{23}$$

где  $V_n$  есть скорость движения поверхности  $\Gamma(t)$  в направлении нормали  $\mathbf{n}$ . Поскольку данная поверхность  $\Gamma(t)$  есть поверхность контактного разрыва, то

$$V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

и мы приходим к (22).

**2. Разработка алгоритмов численного решения математических моделей 1 и 2.** Задача численного усреднения математической модели 1 совместного движения жидкости и упругого скелета решалась для двух различных геометрий элементарной ячейки порового пространства: несвязные капилляры (Рис. 1 – геометрия «а») и несвязный упругий скелет (Рис. 1 – геометрия «б»).

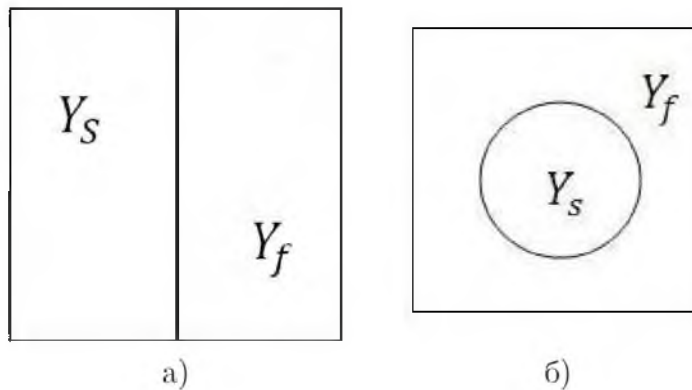


Рис. 1. Структура порового пространства: а) в виде изолированных капилляров, б) в виде несвязных элементов твердого скелета.

**Предположение 2.**

1) Пусть «жидкая компонента»  $Y_f$  единичного квадрата  $Y = (0, 1)^2 \subset R^2$  является открытым множеством, а  $Y_s = Y/\overline{Y}_f$  – «твердая компонента» в  $Y$ .  $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$  – лишицева граница.

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0, 1) \times (0, 1), \quad \varepsilon Y = (0, \varepsilon) \times (0, \varepsilon).$$

2) Пусть  $Y_f^\varepsilon$  есть периодическое повторение в  $R^2$  элементарной ячейки  $\varepsilon Y_f$ , с лишицевой границей  $\partial Y_f^\varepsilon$ , которая является периодическим повторением границы  $\varepsilon \gamma$ .  $Y_s^\varepsilon$  – периодическое повторение в  $R^2$  элементарной ячейки  $\varepsilon Y_s$ .

3) Пусть  $\Omega \in R^2$  – ограниченная область с лишицевой границей  $S$ ,  $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$ , где  $\Omega_f^\varepsilon = \Omega \cap Y_f^\varepsilon$  – иоровое пространство,  $\Omega_s^\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega_f^\varepsilon}$  – твердый скелет, и  $\Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_f^\varepsilon \cap \partial \Omega_s^\varepsilon$  – общая граница «твердое тело - иоровое пространство».



Модель 1. Совместное движение вязкой жидкости в поровом пространстве и упругого скелета на микроскопическом уровне описывается системой

$$\nabla \cdot \left( \chi^\varepsilon \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p \mathbb{I} + \rho^\varepsilon \mathbf{F} = 0, \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \rho^\varepsilon = \chi^\varepsilon \rho_f + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s, \quad (26)$$

которая состоит из стационарной системы уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \left( \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) \right) - \nabla p^\varepsilon - \rho_f^\varepsilon \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (27)$$

для скорости  $\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$  и давления  $p^\varepsilon$  неоднородной несжимаемой жидкости в области  $\Omega_f^\varepsilon$  при  $t > 0$  и стационарной системы уравнений Ламэ

$$\nabla \cdot \left( \lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \right) - \nabla p^\varepsilon - \rho_s^\varepsilon \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (28)$$

для перемещения  $\mathbf{w}^\varepsilon$  и давления  $p^\varepsilon$  упругого несжимаемого скелета в области  $\Omega_s^\varepsilon$  при  $t > 0$ , транспортного уравнения (26). На общей границе «твердый скелет – поровое пространство»  $\Gamma^\varepsilon$  выполнено условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений.

Система (26)-(28) дополняется начальным и граничным условиями

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \quad (29)$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t > 0, \quad (30)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon \quad (31)$$

и условием нормировки

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = 0, \quad t > 0. \quad (32)$$

Процесс численного усреднения ( $\varepsilon \searrow 0$ ) моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов упругого скелета для геометрии «б». Таким образом, можно считать, что при достаточно малом  $\varepsilon$  система (26)-(31) описывает задачу вязкоупругой фильтрации.

Отметим, что основные сложности при численном решении системы уравнений Стокса связаны с нахождением поля давления. А наличие стратификации дополнительно требует расчета поля плотности. Пусть в некоторый момент времени  $t_n = n\tau$ , где  $\tau$  – величина шага по времени,  $n$  – число шагов, известно поле скоростей  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ . Тогда чтобы найти неизвестные функции, процесс вычисления можно представить в следующем виде:





Этап 1. Решается система уравнений Ламэ (28) с граничными и начальными условиями для перемещения  $\mathbf{w}$  (30), (31). На первом шаге по времени находим промежуточное значение  $\tilde{\mathbf{w}}$ , решая уравнение

$$\lambda_0 \Delta \tilde{\mathbf{w}} - \nabla \tilde{p} = -\rho_s \mathbf{F}, \quad (33)$$

дополненное граничным условием

$$\tilde{\mathbf{w}}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0.$$

В данном случае условие несжимаемости (25) не удовлетворяется. Поэтому будем искать поправки к полю перемещения и давления в следующем виде

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}}, \quad p = \tilde{p} + \dot{p}_s, \quad (34)$$

где  $\tilde{p}|_{t=0} = 0$ .

Подставив (34) в (28), получим уравнения для коррекции давления и перемещения упругого скелета

$$\lambda_0 \Delta \dot{\mathbf{w}}_s - \nabla \dot{p}_s = 0, \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}_s = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s, \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_s|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0.$$

Выразим градиент  $\nabla \dot{p}_s$  из системы (35) и применим дивергенцию к обеим частям, получим уравнение для поправки давления

$$\Delta \dot{p}_s = \lambda_0 \nabla \cdot (\Delta \dot{\mathbf{w}}_s). \quad (37)$$

Учитывая, что  $\nabla \cdot (\Delta \dot{\mathbf{w}}) = \Delta (\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}})$  и равенство (36), уравнение (37) примет вид

$$\Delta \dot{p}_s = -\lambda_0 \Delta (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s), \quad (38)$$

которое дополним следующими граничными условиями

$$\nabla \dot{p}_s \cdot \mathbf{n}|_S = 0,$$

$$\nabla \dot{p}_s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma^\varepsilon} = -\lambda \Delta \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma^\varepsilon}.$$

Найдя  $\dot{p}_s$ , легко решим (35) и, соответственно, найдем окончательные значения перемещения и давления в (34).

Этап 2. Используя найденные значения  $\mathbf{w}_s$  и  $p_s$ , находим нормальные напряжения на границе  $\Gamma^\varepsilon$

$$(\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}) \mathbf{n} = \mathbf{A}, \quad (39)$$

где  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор нормали к границе  $\Gamma^\varepsilon$ .



Этап 3. Так как на общей границе между упругим скелетом и жидкостью выполняется условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений, то решаем систему уравнений Стокса (27) в  $\Omega_f^\varepsilon$ , учитывая граничное условие на общей границе  $\Gamma^\varepsilon$

$$(\mu_0 \mathbb{D}(x, \tilde{\mathbf{v}}) - p \mathbb{I}) \mathbf{n} = \mathbf{A}, \quad (40)$$

где правая часть равенства известна с предыдущего этапа.

В виду того, что  $p$  уже известно из (40), уравнение для  $\tilde{\mathbf{v}} = \partial \tilde{\mathbf{w}} / \partial t$  на первом шаге будет иметь следующий вид

$$\mu_0 \Delta \tilde{\mathbf{v}} - \nabla p = -\rho_f \mathbf{F}, \quad \tilde{\mathbf{v}}|_S = 0. \quad (41)$$

Затем аналогичные действия повторяются, а именно, находим поправку для поля скоростей и давления

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}}_f, \quad \tilde{p} = p + \dot{p}_f. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (27) и в уравнение неразрывности, получим уравнения для коррекции скорости и давления

$$\mu_0 \Delta \dot{\mathbf{v}}_f - \nabla \dot{p}_f = 0, \quad (43)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{v}}_f = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (44)$$

которые дополним граничными условиями

$$\dot{\mathbf{v}}|_S = 0, \quad (\mu_0 \mathbb{D}(x, \dot{\mathbf{v}}) - \dot{p}_f \mathbb{I}) \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma^\varepsilon.$$

Выразим градиент  $\nabla \dot{p}_f$  и применим дивергенцию к обеим частям в (43). Получим уравнение для поправки давления

$$\Delta \dot{p}_f = -\mu_0 \Delta (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^n), \quad (45)$$

которое дополняется граничными условиями

$$(\nabla \dot{p}_f \cdot \mathbf{n})|_S = 0, \quad \nabla \dot{p}_f \cdot \mathbf{n} = -\mu_0 \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma^\varepsilon.$$

Найдя  $\dot{p}_f$ , решим (43). Учитывая известные  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$  и  $\dot{p}_f$  легко найдем  $\mathbf{v}$ ,  $p_f$ . Нормальное напряжение на общей границе  $\Gamma^\varepsilon$  находится, как

$$\mathbb{B} = (\mu_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - \tilde{p}) \mathbf{n}.$$

Этап 4. Используя уже известное значение скорости жидкости, находим значение плотности на следующем временном слое ( $\rho_f^{n+1}$ ), решая численно уравнение

$$\frac{\rho_f^{n+1} - \rho_f^n}{\tau} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f^n. \quad (46)$$



Этап 5. На этом текущий цикл заканчивается. На последующих временных слоях алгоритм нахождения неизвестных в упругом скелете решаем уравнение

$$\lambda_0 \Delta \tilde{\mathbf{w}}_s^n - \nabla \tilde{p} = -\rho_s \mathbf{F} \quad (47)$$

с граничным условием

$$(\lambda_0 \mathbb{D}(x, \tilde{\mathbf{w}}^n) - \nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbb{B},$$

найденным на Этапе 3, и условием на  $S$

$$\tilde{\mathbf{w}}_s|_S = 0.$$

```

1 for каждой ячейки сетки do
2   if ячейка принадлежит область упругого скелета then
3     находим  $\mathbf{w}$  из уравнения (33).
4     При  $p|_{t=0} = 0$  ищем  $\mathbf{w}'_s$ , решая систему уравнений (35)-(36).
       Получаем  $p'_s$  из (37).
5     if  $\Delta p'_s = -\lambda_0 \Delta(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s)$  then
6       решаем (34).
7   end
8     Находим нормальное напряжение на  $\Gamma^\varepsilon$  из (39).
9   end
10  else
11    Ищем  $\mathbf{v}^\varepsilon$  с учетом найденного значения нормального
       напряжения на общей границе «упругий скелет – поровое
       пространство», соблюдая аналогичный порядок действий,
       что и для расчета перемещения в упругом скелете.
12  end
13  Находим  $\rho_f^{n+1}$  (значение плотности на следующем временном
       слое).
14 end

```

Алгоритм 1. Решение системы уравнений (26)-(28).

Поправки для давления и перемещения будем искать как

$$\mathbf{w}_s^n = \tilde{\mathbf{w}}_s^n + \mathbf{w}'_s^n, \quad p = \tilde{p} + p'_s. \quad (48)$$

Уравнения для коррекции  $\mathbf{w}'_s$  и  $p'_s$  будут

$$\lambda_0 \Delta \mathbf{w}'_s^n - \nabla p'_s = 0, \quad (49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}'_s^n = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s^n \quad (50)$$



со следующими граничными условиями

$$\dot{\boldsymbol{w}}_s^n|_S = 0, \quad (\lambda_0 \mathbb{D}(x, \dot{\boldsymbol{w}}_s) - \dot{p}_s \mathbb{I}) \boldsymbol{n} = 0 \text{ на } \Gamma^\varepsilon.$$

Поправку для давления находим из уравнения

$$\Delta \dot{p}_s^n = -\lambda_0 \Delta (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}_s^n) \quad (51)$$

$$\nabla \dot{p}_s^n \cdot \boldsymbol{\nu}|_S = 0, \quad \nabla \dot{p}_s^n \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma^\varepsilon} = -\lambda_0 \Delta \tilde{\boldsymbol{w}}_s^n \cdot \boldsymbol{n} \text{ на } \Gamma^\varepsilon.$$

Как и ранее, находим  $\dot{\boldsymbol{w}}_s^n$ , затем  $\boldsymbol{w}_s^n$  и  $p$  и повторяем этапы 2–4. Процедура повторяется, пока не получим сходящееся решение.

**Модель 2.** Математическая модель 2 движения жидкости в абсолютно твердом скелете решалась численно в области  $\Omega$ , которая имеет структуру элементарной ячейки как геометрии «а», так и геометрии «б». Движение жидкости в одном капилляре описывается системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot (\mu_0 \varepsilon^2 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}) + \rho_f^\varepsilon \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T), \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T), \quad (53)$$

которая дополняется уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho_f^\varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_f^\varepsilon = 0, \quad \rho_f^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T) \quad (54)$$

для плотности жидкости  $\rho_f^\varepsilon$  и условием нормировки

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} p^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) dx = 0, \quad (55)$$

где  $\mu_0 = \alpha_\mu / \varepsilon^2$ .

Выполняется следующее граничное условие

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S \cup \Gamma^\varepsilon, \quad t > 0, \quad (56)$$

где  $S = \partial\Omega$ .

Процесс численного усреднения ( $\varepsilon \searrow 0$ ) моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов твердого скелета для геометрии «б». Таким образом, можно считать, что при достаточно малом  $\varepsilon$  система (52), (56) описывает классическую задачу Маскета. Алгоритм нахождения неизвестных функций скорости, давления и плотности будет иметь следующий вид:

**Этап 1.** На первом временном слое находим промежуточное значение скорости  $\tilde{\boldsymbol{v}}$  в  $\Omega_f$  из уравнения

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{v}} = -\rho^1 \boldsymbol{F}, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = 0, \quad \rho^1 = \rho_f^0. \quad (57)$$



Скорость и давление, с учетом промежуточного значения и поправки, можно представить в виде

$$\mathbf{v}^1 = \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}, \quad p^1 = \tilde{p} + \hat{p}. \quad (58)$$

Находим поправки скорости из уравнений

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \hat{\mathbf{v}} - \nabla \hat{p} = 0, \quad (59)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (60)$$

$$\hat{\mathbf{v}}|_{S\cup\Gamma^\varepsilon} = 0.$$

Выразив градиент  $\nabla \hat{p}$  и применив дивергенцию к обеим частям, получим уравнение для поправки давления

$$\Delta \hat{p} = \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\Delta \hat{\mathbf{v}}). \quad (61)$$

Учитывая  $\nabla \cdot (\Delta \hat{\mathbf{v}}) = \Delta(\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}})$  и равенство (60), найдем  $\hat{p}$

$$\Delta \hat{p} = \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\Delta \tilde{\mathbf{v}}), \quad (62)$$

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}|_{S\cup\Gamma^\varepsilon} = \frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}|_{S\cup\Gamma^\varepsilon},$$

зная которое, решим (59).

Используя уже известные значения  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\hat{\mathbf{v}}$ , найдем  $\mathbf{v}^1$ ,  $p^1$  и вычислим  $(\rho^2)$  на следующем шаге

$$\frac{\rho^2 - \rho^1}{\tau} = -\mathbf{v}^1 \cdot \nabla \rho^1. \quad (63)$$

Этап 2. На втором и последующих временных шагах проделываем аналогичные действия, принимая во внимание уже известное значение давления. Находим промежуточное значение скорости  $\tilde{\mathbf{v}}^n$  из уравнения

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n - \nabla p^{(n-1)} = -\rho^n \mathbf{F}, \quad \tilde{\mathbf{v}}^n|_{S\cup\Gamma^\varepsilon} = 0. \quad (64)$$

Находим поправки для скорости и давления, как на предыдущем шаге

$$\mathbf{v}^n = \tilde{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{v}}^n, \quad p^n = p^{(n-1)} + \hat{p}^n. \quad (65)$$

Подставив (58) в исходное уравнение Стокса и уравнение неразрывности, получим уравнения для коррекции скорости и давления

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \hat{\mathbf{v}}^n - \nabla \hat{p}^n = 0, \quad (66)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^n = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^n. \quad (67)$$





$$\Delta p^n = -\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n), \quad (68)$$

$$\nabla \dot{p} \cdot \mathbf{n}|_{S \cup \Gamma^\varepsilon} = -\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n.$$

Затем решим (65).

И, наконец, находим значение  $(\rho^{n+1})$ , численно решая уравнение

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} = -\mathbf{v}^n \cdot \nabla \rho^n. \quad (69)$$

```

1 for каждой ячейки сетки do
2   for первого каждого временного слоя  $n = 1$   $\tilde{\mathbf{v}}$  из (57). do
3     Находим  $\dot{\mathbf{v}}$  из (59).
4     Находим  $\dot{p}$  из (62).
5     Определим  $\mathbf{v}^1$  и  $p^1$ .
6     Ищем  $\rho^2$  из (63) для следующего шага по времени.
7   end
8   for второго и последующего временного слоя находим  $\tilde{\mathbf{v}}^n$ 
   из (64). do
9     Находим поправки скорости и давления.
10    Решаем (65).
11    Ищем  $\rho^{n+1}$  из (69).
12  end
13 end

```

Алгоритм 2. Решение системы уравнений (52)-(54).

**3. Численное решение модели 1.** В качестве численного метода решения моделей 1 и 2 был выбран метод VOF (volume of fluid).

В механике сплошных сред принято использовать лагранжевы координаты в качестве основы в численных расчетах. В гидродинамике, однако, с успехом используются как Лагранжевы, так и эйлеровы координаты. Выбор той или иной системы зависит от конкретной решаемой задачи, так как каждый подход обладает своими преимуществами и недостатками. Для численного решения моделей, рассматриваемых в данной работе, мы будем использовать эйлерову постановку, так как для задач, в которых свободные границы проходят такие деформации, использование лагранжева метода невозможно.

Дискретное лагранжево представление для жидкости концептуально просто, так как каждая зона накладываемой на расчетную область сетки отождествляется с элементом жидкости в каждый момент времени. Объемные и поверхностные силы в этих элементах легко определить, соответственно динамические характеристики элементов легко вычисляемы. Эти два способа отличаются способом вычисления скорости в той области,



которая касается перемещения элемента жидкости в новое положение. В Лагранжевом случае сетка просто перемещается с рассчитанными скоростями элемента потока, тогда как в Эйлеровом случае необходимо вычислить поток жидкости через сетку. Этот поток требует усреднения параметров жидкости для всех элементов жидкости, которые находятся в данной ячейки сетки.

Именно этот процесс усреднения присущ аппроксимации конвективного потока. Это самый большой недостаток метода Эйлера. Конвективное усреднение приводит к сглаживанию всех вариаций в потоке и, в частности, к размытию поверхности разрыва (свободной поверхности). Единственный способ преодолеть эту проблему на границе – это ввести некоторую специальную обработку, которая позволила бы избежать разрыва. Сравнения относительных преимуществ и недостатков уже существующих методов преодоления этой проблемы привели к новой технике, которая является простой, но эффективной. Это метод объема жидкости в ячейке (VOF).

VOF-метод может быть использован в тех задачах, где необходимо найти свободную границу некоторого количества несмешивающихся сред: однофазное течение или течение несмешивающихся жидкостей.

В основе VOF-метода лежит схема дробного объема жидкости для отслеживания свободной поверхностью. В этой технике, функция  $\rho(x_1, x_2, t)$  равна единице если ячейка занята жидкостью полностью и нулю, если ячейка пуста, когда усредненное по клеткам вычислительной сетки, среднее значение  $\rho$  в ячейке равно дробному объему ячейки, занятой жидкостью. В частности, единичное значение  $\rho$  соответствует ячейке, заполненной жидкостью, а нулевое значение указывает, что ячейка не содержит жидкости. Ячейки со значениями  $\rho$  между нулем и единицей содержат свободную поверхность.

Как отмечалось выше, процесс численного усреднения моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов упругого скелета для геометрии «б» ( $\varepsilon \searrow 0$ ).

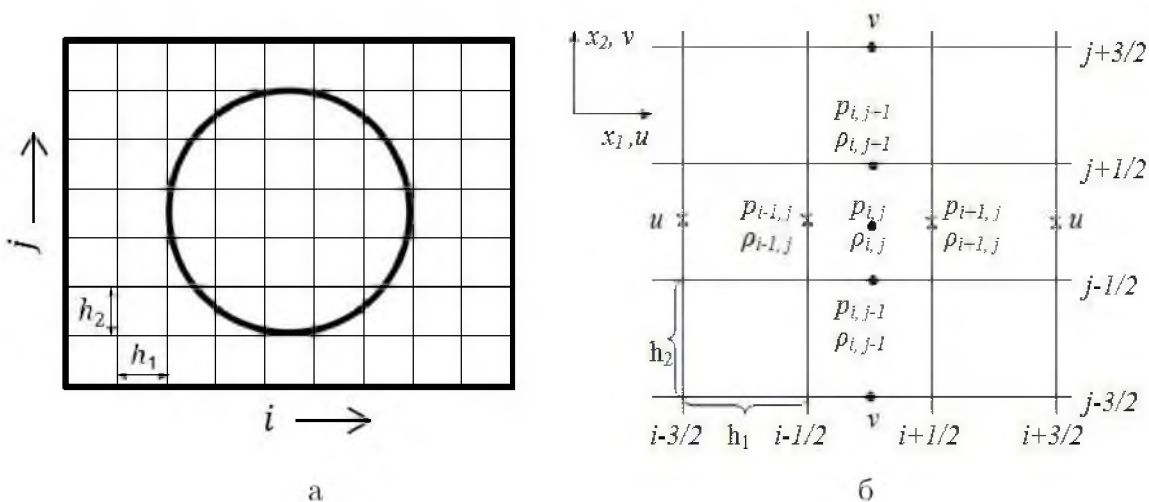


Рис. 2. Шаблон расчетной сетки.

В силу выбранного нами метода решения задачи исследуемая область течения по-



крывается равномерной по  $x_1$  и  $x_2$  сеткой ячеек (смотрите рисунок 2, «а» и «б»)

$$\Omega_f = \left( \begin{array}{l} x_1^{(i+1/2)} = ih_1, \quad h_1 > 0; \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \\ x_2^{(j+1/2)} = jh_2, \quad h_2 > 0; \quad j = 0, 1, \dots, N_2; \end{array} \right)$$

где  $h_1, h_2$  – размер сетки,  $N_1, N_2$  – количество ячеек сетки, соответственно, в направлении  $x_1$  и  $x_2$  (точка с координатами  $(i, j)$  совпадает с центром ячейки).

Выбор такой сетки обусловлен тем, что в рассматриваемых нами моделях нет областей где необходимо было бы отслеживать границу раздела фаз более точно. Это также обусловлено и скоростью протекания процесса.

Здесь, как и в исходном методе VOF, будем использовать «шахматную» сетку. Это дает возможность четко интерпретировать каждую ячейку, как элемент объема, который характеризуется рассчитываемыми давлением и плотностью в его центре.

Дискретные значения переменных расположены в ячейке, как показано на рисунке 2 «б». Здесь свободная граница  $(i, j)$  определяется как ячейка, содержащая ненулевое значение  $\rho$  и имеющая по крайней мере одну соседнюю ячейку  $(i \pm 1, j)$  или  $(i, j \pm 1)$ , плотность в которой равна 0. Ячейки с нулевым  $\rho$  содержат вторую жидкость. Ячейки с ненулевыми значениями  $\rho$  и ненулевыми соседними ячейками считаем заполненными первой жидкостью.

Кратко, основную процедуру решения модели 1 за один шаг по времени можно представить в виде трехэтапной схемы:

(1) Используя явные приближения уравнений (27),(28) и, следуя алгоритму, изложенному выше, находим значения скорости и перемещения.

(2) Используя разработанный алгоритм, удовлетворяем уравнению неразрывности (25) в каждой ячейке, так как из-за изменения давления в одной ячейке, нарушается баланс в четырех соседних клетках. В стандартном методе VOF предполагается, что на свободной границе раздела жидкостей выполняется условие сжимаемости среды. Так как нам необходимо учитывать поведение еще и упругого тела, то необходимо удовлетворять условие (25) в каждой ячейке всей области. Это небольшая модификация метода позволяет избежать непредусмотренных возмущений при переходе на новый временной слой.

(3) И, наконец, находим значения плотности  $\rho$ .

Повторение этих шагов даст решение через заданный интервал времени. На каждом шаге, конечно, необходимо соблюдать граничные условия.

Конечно-разностные аналоги пространственных переменных для соответствующих производных, входящих в исходную систему уравнений, центрируются в соответствии с выбранным шаблоном. Например, слагаемые с градиентом давления вычисляются с помощью односторонних разностей по формулам вида

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_2}. \quad (70)$$

Для аппроксимации диффузионных членов уравнений используется схема с центральными разностями, как, например, для компоненты скорости перемещения жидко-



сти

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{h_1^2}, \quad (71)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{h_2^2}. \quad (72)$$

Более полные выражения конечно-разностных аналогов соответствующих слагаемых двухмерных и трехмерных уравнений движения приведены, например, у О.М. Белоцерковского [17]. Используемая конечно-разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным  $O(\Delta\tau, h^2)$  и можно показать, что она устойчива. Подставим конечно-разностные формулы в исходную систему уравнений движения (24)–(26). Тогда после простых преобразований получим их дискретные аналоги для  $x_1$  и  $x_2$  направлений соответственно.

Полученные разностные алгебраические уравнения, разрешенные относительно компонент перемещения  $w_{1\ i+1/2,j}$ ,  $w_{2\ i,j+1/2}$  и дополненные уравнением неразрывности, преобразуются к следующему конечно - разностному виду

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left( \frac{w_{1\ i+3/2,j}^n - 2w_{1\ i+1/2,j}^n + w_{1\ i-1/2,j}^n}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{1\ i+1/2,j+1}^n - 2w_{1\ i+1/2,j}^n + w_{1\ i+1/2,j-1}^n}{h_2^2} \right) = \\ = \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{h_1} + \rho_{s\ i+1/2,j}^n F_1, \quad (73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left( \frac{w_{2\ i+1,j+1/2}^n - 2w_{2\ i,j+1/2}^n + w_{2\ i-1,j+1/2}^n}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{2\ i,j+3/2}^n - 2w_{2\ i,j+1/2}^n + w_{2\ i,j-1/2}^n}{h_2^2} \right) = \\ = \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2} + \rho_{s\ i,j+1/2}^n F_2, \quad (74) \end{aligned}$$

$$\frac{w_{1\ i+1/2,j}^n - w_{1\ i-1/2,j}^n}{h_1} + \frac{w_{2\ i,j+1/2}^n - w_{2\ i,j-1/2}^n}{h_2} = 0, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{s\ i,j}^{n+1} - \rho_{s\ i,j}^n}{\tau} = -w_{1\ i+1/2,j}^n \frac{\rho_{s\ i+1/2,j}^n - \rho_{s\ i-1/2,j}^n}{h_1} - \\ - w_{2\ i,j+1/2}^n \frac{\rho_{s\ i,j+1/2}^n - \rho_{s\ i,j-1/2}^n}{h_2}. \quad (76) \end{aligned}$$

где  $n$  – номер шага по времени,  $w_1, w_2$  – компоненты вектора перемещений,  $\rho_s$  – плотность упругого скелета.

Величины с дробными индексами относятся к границам ячеек, например

$$w_{1i+1/2,j} = \frac{w_{1i,j} + w_{1i+1,j}}{2}, \quad w_{2i,j+1/2} = \frac{w_{2i,j} + w_{2i,j+1}}{2}.$$

В случаях, когда нам необходимо определить значения функции в точках сетки, необходимо воспользоваться средним арифметическим, например

$$\rho_{i+1/2,j}^s = \frac{1}{2}(\rho_{i+1,j}^s + \rho_{i,j}^s), \quad \rho_{i,j+1/2}^s = \frac{1}{2}(\rho_{i,j+1}^s + \rho_{i,j}^s).$$

Легко видеть, что эти конечно-разностные схемы (так и нижеследующие) аппроксимируют систему уравнений (26)-(28) с погрешностью порядка  $O(\tau, h^2)$ , где  $h = \max(h_1, h_2)$ . Таким образом, приведенная разностная схема имеет второй порядок точности по пространству.

Критерием окончания решения служит условие, когда максимальная относительная разность между значениями искомого переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки  $\alpha$

$$\max \left| \frac{v^{n+1} - v^n}{v^{n+1}} \right| \leq \alpha.$$

В плоском случае, геометрические характеристики дробных ячеек могут быть определены непосредственными измерениями. В аксиально-симметрическом случае необходимо провести дополнительные вычисления для нахождения расстояния от каждой дробной ячейки до оси симметрии. Разностные уравнения для дробных ячеек получаются путем небольшой модификации разностного уравнения для целой ячейки.

На рис. 3 представлены результаты численного усреднения задачи (26)-(31) по разработанному алгоритму для случая элементарной ячейки «б».

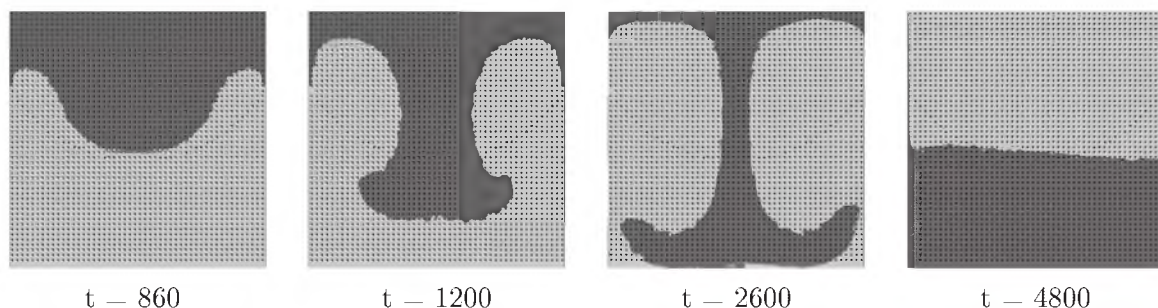


Рис. 3. Совместное движение жидкости и упругого скелета в виде изолированных капилляров.

**4. Численное решение модели 2.** Процесс аппроксимации системы уравнений (52)-(56) разностным представлением ничем не отличается от описанного выше, так как модель 2 является подмоделью модели 1, где отсутствуют перемещения скелета и, соответственно, на границе жидкости и твердого скелета выполняется условие непротекания.





Полученные разностные алгебраические уравнения, разрешенные относительно компонент перемещения  $u_{i+1/2,j}$ ,  $v_{i,j+1/2}$  и дополненные уравнением неразрывности, преобразуются к следующему конечно-разностному виду

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \left( \frac{u_{i+3/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n}{h_1^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j-1}^n}{h_2^2} \right) = \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{h_1} + \rho_{i+1/2,j}^n F_1, \quad (77)$$

$$\frac{\mu_0 \varepsilon^2}{2} \left( \frac{v_{i+1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i-1,j+1/2}^n}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+3/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{h_2^2} \right) = \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_2} + \rho_{i,j+1/2}^n F_2, \quad (78)$$

$$\frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{h_1} + \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{h_2} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\tau} = -u_{i+1/2,j}^n \frac{\rho_{i+1/2,j}^n - \rho_{i-1/2,j}^n}{h_1} - v_{i,j+1/2}^n \frac{\rho_{i,j+1/2}^n - \rho_{i,j-1/2}^n}{h_2}. \quad (80)$$

При замене дифференциальной задачи на конечно-разностное представление необходимо обратить внимание на приближение граничных условий, так как их конкретное приближение прямо влияет на корректность метода и устойчивость схемы, а также скорость сходимости. Сформулируем граничные условия, введя серию фиктивных ячеек (так, чтобы каждая вычисляемая точка становилась внутренней и описанный алгоритм сохранялся для всех ячеек). Для первого порядка аппроксимации достаточно одного слоя, для второго порядка аппроксимации – два слоя. Так в случае, когда боковые стенки есть твердая поверхность, то условие прилипания и непротекания представляется в виде

$$v_{-1/2,j+1/2} = 0 \text{ (условие прилипания),}$$

$$u_{i-1/2,j} = 0 \text{ (условие непротекания).}$$

Из условия прилипания можно получить

$$v_{0,j+1/2} = \frac{v_{0,j+1/2}^n}{2} + \frac{v_{1,j+1/2}^n}{6} + \frac{h_1^2 \rho_{0,j+1/2}^n}{8 \mu} F_2 + O(h_1^3).$$



Для расчета поля плотности в «приграничных» ячейках рассматривается следующее представление (смотрите рисунок 4):

$$\rho_{0j}^{n+1,k+1} = \rho_{0j}^n - \tau \left[ \frac{(\rho u)_{1/2,j}^n}{h_1} + \frac{(\rho v)_{0,j+1/2}^n - (\rho v)_{0,j-1/2}^n}{h_2} \right] + O(h^2). \quad (81)$$

приведенные краевые условия для расчета скорости и плотности в «приграничных» ячейках имеют порядок точности по пространственным переменным не ниже второго.

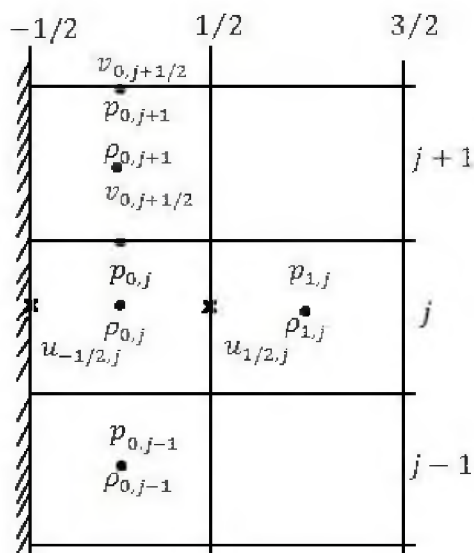


Рис. 4. Расчетная сетка у границы «жидкость – упругое тело» («абсолютно твердое тело»).

Численное решение этой задачи в одном капилляре в абсолютно твердом скелете показало совпадение с результатами [18]. На рис. 6 можно увидеть гладкую свободную границу в капилляре в различные моменты времени.

Процесс численного усреднения ( $\varepsilon \searrow 0$ ) моделируется увеличением количества капилляров для геометрии «а», или количества элементов твердого скелета для геометрии «б». Таким образом, можно считать, что при достаточно малом  $\varepsilon$  система (52), (56) описывает классическую задачу Маскета.

Легко заметить, что для одного и того же времени процесса в задаче Маскета возникает переходная фаза в случае абсолютно твердого скелета (см. [16]), в то время, как при вязкоупругой фильтрации свободная граница сохраняется.



### Литература

1. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen // Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. – 1923. – 132, №IIa. – P.104-124.
2. Biot M. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // Journal of Applied Physics. – 1955. – 26. – P.182-185.
3. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 70, №4. – P.1140-1146.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory // Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 1980.
5. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Часть 2 / Новосибирск: ИГУ, 1977. – 69 с.
6. Buchanan J.L., Gilbert R.P. Transition loss in the farfield for an ocean with a Biot sediment over an elastic substrate// ZAMM. – 1997. – №77. – P.121-135.
7. Gilbert R.P., Lin J.Z. Acoustic waves in shallow inhomogeneous oceans with a poro-elastic seabed // ZAMM. – 1997. – №4. – P.1-12.
8. Buckingham M.J. Seismic wave propagation in rocks and marine sediments: a new theoretical approach // Underwater Acoustics. – 1998. – 1. – P.299-300.
9. Clopeau Th., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikelić A. Homogenizing the acoustic properties of the seabed. Part II // Mathematical and Computer Modelling. – 2001. – 33. – P.821-841.
10. Ferrin J.L., Mikelić A. Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluids // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – 26. – P.831-859.
11. Mikelić A., Paoli L. Homogenization of the inviscid incompressible fluid flow trough a 2D porous medium // Proceedings of the AMS. – 1999. – 17. – P.2019-2028.
12. Levy T. Acoustic phenomena in elastic porous media // Mech. Res. Comm. – 1977. – №4. – P.253-257.
13. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21. – P.1394-1414.
14. Sanchez-Hubert J. Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. – 1980. – 2. – P.1-18.
15. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмо-акустики в упругих пористых средах // Сибирский Математический Журнал. – 2007. – №3. – С.645-667.
16. Мейрманов А. М. Вывод уравнений сейсмоакустики и уравнений фильтрации в упругих пористых средах через усреднение периодических структур // Труды семинара имени И.Г. Петровского. – М.: Наука, 2008. – С.178-238.
17. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / М.: Физматлит, 1994. – 448 с.
18. Daly B.J. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. – 1967. – №2. – P.297-307.



NUMERICAL SOLUTION OF TWO IMMISCIBLE INCOMPRESSIBLE  
FLUIDS SIMULTANEOUS FLOW IN A POROUS MEDIUM  
AT MICROSCOPIC LEVEL PROBLEM

O.A. Galtseva, O.V. Galtsev

Belgorod State University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: [oleggaltsev@bsu.edu.ru](mailto:oleggaltsev@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Two models of filtration of two immiscible incompressible fluids of different density separated by free boundary in a porous elastic medium is studied numerically. Numerical results are given according to developed algorithms in the case when the structure of pore space has the form of isolated capillaries and disconnected elements of porous medium.

**Key words:** free boundary problem, liquid filtration, numerical averaging.